



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA



# **O ESTUDO DA ELIPSE A PARTIR DA UTILIZAÇÃO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA EM UMA PRÁTICA PEDAGÓGICA DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO**

**Acadêmico:**

Roger Braga Dutra

**Orientador:**

Prof. Dr. Daniel da Silva Silveira

**RIO GRANDE, RS  
2019**

ROGER BRAGA DUTRA

**O ESTUDO DA ELIPSE A PARTIR DA UTILIZAÇÃO DO  
SOFTWARE GEOGEBRA EM UMA PRÁTICA PEDAGÓGICA DE  
MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO**

Trabalho de Conclusão de Curso de  
Licenciatura em Matemática, apresentado à  
Universidade Federal do Rio Grande – FURG,  
como requisito parcial para obtenção de sua  
conclusão.

**Orientador:**

Prof. Dr. Daniel da Silva Silveira

RIO GRANDE, RS  
2019



Universidade Federal do Rio Grande – FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física

Curso de Licenciatura em Matemática

Av. Itália km 8 Bairro Carreiros

Rio Grande-RS CEP: 96.203-900 Fone (53)3293.5411

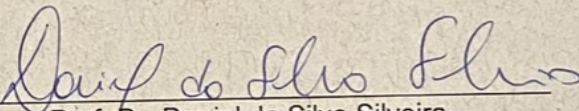
e-mail: imef@furg.br

Sítio: www.imef.furg.br

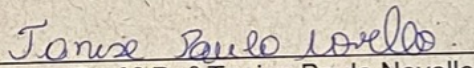


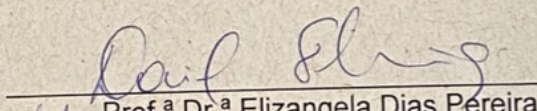
### Ata de Defesa de Monografia

No nono dia do mês de dezembro de 2019, às 14h, no CEAMECIM, no Campus Carreiros, foi realizada a apresentação pública da defesa do Trabalho de Conclusão de Curso do acadêmico **Roger Braga Dutra** intitulada **O estudo da elipse a partir da utilização do software GeoGebra em uma prática pedagógica de matemática no Ensino Médio**, sob orientação do Prof. Dr. Daniel da Silva Silveira, deste instituto. A banca avaliadora foi composta pela Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Tanise Paula Novello, do IMEF/FURG, e pela Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Elizangela Dias Pereira. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, o candidato foi: (X) aprovado por unanimidade; ( ) aprovado somente após satisfazer as exigências que constam na folha de modificações, no prazo fixado pela banca; ( ) reprovado. Na forma regulamentar, foi lavrada a presente ata, que é abaixo assinada pelos membros da banca, na ordem acima relacionada.

  
Prof. Dr. Daniel da Silva Silveira

Orientador

  
Prof.ª Dr.ª Tanise Paula Novello

  
Prof.ª Dr.ª Elizangela Dias Pereira

## RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso busca investigar a potencialidade do *software* GeoGebra no desenvolvimento do estudo de elipse no âmbito do Ensino Médio. Para tanto, foi necessário estudar os documentos oficiais nacionais que orientam o processo de ensinar Matemática no Ensino Médio, propor aos estudantes a construção da elipse no GeoGebra a fim de problematizar suas relações geométricas e analíticas, bem como analisar e compreender as construções e os registros sistematizados pelos estudantes no uso do *software* para o estudo das elipses. Para isso, a sequência didática foi elaborada pensando na potencialidade da tecnologia digital, mais especificamente, na construção da elipse em que o aluno descrevesse a próprio punho em uma folha almaço o que observava durante essa construção. O desenvolvimento da sequência didática possibilitou constatar de forma recorrente a relação entre a linguagem algébrica e a representação gráfica expressa pelos estudantes, assim como demonstraram apropriação conceitual acerca das propriedades das elipses. Assim, pode-se concluir que as práticas pedagógicas, com o uso das tecnologias digitais, precisam ser ampliadas e transformadas, buscando estar próximo do alunado, de seu contexto, de conhecer seus saberes e desejos em relação ao seu presente e seu futuro, o que pode mudar a forma como o estudo da Matemática é organizado e desenvolvido na escola.

## SUMÁRIO

Introdução .....	6
1. A concepção dos documentos oficiais nacionais sobre o estudo da Geometria Analítica: orientações e desafios à prática docente .....	10
2. Aspectos metodológicos .....	14
2.1 Planejamento da sequência didática .....	15
2.2 Aplicação da sequência didática .....	15
3. Evidências dos estudantes com base na realização da sequência didática .....	21
4. Considerações finais .....	29
Referências .....	32

# INTRODUÇÃO

Início este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) contando as experiências vividas nesta trajetória na Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande – FURG, que me incitaram ao desejo de estabelecer compreensões acerca da potencialidade das tecnologias digitais no âmbito das práticas pedagógicas em Matemática na Educação Básica. Desse modo, estou partindo de minha inserção no subprojeto da Matemática vinculado ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) da FURG, na qual tive a oportunidade de participar três anos, atuando semanalmente em atividades pedagógicas no contexto da sala de aula escolar. A experiência no PIBID me possibilitou enxergar a escola de uma outra perspectiva, ou seja, não mais como aluno, mas sim como professor, de maneira que a cada semana eram realizadas atividades para que os estudantes se sentissem motivados a participar e aprender matemática.

Essa caminhada me permitiu vislumbrar outras possibilidades nos processos de ensinar e de aprender, visto que a cada nova atividade realizada com os estudantes na escola, analisava as situações recorrentes, refletia e escrevia sobre a experiência em um diário do PIBID, o que me provocava, inclusive, a ressignificar conteúdos conceituais e procedimentais da matemática e pensar como abordá-los na Educação Básica. Para Silveira (2012), o termo ressignificação é compreendido como uma produção de novos significados e interpretações sobre como se age e vive os processos de ensinar e de aprender, neste caso, especificamente, sobre os processos pedagógicos que envolve o ensino de Matemática.

Outro ponto importante durante a caminhada na Licenciatura em Matemática na FURG foi cursar as disciplinas de Tecnologias Aplicadas à Educação Matemática I e II. Por meio das leituras e diálogos, bem como pelo desenvolvimento de práticas educativas nessas disciplinas foi possível também entender a importância das ferramentas tecnológicas com finalidade pedagógica para o estudo da Matemática.

Em meados de 2016, ingressei no Grupo de Pesquisa Educação a Distância e Tecnologia (EaD-TEC), em que pude vivenciar estudos e discussões acerca das tecnologias digitais implicadas nos processos educativos e sobre técnicas de análise para pesquisas qualitativas. Este grupo de pesquisa pauta seus estudos e ações na formação inicial e continuada de professores, bem como no desenvolvimento de metodologias e ferramentas tecnológicas educacionais. Integrar esse Grupo me aproximou de alguns professores que pesquisam na área de Educação e Tecnologia, algo que foi importante para minha constituição como professor, pois eles compartilharam suas experiências na

docência, tanto na formação de professores quanto em atividades que estabelecem com a comunidade, por meio de projetos de pesquisa e extensão.

Com base nessas experiências, percebo apoiado em Maturana (2014), que educar é um processo em que os sujeitos convivem com o outro e se transformam neste contexto. Por isso, penso que ao trabalhar na escola e/ou universidade é necessário inserir atividades que adotem e explorem as tecnologias digitais, seja no laboratório de informática, seja com os dispositivos móveis na sala de aula, pois seu uso pode tornar o processo de ensinar mais interativo e significativo aos estudantes por eles se constituírem como nativos digitais.

Apoiado nessa perspectiva, é que durante o Estágio Supervisionado do Ensino Médio, realizei uma atividade pedagógica, a qual denominei como sequência didática, em que busquei utilizar a tecnologia digital para desenvolver com os estudantes o estudo das Cônicas e, mais especificamente, sobre a construção e as propriedades das elipses. Essa atividade foi realizada com estudantes do terceiro ano do Ensino Médio de uma Escola Pública, e com base nela, estabeleci o objetivo deste trabalho de conclusão que é **investigar a potencialidade do software GeoGebra no desenvolvimento do estudo de elipse no âmbito do Ensino Médio.**

Tendo em vista a intenção supracitada, estabeleço alguns objetivos específicos que me ajudaram a balizar o estudo aqui proposto, tais como: (a) estudar os documentos oficiais nacionais que orientam o processo de ensinar Matemática no Ensino Médio; (b) propor aos estudantes a construção de elipses no software GeoGebra a fim de problematizar suas relações geométricas e analíticas; e (c) analisar e compreender as construções e os registros sistematizados pelos estudantes no uso do GeoGebra para o estudo das elipses.

Para poder compreender o fenômeno parto, inicialmente, de entender o que são de fato as Cônicas? Para Andrade (2016), cônicas são curvas especiais definidas por meio da intersecção de um cone duplo de revolução com um plano, o que podem gerar as figuras geométricas tais como: circunferência, elipse, parábola e hipérbole.

Diante de tal definição, cabe salientar que essa parte da Geometria Analítica é apresentada somente no Ensino Médio, mais precisamente, no terceiro ano dessa etapa de escolarização. No entanto, ainda se percebe pouco o trabalho dedicado a exploração desses conteúdos na escola, embora alguns documentos oficiais como, por exemplo, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio (BRASIL, 2017) já evidencie a necessidade de apresentar e discutir com os estudantes a construção das Cônicas, suas propriedades e relações analíticas e geométricas.

Logo, este TCC está organizado da seguinte forma: o próximo capítulo apresenta uma discussão acerca do que os documentos oficiais nacionais evidenciam sobre os



processos de ensinar Matemática no Ensino Médio, dando atenção aos entendimentos e orientações a respeito do estudo da Geometria Analítica; posteriormente, é exposto os aspectos metodológicos que discorrem sobre o planejamento e a aplicação de uma sequência didática; em seguida, apresenta-se a análise dos registros gerados com base nas evidências dos estudantes e, por fim, o capítulo que aborda as considerações finais.

**A CONCEPÇÃO DOS  
DOCUMENTOS OFICIAIS  
NACIONAIS SOBRE O ESTUDO DA  
GEOMETRIA ANALÍTICA:  
ORIENTAÇÕES E DESAFIOS À  
PRÁTICA DOCENTE**

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio foram elaboradas com base na ampla discussão que resulta em alguns documentos oficiais, tais como a Lei de Diretrizes e Bases da Educação – LDB de 1996 e os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN de 1997, nos quais balizam formas e conjecturas para a concretização da Educação Básica. No que se refere ao Ensino Médio, o Plano Nacional de Educação (BRASIL, 2014) determina diretrizes, metas e estratégias para a política educacional nos próximos dez anos, tais como: elevar a taxa líquida de matrículas para 85%; oferecer 25% das matrículas de Educação de Jovens e Adultos (EJA), na forma integrada à educação profissional; triplicar as matrículas da educação profissional técnica de nível médio assegurando a qualidade da oferta e pelo menos 50% da expansão do segmento público; e implementar mecanismos de reconhecimento de saberes dos estudantes, a serem considerados na articulação curricular dos cursos de formação inicial e continuada, bem como dos cursos técnicos de nível médio.

A LDB (BRASIL, 1996) tem como objetivo regular os direitos e deveres da política brasileira em relação a educação formal e não-formal, possibilitando que os alunos deem prosseguimento aos seus estudos, de modo que em conjunto com os PCN e a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), definam os processos educacionais conforme os princípios presentes na Constituição. A BNCC foca no conjunto de competências gerais e específicas para cada área do conhecimento e, especificamente no campo da Matemática para o Ensino Médio, o documento postula sobre competências e habilidades, as quais buscam:

- (i) pensar e racionar utilizando estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos;
- (ii) propor atividades que levem a investigação de desafios do mundo contemporâneo de forma a articular conhecimentos matemáticos;
- (iii) planejar e resolver problemas a partir da construção de modelos que levem os estudantes a plausibilidade dos resultados das soluções propostas;
- (iv) utilizar ferramentas que primem pela investigação e o estabelecimento de conjecturas acerca de diferentes conceitos, empregando recursos e estratégias como observação, experimentação e tecnologias digitais;
- (v) compreender e utilizar com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação da matemática.

Além disso, a BNCC (BRASIL, 2017) sinaliza que as tecnologias digitais podem ser ferramentas agregadoras ao estudo da Geometria Analítica, visto que é uma forma de expandir os conhecimentos dos estudantes através da dinamicidade que se estabelece entre a simulação dos objetos e suas variáveis. Para Silveira (2017, p. 99), o estudante quando tem a oportunidade de conhecer e utilizar uma tecnologia digital no ensino de Matemática pode observar o passo a passo de sua solução, desenhar uma curva ou plotar em um *software*, “simulando diferentes comportamentos a partir da variação dos parâmetros de um problema”. Um outro ponto relevante ao fazermos uso das simulações é que o tempo se amplia, no sentido das possibilidades das experiências e podemos multiplicar a experimentação com condições iniciais diversas, simular em alguns minutos fenômenos que exigiriam muito mais tempo sem o uso da tecnologia digital.

Ao utilizarmos o *software* GeoGebra para explorarmos suas ferramentas na construção de uma circunferência ou das cônicas (elipses, hipérboles e parábolas), é possível discutir sobre as relações entre as propriedades geométricas com as algébricas, uma vez que essa ferramenta tecnológica digital apresenta em sua interface tanto uma janela gráfica quanto uma exposição algébrica. Assim, o ensino da Geometria Analítica pode se tornar mais dinâmico e interativo, o que pode instigar o estudante a gostar de Matemática e levá-lo a analisar e a sistematizar seu pensamento e, conseqüentemente, a construir sua aprendizagem.

Em relação ao pensamento geométrico, os softwares desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras (BRASIL, 2017, p. 257).

Os PCN referem-se ao estudo da Geometria Analítica por meio da representação das equações no plano cartesiano, a relação de intersecção e posição relativa de figuras, o que pode potencializar a interpretação e associação das representações geométricas com as propriedades algébricas, estabelecendo conexões entre elas.

A unidade Geometria Analítica tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O aluno do Ensino Médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações (BRASIL, 1998, p. 124).

Além disso, os PCN apresentam em sua discussão orientações aos professores para desenvolverem atividades pertinentes ao cenário educacional e a realidade dos estudantes, evidenciando estratégias e diretrizes para as práticas educativas de maneira a potencializar o aprender desses sujeitos. Este documento ainda sinaliza sobre o uso das tecnologias

com a finalidade pedagógica, como ferramenta para aprimorar o conhecimento matemático e se posicionar frente às questões de nossa atualidade.

Por isso, quando vamos fazer uso de um recurso pedagógico, seja ele uma tecnologia digital ou não, é imprescindível termos clareza e domínio sobre os objetivos da atividade que estamos propondo aos estudantes. Ao mesmo tempo, a finalidade pedagógica do artefato utilizado precisar ir ao encontro dos objetivos da atividade a ser desenvolvida, bem como ser analisada a fim de possibilitar a investigação e o desafio do intelecto dos estudantes. Assim, é o uso didático-pedagógico das tecnologias digitais que os fazem instrumentos do processo de ensinar e de aprender, o que pode implicar na ressignificação da prática docente.

# **ASPECTOS METODOLÓGICOS**

Para o desenvolvimento deste TCC, adotamos como caminho metodológico uma abordagem qualitativa que tem a intenção de compreender o cenário pesquisado que consiste em **investigar a potencialidade do *software* GeoGebra no desenvolvimento do estudo de elipse no âmbito do Ensino Médio**. Segundo Minayo (2012) a pesquisa qualitativa não se detém a olhar a quantificação de registros, mas entender um problema específico em profundidade, explorando e analisando as informações geradas o que pode colaborar para a compreensão do fenômeno. Dessa forma, na próxima seção, apresentamos a estrutura da sequência didática implementada para trabalhar com os estudantes do Ensino Médio de uma escola pública.

## 2.1 Planejamento da sequência didática

Nesta seção, apresentamos nossa proposta pedagógica que se estabeleceu por meio de uma atividade em sala de aula com uma turma de 24 estudantes do terceiro ano da Escola Estadual de Ensino Médio Silva Gama, localizada no Balneário Cassino, na cidade de Rio Grande. Foram utilizados durante a sequência didática *netbooks* fornecidos pela escola e folhas de papel almaço, em que os estudantes, organizados em duplas, construíram elipses no *software* GeoGebra.

O GeoGebra é um *software* que foi criado por Markus Hohenwarter, de código aberto e de linguagem dinâmica, que busca desenvolver o ensinar e o aprender matemática para as diferentes etapas de escolarização (GUEDES, 2013). Esse *software* congrega para a articulação de propriedades geométricas, algébricas, gráficas, probabilísticas, estatísticas e cálculos que são ligados de forma dinâmica.

A sequência didática foi elaborada pensando na potencialidade da tecnologia digital, neste caso no uso do GeoGebra, e como ele pode contribuir para o aprender dos alunos em relação ao estudo de cônicas, em especial, a construção e análise das propriedades de elipses. Para isso, propusemos aos estudantes dois momentos, um focado na apropriação do *software* e o outro na análise das situações matemáticas geradas com o seu uso.

## 2.2 Aplicação da sequência didática



Iniciamos nossa atividade na sala de aula com a presença dos *netbooks* a fim de familiarizar os estudantes com o GeoGebra e os questionando sobre quem teve a oportunidade de conhecer e explorar as ferramentas do *software*. Ademais, realizamos uma breve introdução as Cônicas, visto que já havíamos estudado a circunferência, e observado


de uma nova perspectiva de corte o cone, que resulta na elipse. Como a turma sempre foi muito receptiva as propostas pedagógicas, iniciou-se logo em seguida a atividade, pois os alunos não apresentaram dúvidas.

Ao decorrer da prática realizada encontramos alguns desafios como o mau funcionamento dos *netbooks* que, mesmo sendo vistoriados no dia anterior à atividade, apresentaram problemas para inicializar. Devido a essa situação, mesmo com doze computadores em uso, foi preciso reorganizar os grupos, de forma a se acomodarem em dois trios e nove duplas.

Logo em seguida, durante a atividade, dois *netbooks* se desligaram. Porém, como tal questão já havia sido prevista durante o planejamento da atividade, foi solicitado aos alunos que o trabalho fosse salvo a cada operação realizada. Assim, evitou-se a perda das informações e de tudo o que já havia sido construído.


Então introduzimos a atividade apresentando as ferramentas do GeoGebra, deixando-os livres para conhecerem suas respectivas funções e se apropriarem. Logo em seguida, solicitamos aos estudantes que realizassem as seguintes etapas no *software*.

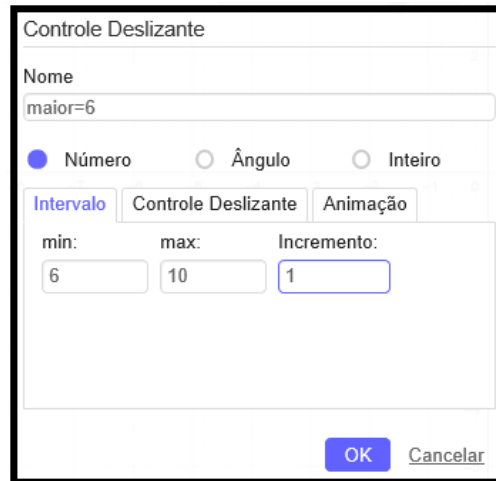
- **1ª Etapa)** Clique no ícone  da barra de ferramentas acima do plano cartesiano. Agora vá para o plano cartesiano e insira com o botão direito do *mouse* três pontos, que serão respectivamente definidos como ponto A, B e C.
- **2ª Etapa)** Clique novamente no ícone  e em controle deslizante e logo após no plano cartesiano no qual aparecerá uma janela em que vamos alterar alguns termos, tais como:



**Figura 1:** Comando de controle deslizante  
**Fonte:** os autores (2019).



- **3ª Etapa)** Clique no ícone  em seguida em controle deslizante e logo após no plano cartesiano, no qual aparecerá uma janela em que vamos alterar alguns termos, tais como:





A janela intitulada "Controle Deslizante" possui um campo "Nome" com o valor "maior=6". Abaixo, há três opções de tipo de dado: "Número" (selecionada), "Ângulo" e "Inteiro". Há também três abas: "Intervalo" (selecionada), "Controle Deslizante" e "Animação". Na aba "Intervalo", há campos para "min:" (valor 6), "max:" (valor 10) e "Incremento:" (valor 1). No canto inferior direito, há botões "OK" e "Cancelar".


**Figura 2:** Comando de controle deslizante  
**Fonte:** os autores (2019).




- **4ª Etapa)** A esquerda da sua tela existe uma janela na qual diz JANELA DE ÁLGEBRA. Nessa janela aparecerão todos os comandos já feitos, ao lado de cada comando existe um círculo, que indica quando o comando está no plano. Se você clicar neste círculo, automaticamente seu comando na janela gráfica desaparecerá. Clique nos comandos da 3ª e 4ª etapa.
- **5ª Etapa)** Com o botão direito do *mouse*, arraste o ponto C até (0,0) do plano cartesiano.
- **6ª Etapa)** Na janela algébrica clique sobre o ponto A. Agora, apague os pontos que representam onde o ponto A está no plano cartesiano e digite:  $(x(C), y(C)+\text{menor})$ . Agora, dê *Enter*.
- **7ª Etapa)** Na janela algébrica clique sobre o ponto B. Agora, apague os pontos que representam onde o ponto B está no plano cartesiano e digite:  $(x(C)+\text{maior}, y(C))$ . Agora, dê *Enter*.
- **8ª Etapa)** Digite no campo de entrada:  $\text{sqrt}()$ , aparecerá uma raiz quadrada. Digite nela:  $(\text{maior}^2 - \text{menor}^2)$  e dê *Enter*.


- **9ª Etapa)** Digite no campo de entrada:  $F=(x(C)+f, y(C))$  e dê *Enter*. Perceba que aparecerá um ponto F no plano cartesiano.
- **10ª Etapa)** Digite na entrada:  $F'=(x(C)-f, y(C))$  e dê *Enter*. Perceba que aparecerá um ponto F' no plano cartesiano. Com esses comandos já realizados o que é possível perceber?

	Com esses comandos já realizados o que é possível perceber?
---	---

- **11ª Etapa)** Agora, clique no ícone da elipse que fica na barra de ferramentas acima do plano cartesiano . Em seguida, no plano cartesiano clique sobre os pontos F e F' e com o *mouse* vá até o ponto A ou B.

	Com mais esses comandos o que você observa na janela gráfica?
---	---

- **12ª Etapa)** Clique no ícone  na barra de ferramentas acima da janela gráfica e algébrica. Em seguida clique com o botão direito e depois com o esquerdo do *mouse* sobre a elipse. No plano cartesiano, irá abrir uma janela na qual você vai clicar em configurações. Aparecerá na tela do seu computador, à direita, uma barra de ferramentas na qual você precisa clicar no ícone  e logo após, em . Com isso, uma nova janela abrirá, então clique em valor.

	O que foi gerado a partir desses novos comandos?
---	--


- **13ª Etapa)** Como queremos a forma canônica da equação da elipse vamos na janela de configurações ao lado direito da sua tela, clique em álgebra e na janela


correspondente a ela, clique na equação:



$$(x - m)^2 / a^2 + (y - n)^2 / b^2 = 1$$


Em

seguida, clique sobre a equação e arraste para fora da elipse.

- **14ª Etapa)** Ainda nesta janela de configurações, clique em cor, escolha a cor da sua elipse e acesse transparência. Arraste o *mouse* até você obter a cor desejada da sua elipse.
- **15ª Etapa)** Clique no ícone  da barra de ferramentas acima da janela gráfica. Agora, no plano cartesiano, insira com o botão direito do *mouse* um ponto sobre a elipse.

	O que você observa ao movimentar este ponto?
---	--

- **16ª Etapa)** Clique no ícone  da barra de ferramentas acima da janela gráfica. Agora, no plano cartesiano, clique sobre o ponto plotado no passo anterior e sobre o ponto F e F'.
- **17ª Etapa)** Clique em um dos segmentos com o botão esquerdo do *mouse* e depois em . Então, abrirá uma janela na qual você irá clicar em valor. Logo em seguida, faça para o outro segmento o mesmo procedimento.

	O que acontece ao mover o ponto do passo anterior em relação a 17ª Etapa?
---	---

Durante o desenvolvimento das etapas, os estudantes transcreviam para uma folha de papel almaço tudo o que operavam e observavam no *software* GeoGebra balizados, também, pelos questionamentos realizados. Assim, cada etapa de construção era registrada pelas duplas e trios de estudantes e mediada pelo professor.

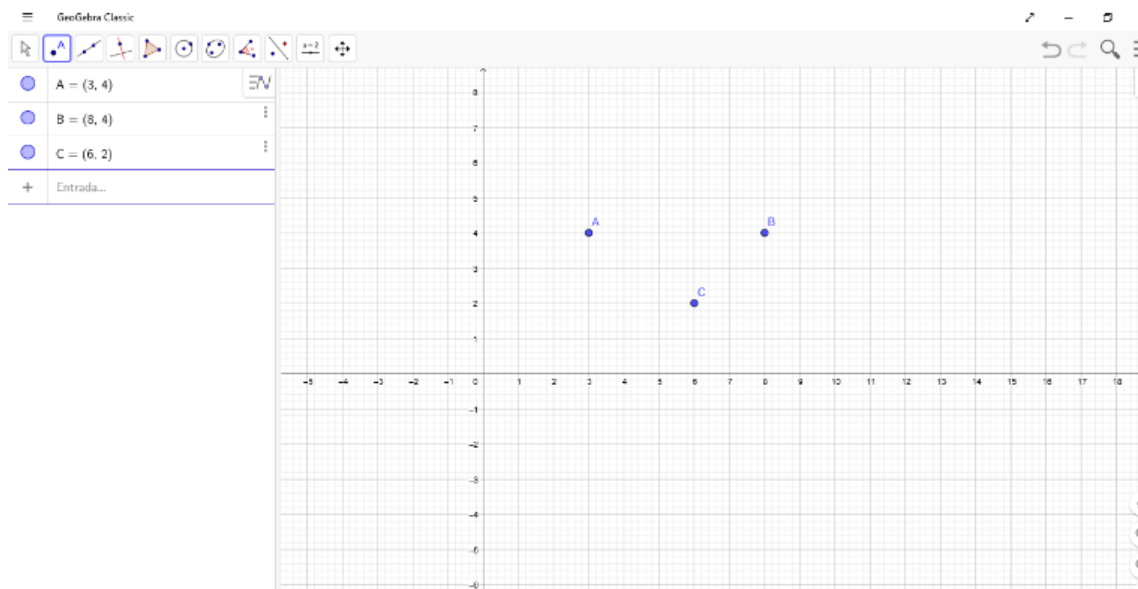
Cabe salientar que os registros produzidos pelos alunos foram realizados à mão livre, isto é, orientado pelo professor, mas não induzido. Além disso, foi solicitado que os alunos

passassem para a folha de papel almaço em próprio punho o passo a passo realizado e aquilo o que eles acreditavam ser relevante para a construção da elipse no *software* GeoGebra.

Com os *netbooks* em mãos, percebemos que a cada momento era discutido entre as duplas e trios, o que acontecia na janela gráfica e algébrica do *software* GeoGebra e registravam na folha de almaço as suas observações e análises. A comunicação entre os alunos foi um dos aspectos positivos observados na atividade, pois foram estabelecidas várias interações entre eles e com o uso do *software*, o que pode contribuir para a construção do conhecimento sobre as elipses e suas propriedades, conforme será explicitado no próximo capítulo.

# **EVIDÊNCIAS DOS ESTUDANTES COM BASE NA REALIZAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA**

Após a realização da sequência didática com os estudantes e ao analisar os seus registros, constatamos como ponto chave em suas escritas, a relação entre a linguagem algébrica e a representação gráfica. Na Figura 3, percebemos que na janela gráfica os três pontos foram plotados e eles são evidenciados na janela algébrica.



**Figura 3:** Esboço da 1ª Etapa da sequência didática realizada pelo Grupo A.

**Fonte:** os autores (2019).

Para Duval (2011), o conhecimento matemático pode ser construído quando nós instigamos os estudantes a buscarem relações com o objeto matemático a partir de diferentes sistemas de representação. Na Figura 3, os alunos observam os elementos do plano cartesiano com o que é exposto na janela algébrica e comentam:

*Apertamos em um comando que diz “novo ponto”. Percebemos que quando colocamos um ponto em qualquer lugar do plano cartesiano (colocamos 3 pontos no 1º quadrante) automaticamente a parte analítica descreve os pontos da parte geométrica (Registro do Grupo A).*

*Ao começarmos o trabalho percebemos que ao marcar os pontos A, B e C na parte geométrica logo as mesmas foram listadas na parte analítica gerando os dados no plano (Registro do Grupo B).*

*Percebemos que a partir do momento em que colocamos os pontos no plano cartesiano, a parte analítica nos deu as coordenadas dos pontos. Depois percebemos que tudo que fazemos na parte do plano cartesiano, a parte analítica nos dá resultados (Registro do Grupo C).*

*Botamos o ponto no plano cartesiano em um determinado lugar e na parte analítica apareceram as coordenadas desse ponto (Registro do Grupo D).*

Percebemos nos fragmentos acima a apropriação da linguagem matemática e das propriedades presentes no próprio aplicativo quando os estudantes se referem ao primeiro quadrante, a relação entre o que é feito na parte gráfica com a parte analítica, e a representação das coordenadas do ponto. Além disso, a aceitação em trabalhar as atividades propostas no *software* foi surpreendente.

No que diz respeito ao *software* GeoGebra, podemos dizer que ele apresenta vários benefícios para o ensino de geometria, pois permite a visualização de propriedades e experimentos dinâmicos na tela do computador ou de um dispositivo móvel. Isso não quer dizer que os recursos não digitais, como por exemplo, lápis, papel e desenhos devem ser extintos, mas que de certa forma eles não permitem uma atividade tão dinâmica.

O GeoGebra permite que se visualize tanto na parte algébrica quanto geométrica as representações simultâneas. Tal tipo de visualização possibilitou que a atividade em questão fosse atual e que permitisse ao estudante perceber situações em duas formas na construção da elipse, analítica e geométrica. Bona (2009, p. 36) nos diz que com uma proposta pedagógica planejada e estruturada permite que o estudante dê novos significados as atividades de ensino, assim como

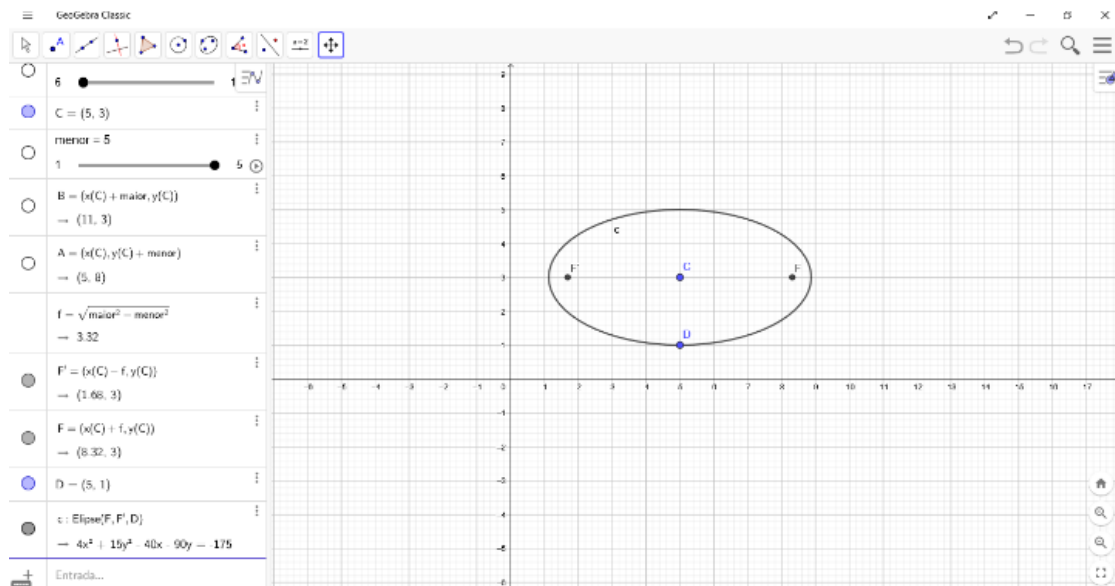
os softwares educativos podem ser um notável auxiliar para o aluno adquirir conceitos em determinadas áreas do conhecimento, pois o conjunto de situações, procedimentos e representações simbólicas oferecidas por essas ferramentas é muito amplo e com um potencial que atende boa parte dos conteúdos das disciplinas. Estas ferramentas permitem [...] ao professor a oportunidade para planejar, de forma inovadora, as atividades que atendem aos objetivos do ensino.

Nesse sentido, usar o *software* durante as práticas de ensino possibilita aos estudantes a construção de seus conhecimentos, por meio da visualização e análise de situações, segundo excertos abaixo:

*Fizemos nas etapas 7, 8, 9, 10, 11 e 12 a montagem da elipse com seus focos e percebemos que quando mexemos no centro tudo se move e muda na parte analítica também (Registro do Grupo E).*

*Depois fomos adicionar os pontos da elipse e logo apareceu uma equação e nossa elipse sem os pontos C, F' e F. Assim surgindo a nossa equação (Registro do Grupo D).*

*Ao clicarmos no ponto "F" e move-lo percebemos que a elipse fica maior se botar o ponto "F" para cima e menor quando colocamos para baixo (Registro do Grupo A).*



**Figura 4:** Esboço da sequência didática realizada pelo Grupo E.  
**Fonte:** os autores (2019).

A construção foi feita passo a passo de maneira que os estudantes conseguissem perceber e transcrever tudo que observavam durante as aplicações. Algo muito significativo durante a atividade foi verificar que os estudantes estavam realmente interessados naquilo que estava sendo proposto e que a atividade proposta estava fazendo sentido.

Vale lembrar que era uma turma de terceiro ano do Ensino Médio que sequer sabia da existência dos *netbooks* na escola, pois os professores nunca haviam trabalhado com tal ferramenta anteriormente. Com isso, foi possível perceber através dessa atividade a motivação dos estudantes, pois sua faixa etária está entre 16 a 17 anos, ou seja, adolescentes que têm a tecnologia como algo naturalizado a sua rotina social, mas nem sempre para fins educacionais. Ao proporcionar aos alunos esta experiência com a tecnologia digital, foi possível perceber mais interesse e menos resistência, algo benéfico para o ensino da Matemática, disciplina tida por muitos como a mais desafiadora.

Como era uma atividade dinâmica, em alguns momentos os estudantes pediam para voltar nas etapas anteriores da sequência didática devido a algum erro ou imprevisto, pois encontravam dificuldades em operar com alguma ferramenta do *software* Geogebra. A imprevisibilidade pode acontecer mesmo com uma prática pedagógica precisamente estruturada, com objetivos, metodologias e ferramentas definidas.

*Não conseguimos fazer aparecer a elipse quando colocamos os pontos que o professor pediu não aparece para nós (Registro do Grupo F).*



O inesperado pode surgir, na medida em que as ações são realizadas na dinâmica de interação entre professor e estudantes. Para Tardif e Lessard (2014, p. 233), “deslocações, desvios e recuos de graus variados em relação ao planejamento” torna-se uma prática recorrente e necessária, pois a interação gera espaço para a emergência, para o inusitado em sala de aula.

De acordo com Moran (2000, p. 17-18)

As mudanças na educação dependem também dos alunos, alunos curiosos e motivados facilitam enormemente o processo, estimulam as melhores qualidades do professor, tornando-se interlocutores, lúcidos e parceiros de caminhada do professor-educador. Alunos motivados aprendem e ensinam, avançam mais, ajudam o professor a ajudá-los.

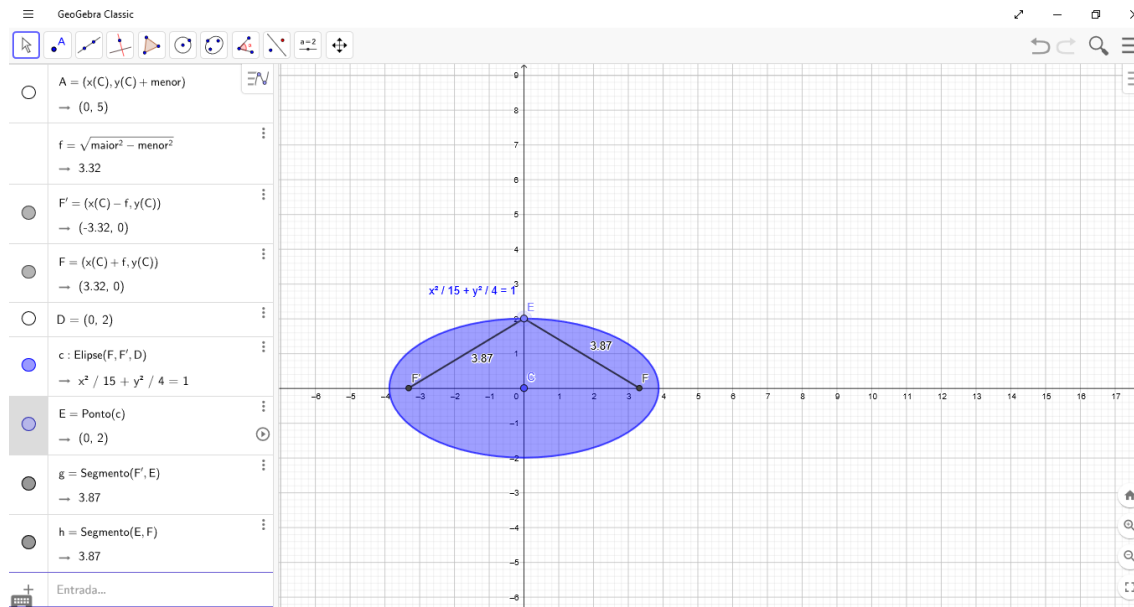
Ao perceber algumas dificuldades, mesmo pontuais, foi possível refletir sobre a interação do estudante no que diz respeito ao momento de aprendizagem e ao quanto aquele estudante estava disposto a enfrentar o erro e problematizá-lo. Ao citar algumas falas de alguns alunos, e com o envolvimento deles na questão, foi possível perceber que não era o professor apenas que conduzia aquela atividade, mas também os estudantes. Os estudantes, ao se questionarem e ao se ajudarem, tornaram a aula mais dinâmica, comunicativa e colaborativa, conforme podemos evidenciar do extrato a seguir.

*Agora no momento que colocamos os pontos na parte onde aparece as equações não apareceu nada na outra parte. Mas depois conseguimos com a ajuda do colega (Registro do Grupo G).*

Ao dar continuidade à atividade com a representação da elipse construída, pôde-se observar as propriedades nela contida, ou seja, os pontos que foram pertinentes para trabalhar no tempo proposto. Como não havia muito tempo para a atividade nos computadores, trabalhamos de acordo com a realidade, chegando ao possível para introduzir um breve entendimento da elipse com suas propriedades. Nesse sentido, Bento (2010, p. 20) aponta que:

[...] na Geometria, o recurso computacional é um instrumento para desenvolver, entre outras habilidades a de visualização, facilitando a movimentação das figuras com software de geometria dinâmica, promovendo maior exploração dos conceitos geométricos, para a aquisição e formalização dos mesmos.

Dessa forma, os estudantes, ao operar o GeoGebra, conseguiam visualizar e discutir entre si os elementos que continham na representação geométrica e, ao mover pontos e retas, observavam que a distância entre os focos  $F$  e  $F'$  e a ligação das retas desses focos no ponto  $D$  quando somados mantinham o mesmo valor, conforme Figura 5.



**Figura 5:** Esboço da 17ª Etapa da sequência didática realizada pelo Grupo C.

**Fonte:** os autores (2019).

O uso do GeoGebra possibilitou aos estudantes a gravação das etapas na construção de um objeto matemático, na captura e reprodução de procedimentos realizados, um olhar e, portanto, a reflexão de um processo. Alguns exemplos desta situação podemos verificar a seguir nos relatos dos grupos H, I e J:

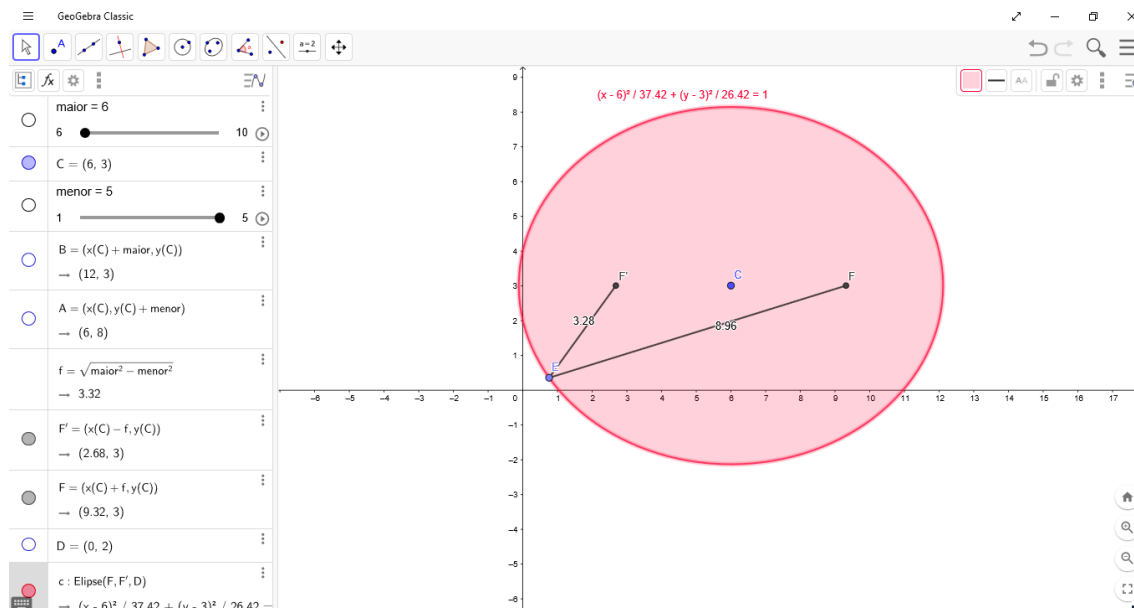
*Buscamos também o ponto G que se move em torno da elipse, porém não é possível coloca-lo em outro lugar que não seja em torno da mesma. Ligamos o ponto G ao D e depois o ponto G ao E. A partir do ponto H que está fixado na elipse, mesmo que a gente mova o ponto, as retas somadas possuem o mesmo raio e os focos (pontos D e E) continuam os mesmos (Registro do Grupo H).*

*Clicando em segmento de reta o ponto G vai até outro ponto dentro da elipse, podemos perceber que mudando o ponto de lugar vai mudando os números, somando-os, vai dar o mesmo valor (Registro do Grupo I).*

*Fizemos uma reta de dois pontos ligando G ao E e G ao D. Agora, mudando o ponto G de lugar, percebemos que no plano cartesiano os focos não mudam de lugar, mas mudam os valores, a soma deles sempre vai dar a mesma coisa (Registro do Grupo J).*

Para Brito e Almeida (2005), o uso de tecnologias digitais auxilia os alunos em diferentes tarefas, minimizando esforços como é o caso na determinação de parâmetros para o deslocamento de pontos na elipse, sabendo que a soma dos focos sempre será igual. Essa situação permite que os estudantes tenham a oportunidade de concentrar seus

esforços na interpretação e na análise das situações que lhes é colocada, assim como simular outras condições para enriquecer a sua análise, conforme pode ser visto na Figura 6.



**Figura 6:** Esboço da sequência didática realizada pelo Grupo D.

**Fonte:** os autores (2019).

Dessa maneira, percebe-se pelas escritas que os estudantes ao dinamizar as figuras construídas, conseguem entender o conceito e as propriedades das elipses. Por isso, compreendemos a importância do uso recorrente das tecnologias digitais para o processo de ensinar e aprender. Contudo, devemos fazer uma amarra entre os componentes para que tanto o aluno quanto o professor, em conjunto com os meios tecnológicos, construam o aprendizado através da ação e reflexão, bem como pela interação e colaboração entre eles.

*Achamos o trabalho muito interessante, interativo, embora tenha sido em duplas, a turma interagiu de modo geral. Serviu para termos um melhor conhecimento sobre o geogebra. Esperávamos que o trabalho fosse complicado, porém despertou um interesse maior pela matemática. (Registro do Grupo C)*

*Nós gostamos do trabalho, interessante e diferente. Vemos que a tecnologia sem muito acrescenta na educação escolar. (Registro do Grupo D)*

*A matéria se torna mais visível e mais interessante. Usando a tecnologia nas escolas, principalmente na matemática, faz com que o estudo fique mais fácil e mais divertido. Aprendemos coisas novas. (Registro do Grupo J)*

Os estudantes reconhecem que o uso da tecnologia digital torna o ensino de Matemática interessante e diferente, visto que amplia o seu conhecimento e permite outras possibilidades de compreensão dos conteúdos matemáticos, pois tornam suas atividades práticas e interativas. Para Lângaro (2003), a interação estabelecida em sala de aula possibilita que cada estudante seja responsável por adotar uma postura investigativa, pesquisando soluções e compartilhando com os demais, suas ideias, suas dúvidas, seus questionamentos e suas descobertas.

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Durante o trajeto trilhado na graduação, por meio das experiências vivenciadas nos estágios, no desenvolvimento de projetos de extensão e ensino realizados nas escolas, foi possível observar a importância de se discutir acerca das práticas pedagógicas e metodologias de ensino com o auxílio de tecnologias digitais no ensinar e no aprender Matemática. Ademais, com a construção de uma sequência didática realizada no Estágio Supervisionado do Curso de Licenciatura em Matemática, tivemos a oportunidade de investigar a potencialidade do *software* GeoGebra no desenvolvimento do estudo de elipse no âmbito do Ensino Médio.

Ao estudarmos os documentos oficiais nacionais que orientam o processo de ensinar Matemática, foi possível compreender que eles evidenciam o ensino de cônicas no Ensino Médio e discutem a necessidade de levarmos ferramentas pedagógicas que provoquem a curiosidade e a experimentação dos alunos em sala de aula de forma a implicar na construção de seu conhecimento. Além disso, sinalizam que as tecnologias digitais podem ser artefatos que quando utilizados com intencionalidade pedagógica promovam a dinamicidade das propriedades matemáticas, tanto em relação aos elementos algébricos quanto a respeito das construções e representações geométricas.

Outro ponto significativo do trabalho foi propor aos estudantes, a partir da sequência didática, a construção da elipse no *software* GeoGebra a fim de problematizar suas relações geométricas e analíticas. Essa proposta resultou em uma aula dinâmica e interativa, pois os alunos se envolveram de uma forma inesperada, demonstrando apropriação conceitual e procedimental sobre os elementos que constituem a elipse, o que permitiu um diálogo intenso entre os grupos de estudantes com o professor durante a construção da cônica no GeoGebra e no registro de seus entendimentos no papel.

Ao analisarmos e compreendermos as construções e os registros sistematizados pelos estudantes durante e após o uso do GeoGebra em relação ao estudo das elipses, foi possível perceber em suas escritas o relato do que executaram geometricamente através do *software*. Os estudantes também demonstraram dedicação nas discussões entre os integrantes dos grupos, o que foi importante para o trabalho realizado.

As dificuldades encontradas durante a sequência didática estão associadas especificamente com os *netbooks*. Devido a falta de manutenção e o não uso dos equipamentos por parte dos professores da escola, a maioria deles estavam com problemas de hardware. Como havia 24 alunos na turma, para realizar o trabalho seria ideal ter 12 unidades de *netbooks* funcionando adequadamente (como de fato estavam). No entanto, o que não era esperado é que mesmo sendo testados no dia anterior à atividade, na hora não pudemos utilizar dois computadores.

Contudo, o trabalho de conclusão de curso realizado, nos possibilitou a reflexão sobre a docência, em que foi possível colocar em prática os ensinamentos construídos (planejamento das aulas, análise e utilização de ferramentas pedagógicas, bem como processos de mediação e interação com os estudantes) e as orientações dadas ao longo da formação de professores de Matemática. Mesmo com todas as limitações que a profissão de professor apresenta, em relação a remuneração e valorização social, precisamos seguir lutando por melhores condições de trabalho e em defesa de uma Educação de qualidade. Ainda em tempo, devemos entender que a Educação e as práticas pedagógicas, com o uso das tecnologias digitais, precisam ser ampliadas e transformadas, buscando estar próximo do nosso alunado, de seu contexto, de conhecer seus saberes e desejos em relação ao seu presente e seu futuro, o que pode mudar a forma como o estudo da Matemática é pensado, organizado e desenvolvido na escola.

## **REFERÊNCIAS**



ANDRADE, N. C. **Explorando a Elipse com o auxílio do GeoGebra**. 78f. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal do Amapá. Macapá, 2016.

BENTO, H. A. **O Desenvolvimento do Pensamento Geométrico com a Construção de Figuras Geométricas Planas Utilizando o Software GeoGebra**. 258f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

BONA, B. O. Análise de softwares educativos para o ensino de Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. **Experiências em Ensino de Ciências**, Carazinho/RS, v. 4, p. 35-55, 2009.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

BRASIL. Lei Nº 13005/2014. **Plano Nacional de Educação**. Brasília, 2014.

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. Lei Nº 9394/1996. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasília, 1996.

BRITO, D. S.; ALMEIDA, L. M. W. O conceito de função em situações de modelagem matemática. **Revista Zetetiké**, v. 13, n. 23, p. 63-86, 2005.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

GUEDES, P. C. C. G. **Algumas aplicações do software GeoGebra ao ensino da Geometria Analítica**. 69f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória. 2013.

LÂNGARO, A. G. **Tecnologia e práticas pedagógicas** – movimentos e vicissitudes na busca da constituição de uma comunidade de aprendizagem. 145f. Dissertação (Mestrado em Psicologia Social e Institucional). Programa de Pós-Graduação em Psicologia Social e Institucional, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

MATURANA, H. **Cognição, Ciência e Vida Cotidiana**. Belo Horizonte: UFMG, 2014.

MINAYO, M. C. S. Análise qualitativa: teoria, passos e fidedignidade. **Ciência & Saúde Coletiva**, v. 17, n. 3, p. 621-626, 2012.

MORAN, J. M. et al. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. Campinas; Papirus, 2000.

SILVEIRA, D. S. **Redes de conversação em uma cultura digital**: um modo de pensar, agir e compreender o ensino de Matemática na Educação Superior. 162f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências). Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde. Universidade Federal do Rio Grande – FURG. Rio Grande, 2017.

SILVEIRA, D. S. **Professores dos anos iniciais:** experiências com o material concreto para o ensino de Matemática. 109 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências). Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde. Universidade Federal do Rio Grande – FURG. Rio Grande, 2012.

TARDIF, M.; LESSARD, C. **O trabalho docente.** Elementos para uma teoria da docência como profissão de interações humanas. Petrópolis: Vozes, 2005.