Maria Emília da Silva Valente

CORONA VÍRUS: CURVAS QUE APROXIMAM O NÚMERO DE CONTAGIADOS NA CIDADE DE RIO GRANDE - RS

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

JUNHO, 2021

Maria Emília da Silva Valente

CORONA VÍRUS: CURVAS QUE APROXIMAM O NÚMERO DE CONTAGIADOS NA CIDADE DE RIO GRANDE - RS

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT submetido por XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dra. Fabiana Travessini De Cezaro

Coorientador: Dra. Daiane Freitas

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

JUNHO, 2021

Colaboradores

Universidade Federal do Rio Grande
http://www.furg.br

Instituto de Matemática, Estatística e Física
http://www.imef.furg.br

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
http://www.profmat-sbm.org.br

Sociedade Brasileira de Matemática
http://www.sbm.org.br

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
http://www.capes.gov.br

Dedico este trabalho a minha amiga Beatriz de Carvalho Dettman que me impulsionou a realizar um sonho esquecido por mais de 30 anos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por aqui estar e por vencer mais esse desafio.

A minha família, especialmente a minha filha Amélia e ao meu irmão Ernani, pela paciência, força e apoio, suportando meus momentos mais difíceis e me motivando a continuar.

Aos queridos amigos e colegas Rafael Barbosa da Silva e Márcia Falek Rocha pelo apoio e incentivo durante todo o curso. Sentirei muita saudade de recebê-los em casa para nossos encontros semanais de muito estudo, os quais tornaram-se momentos repletos de parceria, cumplicidade e confraternização.

Um agradecimento especial as minhas orientadoras Profª Dra. Fabiana Travessini e Profª Dra. Daiane Freitas pela paciência e apoio incansáveis para me conduzir na realização deste trabalho. Reconheço o empenho e a dedicação envolvidos nesse processo, e a força e motivação que me impulsionaram em todos os momentos, principalmente naqueles de desânimo.

A FURG e aos professores e professoras do PROFMAT por propiciarem e colaborarem na construção deste Mestrado.

A realização dessa dissertação envolveu a participação de muitas pessoas que contribuíram de forma direta e indireta, a todos sou muito grata.

Resumo

Em nosso trabalho, queremos mostrar algumas curvas que descrevem ou melhor aproximam o número de contagiados pelo corona vírus na cidade de Rio Grande, estado do Rio Grande do Sul. Na atividade proposta, utilizaremos duas equações de diferenças aplicadas a dinâmica populacional do corona vírus. Vamos mostrar que aproximar pela curva exponencial o número de contagiados é realístico até um determinado tempo, devido as características da função exponencial. Depois deste determinado tempo, é melhor aproximarmos o número de contagiados pela curva logística discreta, uma vez que a população é finita. O crescimento exponencial ocorre em curtos períodos e o crescimento logístico leva a uma estabilização.

Palavras-chaves: Pandemia, crescimento exponencial, curva logística.

Abstract

This dissertation

Key-words:

Sumário

INTRODUÇÃO

No ano de 2020 o mundo começou a enfrentar uma pandemia disseminada por um vírus da família SARS, sigla inglesa de "síndrome respiratória aguda grave", o SARS-CoV-2 que foi chamado de Coronavírus. Este vírus é causador da doença conhecida como Covid-19, a qual se propagou pelo planeta com alta velocidade de contágio, afetando drasticamente a vida das pessoas. Foi primeiramente identificado na província de Wuhan na China em dezembro de 2019. Transmitido de pessoa a pessoa, se espalhou pelo mundo rapidamente. No Brasil, o primeiro caso registrado foi em 26 de fevereiro de 2020 na cidade de São Paulo, confirmado pelo Ministério da Saúde, (BRASIL, 2020). Já no Rio Grande do Sul, o primeiro caso confirmado pela Secretaria de Saúde do Estado, por meio do Centro de Vigilância em Saúde, foi datado em 10 de março de 2020, (RS, 2020). Na cidade de Rio Grande, estado do Rio Grande do Sul, segundo o site da prefeitura, o primeiro caso de contaminação ocorreu em 23 de março de 2020, (GRANDE, 2020b).

Desde o início da pandemia, em várias mídias ouvimos uma enxurrada de explicações e informações sobre o rápido espalhamento deste vírus. Muitas destas explicações foram associadas a alguns conceitos matemáticos para responder perguntas sobre o aspecto geral da pandemia. Por exemplo, se conseguimos encontrar padrões segundo os quais o contágio acontecerá. No Blog do IMPA, o autor R. Takahashi diz que

> Entender os padrões segundo os quais os acontecimentos se organizam, recorrer a esse entendimento para imaginar o futuro e para planejar ações que permitam escolher futuros melhores, são parte daquilo que caracteriza a espécie humana, (TAKAHASHI, 2020).

Nesta identificação de padrões, a expressão "crescimento exponencial"ganhou força e foi associada ao contágio ter acontecido de forma muito rápida no mundo, pelo menos no início. Isto se deu porque o número de novos contagiados, aproximadamente, foi proporcional ao número de contagiados do dia anterior com a constante de proporcionalidade maior que um.

Em termos matemáticos, para o crescimento exponencial temos uma sequência de números em que cada número é igual ao anterior multiplicado por uma constante maior que um, mas muitas pessoas tem dificuldades de entender estas implicações na propagação de muitas doenças. Neste trabalho, estamos focados em comparar algumas curvas que melhor descrevem, ou aproximam, o número de contagiados pelo coronavírus na cidade de Rio Grande. Escolhemos para tal curvas de estrutura e características simples, conhecidas pelos estudantes de Ensino Básico. Pretendemos mostrar que a curva de uma função afim não é uma boa aproximação para o número de contagiados pelo coronavírus. Também, observar que nem todo crescimento rápido é exponencial e que pode existir outra curva que melhor descreve o número de contagiados pelo coronavírus, a curva logística, visto que a população é finita.

Em nossa atividade mostramos os dados coletados do número de contagiados pelo coronavírus na cidade de Rio Grande até 15 novembro de 2020. A aplicação da atividade foi realizada, no formato online, no dia 19 de novembro de 2020, podendo fazer a comparação dos dados reais obtidos até esta data com os dados calculados por duas equações de diferenças aplicadas à dinâmica populacional do corona vírus.

Além disso, considerando a aplicabilidade dessa dissertação no cotidiano e a contribuição que ele poderá ter, vale ressaltar que esse trabalho poderá ajudar os professores a complementar o ensino de funções, mais especificamente, as funções afins, exponenciais e logarítimas, as quais costumam fazer parte do plano de ensino do primeiro ano do ensino médio. A análise das curvas do número de contagiados por Covid-19 é um dos temas possíveis nesse caso. Também, o professor poderá optar por outros temas de sua escolha.

O trabalho está dividido em:

- No Capítulo 1 descrevemos nossos objetivos gerais e específicos.
- No Capítulo 2 apresentamos um breve histórico de algumas pandemias que assolaram a história da humanidade na Seção 2.1 e matemática e pandemias na Seção 2.2.
- Capítulo 3 revisamos alguns conceitos de matemática básica. Na Seção 3.1 trabalhamos com algumas funções elementares: afim, exponenciais e logarítimas e suas caracterizações principais. Na Seção 3.2 introduzimos as equações de diferenças e alguns exemplos. Na Seção 3.3 apresentamos dois modelos matemáticos discretos que descrevem a dinâmica de populações. Na Seção 3.4 introduzimos o modelo SIR.
- Capítulo 4 apresentamos a atividade proposta.
- Capítulo 5 apresentamos o relato da aplicação da atividade.

1 Objetivos

1.1 Objetivos Gerais

O homem, através da necessidade para resolução de problemas práticos, busca na matemática modelos para auxiliá-lo.

De acordo com a BNCC, (BNCC, 2018), a competência geral do Ensino Básico que melhor expressa a nossa proposta é:

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas, na página 09 de (BNCC, 2018).

Com base nesta competência geral, este trabalho tem como objetivos gerais levar o estudante a:

- utilizar estratégias e conceitos matemáticos para resolver e interpretar situações do cotidiano;
- articular e compreender os conceitos matemáticos divulgados no mundo contemporâneo;
- verificar qual é a melhor curva que representa a solução de uma situação real representada por um modelo matemático;
- analisar a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas;
- observar padrões e propriedades matemáticas;
- fazer experimentações e conjecturas para obter padrões em situações apresentadas no cotidiano.

1.2 Objetivos Específicos

Ainda, de acordo com a BNCC, (BNCC, 2018), algumas habilidades específicas, as quais nos interessam, são elas:

(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números, página 533.

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros, página 536.

(EM13MAT403) Comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das funções exponencial e logarítmica para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma, com ou sem apoio de tecnologias digitais, estabelecendo relações entre elas, página 539.

(EM13MAT508) Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas, página 541.

Com base nestas habilidades, elaboramos os objetivos específicos deste trabalho:

- Verificar qual curva entre afim, exponencial e logística, fornece a melhor aproximação do número de contagiados pelo corona vírus na cidade de Rio Grande;
- Interpretar as características dos gráficos das funções afim, exponencial e logística;
- Discutir qual delas fornece uma melhor aproximação para o número de contagiados pelo corona vírus na cidade de Rio Grande num determinado tempo;
- Estudar taxas de crescimento e descrescimento.

2 Pandemias e Matemática

2.1 Algumas pandemias

A pandemia gerada pelo corona vírus causou pânico no mundo. Com taxas de contágio altas, se espalhou por todos os países rapidamente. Cenários semelhantes já aconteceram em outros momentos da história. A Peste de Atenas, que se alastrou no norte da África chegando a Grécia, entre 436 e 426 a.C, e a Peste Antonina, em Roma 166 a. C., são exemplos de pandemias desde os primórdios da humanidade, (GOMES; ROCHA; MONTEIRO, 2020). Ainda, a varíola, doença causada pelo vírus *Orthopoxvírus variolae*, era transmitida de pessoa para pessoa por meio das vias respiratórias, assolou a humanidade por mais de 3.000 anos, (GALILEU, 2020). No século 14, a Peste Bubônica, também conhecida como Peste Negra, gerada pela bactéria *Yersinia Pestis* e que podia ser disseminada de animais (como roedores e pulgas) para humanos, assolou a Europa dizimando milhões de pessoas, é estimado que matou um terço dos europeus entre 1334 e 1372. Os médicos que cuidavam dos doentes da peste usavam uma máscara perfumada, veja a Figura 1, com bico semelhante ao de um bico pássaro. Enchiam estas máscaras com composto de ervas e acreditavam que era suficiente uma pessoa respirar um ar com estes aromas e ervas para se proteger da peste, (NATGEO, 2021).

Figura 1 – Máscara usada por médicos durante a Peste Negra, (GALILEU, 2020)

Em 1817, a Colera, disseminada pela bactéria *Vibrio cholerae*, sendo transmitada através do consumo de água e alimentos contaminados, matou centenas de milhares de pessoas e continua até hoje, principalmente em países subdesenvolvidos, através de mutações da bactéria. Em 1918, mais de um quarto da população da época foi infectada por um vírus do tipo influenza e é estimada que tenha morrido entre 40 e 50 milhões de pessoas na pandemia conhecida por Gripe Espanhola. A doença chegou ao Brasil através do navio Demerara, Figura 2, que fez desembarques no Recife, Salvador e Rio de Janeiro. Os sintomas eram muito parecidos com os do Sars-CoV-2 e, na época, não tinha cura, (GALILEU, 2020).

Figura 2 – Navio Demerara, aportou no porto de Recife em 09 de setembro de 1918, (BBC, 2020)

No século 21, a primeira pandemia foi gerada pelo vírus H1N1 que se dá pelo contágio através das vias respiratórias. Este vírus é um tipo de influenza e matou 16 mil pessoas ao redor do mundo, sendo que o primeiro caso de contagiado no Brasil foi registrado em maio de 2009, (GALILEU, 2020). A H1N1 foi, inicialmente, mais intensa nos Estados do Sul e Sudeste, mas se espalhou por todo o Brasil. Em 2009, o Brasil teve, aproximadamente, 60.000 casos da doença com 2.146 óbitos. Após a vacinação, as mortes caíram para 100 em 2010 e a vacinação continua sendo realizada até os dias de hoje, (FIOCRUZ, 2021).

Em 11 de março de 2020, a Organização Mundial da Saúde, OMS, representada pelo seu diretor geral Tedros Adhanom Ghebreyesus, declarou que a dissiminação do SARS-CoV-2, um tipo de corona vírus, Figura 3, alcançou o nível de pandemia, que é quando uma doença se espalha pelo mundo e impacta a sociedade, (OMS, 2020). Neste anuncio, o diretor disse:

> A OMS tem avaliado este surto vinte e quatro horas por dia e estamos preocupados, tanto com os níveis alarmantes de propagação e gravidade, quanto com os níveis alarmantes de inação. Traduzido de (OMS, 2020).

Também, disse que de duas semanas atrás até o dia deste discurso, o número de casos de covid-19 fora da China tinha aumentado em 13 vezes e triplicado o número de países que registraram a doença, chegando, naquele momento, a 114 países. Ainda, que a OMS esperava o crescimento no número de casos, mortes e paíse atingidos e que isso carcteriza a avaliação de ser pandemia, a primeira provocada por um corona vírus. Pediu a todos os países que tomassem medidas urgentes para controlar o espalhamento do vírus.

Muitas perguntas foram feitas em relação ao surgimento do vírus. No artigo da revista *Nature Medicine*, (ANDERSEN et al., 2020), são mostradas algumas caraterísticas essencias do SARS-CoV-2 e discutidos dois cenários em que ele pode ter aparecido. O primeiro cenário é a seleção natural em hospedeiro animal e depois transmitido para os seres humanos. Dada a semelhança do SARS-CoV-2 com o SARS-CoV de morcegos, é possível que os morcegos sirvam de hospedeiros para seu progenitor. Outros animais suspeitos são os Pangolins Malaios, pois possuem corona vírus semelhantes ao SARS-CoV-2. O segundo cenário é que ocorreu uma seleção natural em humanos seguindo de transferência zoonótica entre humanos. Diante de todas as análises realizadas no artigo, os pesquisadores não acreditam que o SARS-CoV-2 seja um vírus manipulado manualmente e criado em laboratório.

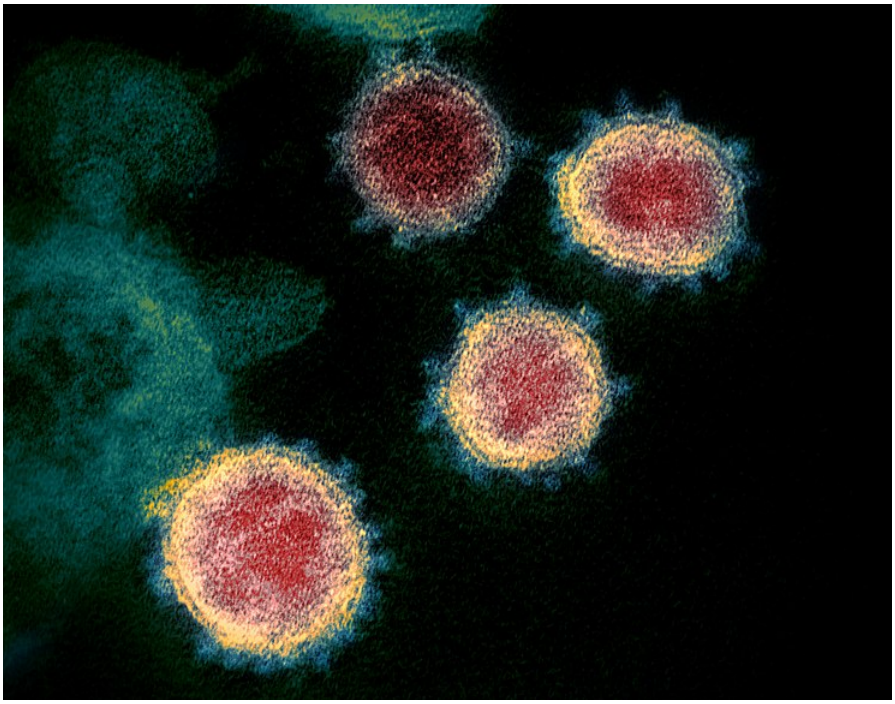

Figura 3 – Imagem microscópica do SARS-CoV-2, vírus que causa a Covid-19 (WIKIPEDIA, 2020)

Em termos gerais, faremos um breve histórico da pandemia gerada pelo corona vírus. No início do mês de dezembro de 2019 foi registrado o primeiro caso de pneumonia em um hospital de Wuan, província de Hubei na China e, logo após foi divulgado o sequenciamento genético deste vírus. A Organização Mundial da Saúde (OMS) divulgou que se tratava de casos de uma "pneumonia desconhecida". Em janeiro de 2020, já havia 44 casos desta "pneumonia desconhecida"relacionada ao mercado de Frutos do Mar de Wuan. Em janeiro de 2020, após o vírus ser identificado, a Organização Mundial da

Saúde emitiu um boletim alertando para o risco moderado de pandemia e o Cômite de Operações de Emergência (COE) foi ativado com o nível 1 de alerta. Cinco dias depois, foi alterado para nível 2 e, imediatamente, a OMS reconheceu o "erro"e elevou o risco para nível "alto". Em 30 de janeiro de 2020, a OMS declarou Emergência de Saúde Pública em âmbito Internacional. No início de feveiro de 2020, o Brasil declarou Emergência de Saúde Pública de Importância Nacional (ESPIN) e o Congresso Nacional aprovou Projeto de Lei sobre quarentena, que foi sancionada pelo Presidente da República. Em 26 de feveiro de 2020 foi confirmado o primeiro caso de corona vírus no Brasil em São Paulo, (SAúDE, 2020). Veja a Figura 4.

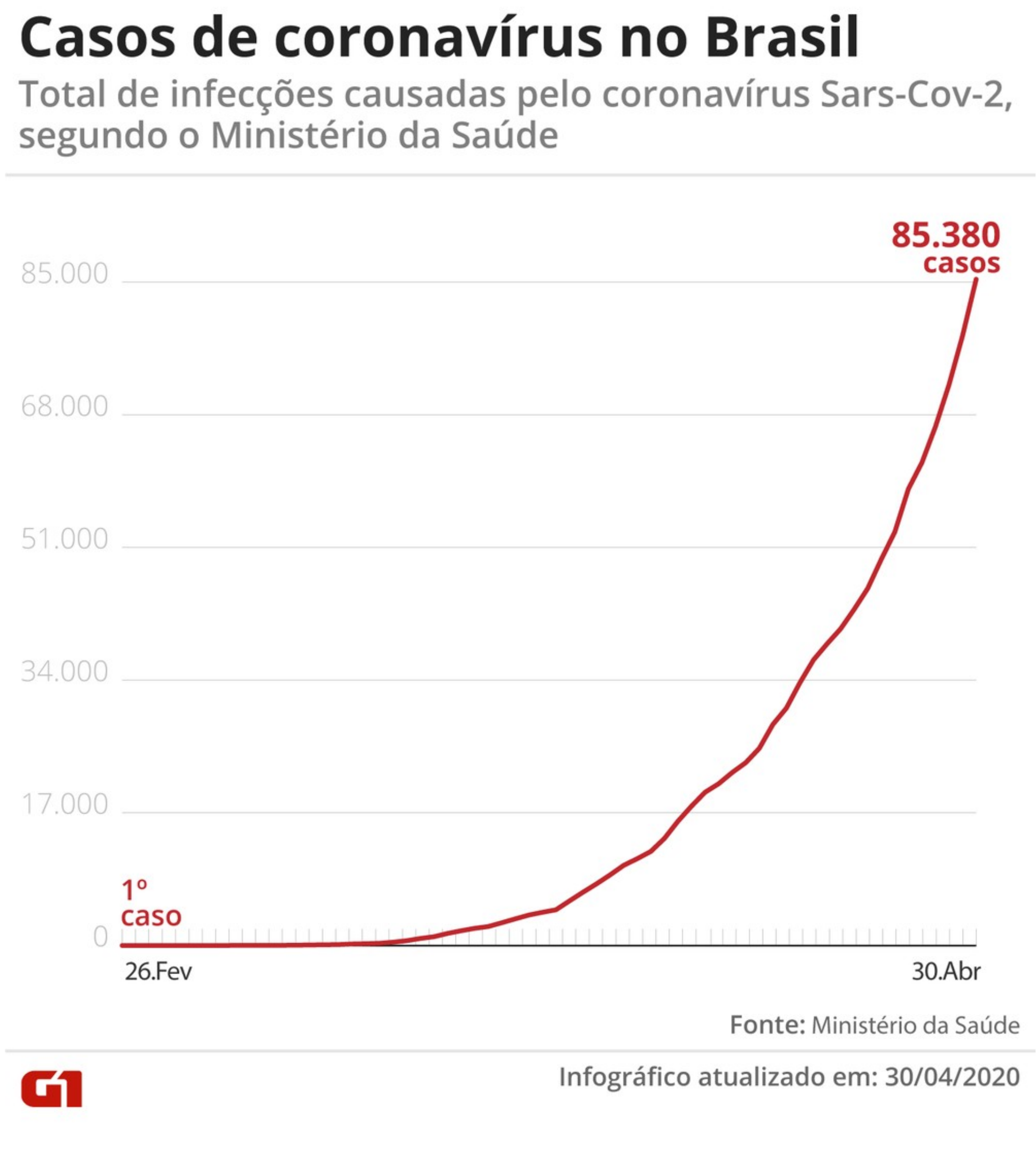

Figura 4 – Casos de corona vírus no Brasil até 30.04.2020 (G1, 2020a)

Na cidade de Rio Grande, estado do Rio Grande do Sul, os primeiros casos foram registrados no mês de abril de 2020, como mostrado nas Figuras 5 e 6.

Figura 5 – Boletim epidemiológico Covid-19 em Rio Grande em 30.04.2020 (GRANDE, 2020a)

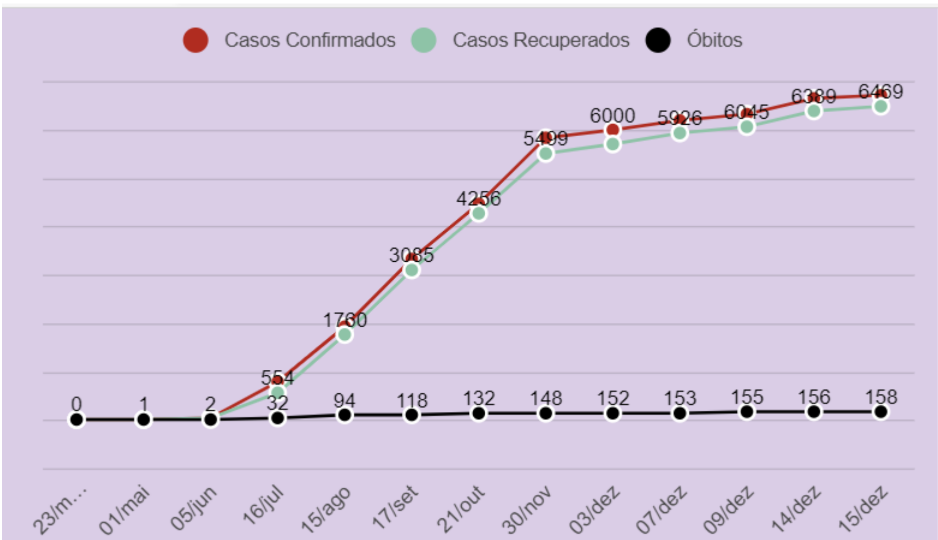

Figura 6 – Gráfico do número de contagiados pelo corona vírus na cidade de Rio Grande até 16.12.2020, (GRANDE, 2020a)

2.2 A matemática e as pandemias

E onde entra a matemática? A matemática procura fazer estimativas, previsões futuras caso o padrao se mantenha. Por exemplo, podemos prever o número de contagiados pelo corona vírus e o número de óbitos num determinado tempo futuro. È importante termos a capacidade de fazer estas previsões para auxiliar, por exemplo, na tomada de decisões para combater o espalhamento do vírus, diminuir a mortalidade e, quem sabe, evitar novos surtos da doença. De acordo com o autor Rodney Bassanezi, página 328, (BASSANEZI, 2002),

> A previsão do crescimento populacional de um país é fundamental para avaliar a sua capacidade de desenvolvimento e estabelecer mecanismos que sustentem uma produção compatível com o bem estar social e, naturalmente, quando maior o grau de precisão exigido nas previsões mais complexo deve ser o modelo matemático, (BASSANEZI, 2002).

Segundo (ZANATA, 2018), a matemática, de forma exata ou aproximada, pode ser definida como uma das ciências que explica fenômenos naturais. Muitos destes fenômenos são compreendidos e previstos através dos conceitos de funções exponenciais e logarítmicas. Estes dois conceitos matemáticos são o alicerce na resolução de alguns problemas específicos. Por exemplo, algumas aplicações que abordam alguns modelos matemáticos onde podem ser encontrados estes conceitos são: crescimento e decrescimento, taxa de variação, terremotos, juros (matemática financeira), doenças, nível de intensidade sonora, tratamentos médicos, entre outros.

Em especial, nesta pandemia gerada pelo corona vírus, frequentemente, ouvimos falar sobre o aumento rápido do número de contagiados, uma enxurrada de informações com alguns conceitos, pouco familiares à população em geral, como "crescimento exponencial", (G1, 2020b; AçORES, 2020; VOL, 2021; VEJA, 2020). Na reportagem realizada em 31/03/2020, (G1, 2020b), um professor de matemática afirma que é possível fazer estas estimativas, pois o número de contagiados em relação ao tempo segue um padrão, denominado função exponencial. Ou seja, temos um número inicial de contagiados e uma taxa de contágio. O número de contagiados do dia seguinte é multiplicado novamente pela taxa de contágio e, assim, sucessivamente no decorrer do tempo.

No entanto, fazendo estes cálculos, podemos alcançar valores exorbitantes, o que não é real numa pandemia. Geralmente, a transmissão do vírus ocorre em um ciclo epidêmico, onde podemos prever a evolução da doença, que ocorre em três momentos. No primeiro momento, no início da pandemia, temos um "crescimento exponencial", que é quando a taxa de contágio é alta, ou seja, é maior que um e muitas pessoas são contaminadas. No segundo momento, ocorre uma estabilização, chamada de platô, quando alcança o pico de casos, pois temos muitos contagiados e a população é finita, sendo assim, o número de contagiados não pode crescer indefinidamente. No terceiro momento, há um decaimento exponencial, pois temos mais recuperados que contagiados, ou seja, o número de pessoas infectadas no dia seguinte é menor que no dia anterior (considerando que neste período não há reinfecção).

Em outras palavras, no início da pandemia, a evolução inicia de forma lenta, mas acelera rapidamente. Esta parte é descrita como crescimento exponencial, veja a Figura 7. Em seguida, a pandemia desacelera, pois boa parte da população já foi contagiada e estalibiza. Este é o momento descrito como crescimento logístico, veja a Figura 8. Depois que muitos membros da população foram infectados, a curva começa a decrescer, momento conhecido como decaimento exponencial, veja a Figura 9. Essa curva do ciclo epidêmico, ou curva epidêmica, toma a forma de um sino ou um "s"e é conhecida como Gaussiana.

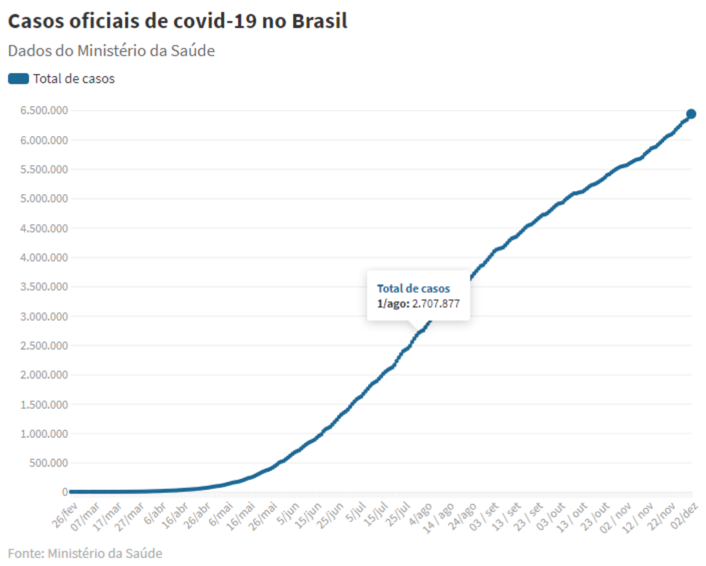

Figura 7 – Primeiro momento, crescimento exponencial, (VOL, 2021)

Observamos ainda que, na Figura 9, os autores (CEZARO; LAZO, 2021) propuseram a iteração, sob certas hipóteses, de n populações distintas e descreveram o espalhamento do corona vírus entre estas populações através de um modelo matemático. Mostraram que o modelo conduz a uma solução (curva) com um platô mais "longo"dependendo do número de populações envolvidas.

As equações de diferenças são uma ferramenta simples mas importantes e que podem ajudar para descrição de alguns ciclos epidêmicos, pois descreve mudanças em cada intervalo de tempo. Vários trabalhos foram realizados sobre equações de diferenças no âmbito do PROFMAT. A autora (NOVAKI, 2017) apresentou os modelos de crescimento exponencial e o crescimento logístico descritos por Malthus e Verhulst, respectivamente, avaliando o crescimento populacional na cidade de Curitiba. O autor (CAPILUPE, 2017) aplicou os conceitos de equações de diferenças em alguns conteúdos do Ensino Médio e apresentou o modelo logístico de Verhulst, com foco no crescimento de células e crescimento tumoral. Já (OLIVEIRA, 2017) aplicou as equações de diferenças na economia

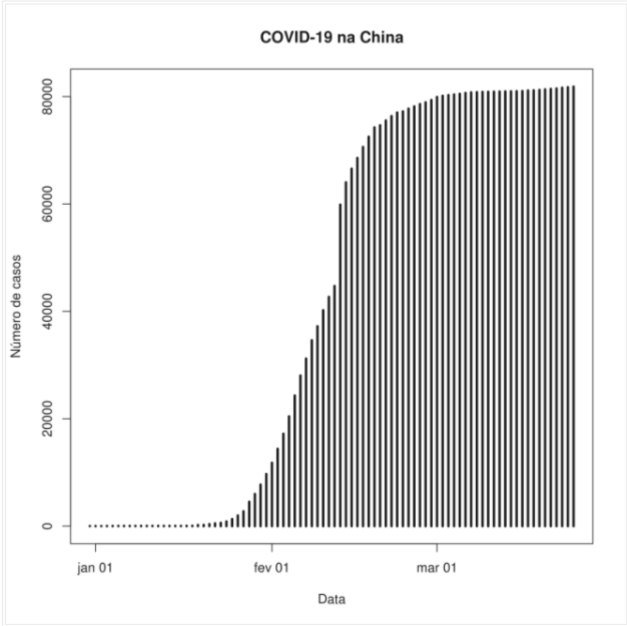

Figura 8 – Crescimento logístico, figura retirada de (DODONOV, 2020)

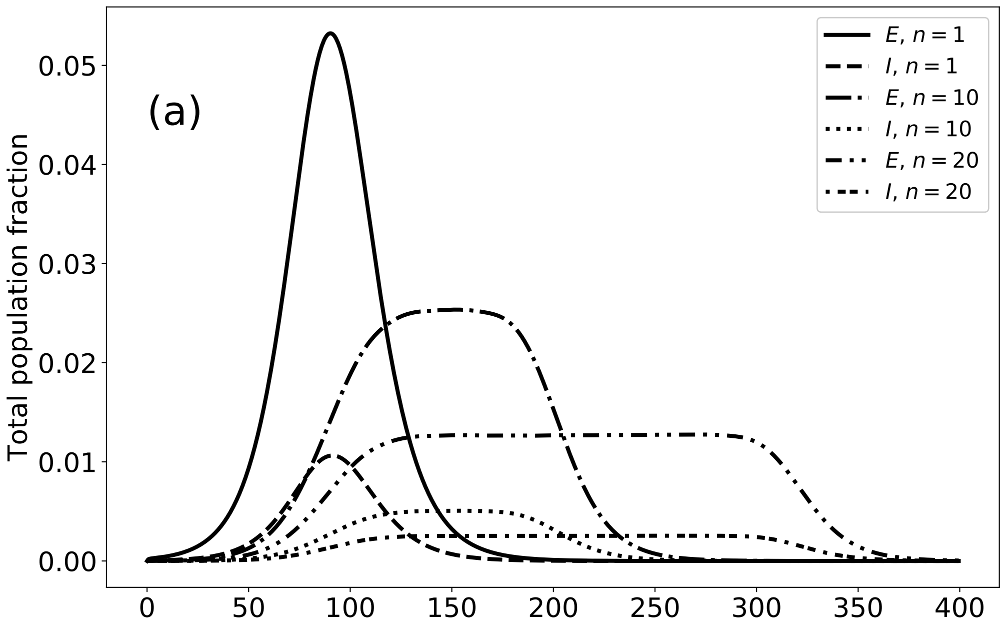

Figura 9 – Ciclo epidêmico em várias populações distintas interagindo entre si, (CEZARO; LAZO, 2021)

para auxiliar no planejamento financeiro familiar como, por exemplo, o uso racional de água e energia elétrica. (MARTINS, 2014) trabalhou com equações de diferenças utilizando planilhas eletrônicas para apresentar a atividade de juros compostos, regiões do plano através de retas, diagonais de um polígono, velocidade, movimento harmônico simples e leis de Newton. São muitos os trabalhos na literatura que envolvem equações de diferenças discretas. Ainda podemos citar (PACHECO, 2013) que mostra a recursividade pode ser aplicada em vários conteúdos da matemática e outras áreas.

3 Fundamentação Matemática

Neste capítulo, serão revisados alguns conceitos de matemática básica que foram utilizados na atividade proposta, descrita no Capítulo 4. Apresentaremos algumas características das principais funções utilizadas neste trabalho.

3.1 Algumas funções elementares

As funções são o elemento-chave para descrever o mundo real em termos matemáticos. Podemos nos referir a uma função não especificada sem ter qualquer fórmula particular em mente. Esta seção foi baseada em (LIMA et al., 2005).

Definição 1. Uma função é um tipo especial de relação entre dois conjuntos. Mais precisamente, sejam A e B conjuntos não vazios. Uma função de A em B é uma relação que a cada elemento de A associa um único elemento de B.

Em geral, escrevemos

$$f : A \longrightarrow B$$
$$y = f(x).$$

Nessa notação, o símbolo f representa a função, x representa a variável independente e y é dita a variável dependente e representa o valor de f em x. O conjunto A de todos os possíveis valores de entrada é chamado de domínio da função. O conjunto B é chamado de contra-domínio.

Definição 2. Seja $f : A \to B$ uma função. O gráfico de f é o conjunto dado por $Graf(f) = \{(x, f(x)); x \in A\}$.

Definição 3. Sejam a função $f : A \to B$ e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, tal que $I \subset A$. Assim, f é dita:

1) **Crescente** em I (respectivamente, estritamente crescente em I) se, para quaisquer $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) \leq f(x_2)$ (respectivamente, $f(x_1) < f(x_2)$).

2) **Decrescente** em I (respectivamente, estritamente decrescente em I) se, para quaisquer $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) \geq f(x_2)$, (respectivamente, $f(x_1) > f(x_2)$).

Em ambos os casos, a função é dita monótona.

Um dos nossos principais interesses, nas funções apresentadas a seguir, esta em algumas características do gráfico, como crescimento ou descrescimento, valores máximos ou mínimos, platôs. O gráfico pode ser visto, empiricamente, como o "retrato"de uma função.

3.1.1 Funções Afins

Definição 4. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de afim quando existem constantes m e b tais que $f(x) = mx + b$, para qualquer x real.

O valor m é chamado de taxa de crescimento da função e, como, $f(0) = b$, o coeficiente b pode ser chamado de valor inicial da função f.

Observamos alguns casos particulares. Se o coeficiente b for igual a zero, $b = 0$, temos que $f(x) = mx$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Estas funções são chamadas de lineares. O gráfico de uma função linear passará na origem $(0, 0)$, pois $f(0) = 0$. São funções associadas a problemas matemáticos que envolvem proporcionalidade.

Se $m = 0$, temos que $f(x) = b$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Estas funções são chamadas de funções constantes. O gráfico da uma função constante é o conjunto de pontos $Graf(f) = \{(x, b); x \in \mathbb{R}\}$ e será uma reta paralela ao eixo das abscissas.

No geral, o gráfico de uma função afim é uma reta. De fato, consideramos $m \neq 0$. Sejam $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ e $R(x_3, y_3)$ pontos genéricos do gráfico de $y = f(x) = mx + b$. Então, temos que $y_1 = mx_1 + b$, $y_2 = mx_2 + b$ e $y_3 = mx_3 + b$.

Observamos a figura

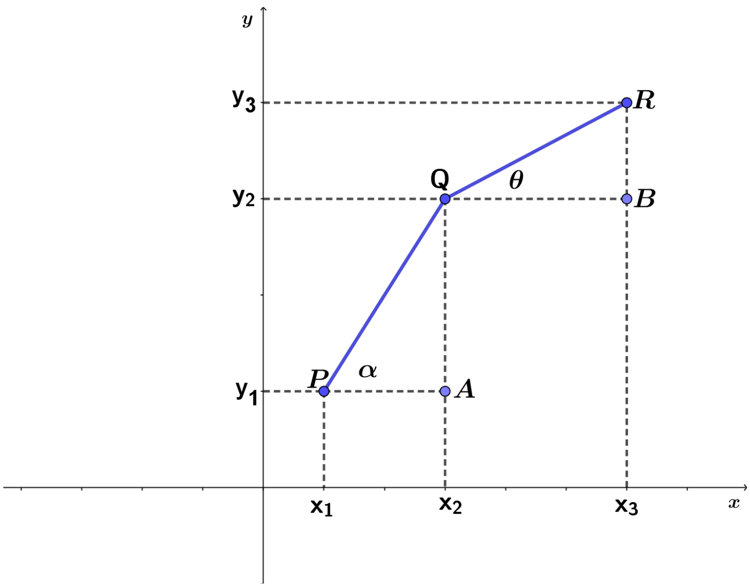

Figura 10 – P, Q e R pontos do gráfico de f

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{mx_2 + b - (mx_1 + b)}{x_2 - x_1} = m.$$

Analogamente, $\dfrac{\overline{BR}}{\overline{BQ}} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \dfrac{mx_3 + b - (mx_2 + b)}{x_3 - x_2} = m.$

Portanto, temos que $\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{BR}}{\overline{BQ}}$. Como os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos retos, segue que os triângulos PAQ e QBR são semelhantes e, assim, os ângulos α e θ são iguais. Concluimos que os pontos P, Q e R estão alinhados. Por serem pontos quaisquer do gráfico, mostramos que a curva do gráfico de uma função afim é uma reta.

Reciprocamente, toda reta não vertical r é o gráfico de uma função afim. Vamos demonstrar esta afirmação. Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ pontos sobre a reta r. Como r é não vertical, $x_1 \neq x_2$.

Afirmamos que por estes dois pontos do plano cartesiano (x_1, y_1) e (x_2, y_2), existe uma única função afim tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Ou seja, queremos encontrar uma função na forma $f(x) = mx + b$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Equivalentemente, isto consiste em resolver o sistema $\begin{cases} mx_1 + b = y_1 \\ mx_2 + b = y_2 \end{cases}$ que possui solução única dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad e \quad b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \tag{3.1}$$

Portanto, o gráfico de $f(x) = mx + b$, com os valores m e b dados por (11), é uma reta que passa pelos pontos P_1 e P_2 e logo esta reta coincide com r.

Uma outra característica importante das funções afins é que se o coeficiente angular é maior que zero, $m > 0$, a função afim é crescente. Sejam x_1 e x_2 números reais tais que $x_1 < x_2$. Então, $f(x_2) - f(x_1) = m(x_2 - x_1) > 0$. Isto implica que $f(x_2) > f(x_1)$ e f é crescente de acordo com a Definição 3. Por outro lado, se o coeficiente angula $m < 0$, a função afim é decrescente. A demonstração deste fato é análoga.

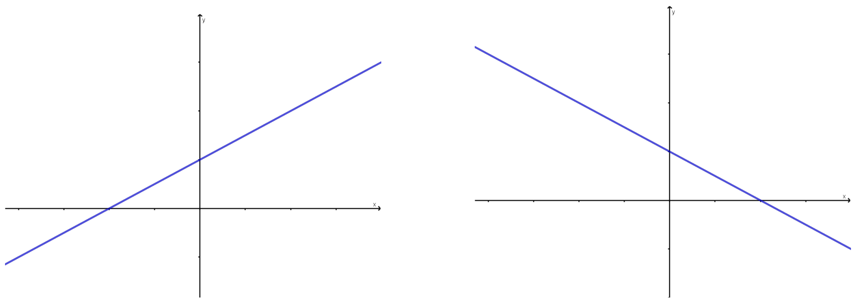

Figura 11 – Gráfico do lado esquerdo de uma função afim crescente e do lado direito, uma função afim decrescente

Outra caracterização importante nas funções afins é observada no acréscimo definido por $f(x+h) - f(x) = mh$, ou seja,o acréscimo depende apenas de h, não depende de x. Podemos ler esta propriedade como acréscimos iguais em x, geram acréscimos iguais em $f(x)$. Esta propriedade e a monotonicidade dizem quando um problema matemático pode ser descrito por uma função afim. Ainda, observamos que no intervalo com extremos x e $x+h$, a taxa de variação neste intervalo, $m = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ é sempre constante.

3.1.2 Funções exponenciais

Elas têm aplicações em vários contextos, como citados na Seção 2.2.

Seja a um número real positivo.

Definição 5. Para $n \in \mathbb{N}$, a potência de base a e expoente n, denotada por a^n, é definida como o produto de n fatores iguais a a.

Por definição, para $n = 1$, temos $a^1 = 1$. Indutivamente, $a^{n+1} = a \cdot a^n$.

Uma importante característica da potência é que para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$,

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \tag{3.2}$$

pois em ambos os membros desta igualdade temos o produto de $m+n$ fatores iguais a a. Da mesma forma, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Ainda, se $a > 1$, então multiplicando ambos os lados desta desigualdade por a^n, segue que

$$a^{n+1} > a^n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

A desigualdade (3.3) diz que a sequência de potências de a, representada por (a^n) é crescente. Ainda, esta sequência não é limitada superiormente, podendo atingir valores muito grandes. Com efeito, seja $C > 0$. Como $a > 1$, escrevemos $a = 1 + d$ e seja $n > \dfrac{C-1}{d}$. Pela desigualdade de Bernoulli, segue que

$$a^n = (1+d)^n > 1 + nd > 1 + \frac{C-1}{d} \cdot d > C.$$

Ainda, com base em (3.3), para quaisquer m e n naturais, se $m < n$, temos

$$a^m < a^n. \tag{3.4}$$

Se $0 < a < 1$, analogamente, multiplicando ambos os lados desta desigualdade por a^n,

$$a^{n+1} < a^n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Esta desigualdade (3.5) diz que a sequência de potências de a, (a^n), é decrescente e limitada inferiormente. Ainda, para quaisquer m e n naturais, se $m < n$, temos

$$a^n < a^m. \tag{3.6}$$

Assim, podemos definir uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, com $f(n) = a^n$, com a propriedade (3.2), ou seja, $f(n + m) = f(n) \cdot f(m)$, para quaisquer m e n naturais. Esta função f, pela desigualdade (3.3), é crescente para $a > 1$ e f é decrescente para $0 < a < 1$, pela desigualdade (3.5).

Vamos estender esta função com domínio nos números inteiros e manter as propriedades citadas acima.

Definição 6. Para $n \in \mathbb{N}$, a potência de base a e expoente n, denotada por a^n, é definida como:

$$a^0 = 1$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Assim, podemos definir $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, com $f(n) = a^n$, sendo válida a propriedade (3.2), ou seja, $f(m + n) = f(m) \cdot f(n)$, para quaisquer m e n inteiros. Para $a > 1$, f é crescente e quando $0 < a < 1$, f é decrescente.

A ideia agora é, novamente, estender esta função com domínio nos números racionais.

Definição 7. Para $r \in \mathbb{Q}$, $r = \dfrac{n}{m}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, a potência de base a e expoente r, denotada por a^r, é definida por:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Assim, defininmos $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, com $f(r) = a^r$, sendo válida a propriedade (3.2), ou seja, $f(r + s) = f(r) \cdot f(s)$, para quaisquer r e s números racionais. Para $a > 1$, f é crescente e quando $0 < a < 1$, f é decrescente.

Observamos que as funções $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$, definidas por $f(r) = a^r$ não são sobrejetivas. Ou seja, para $a > 0$ fixo, nem todo número real positivo é da forma a^r com r racional. Felizmente, potências da forma a^r estão espalhadas por toda a reta real positiva, para $a \neq 1$, como diz o próximo Lema.

Lema 1. Fixado $a > 0$ número real, $a \neq 1$. Em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe uma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.

Demonstração: Sejam α, β números reais com $0 < \alpha < \beta$ devemos achar $r\mathbb{Q}$ tal que $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Suponhamos que $a > 1$ e $\alpha > 1$, os outros casos são demonstrados de maneira análoga. Como as potências crescem acima de qualquer cota pré fixada, podemos obter números naturais M e n tais que

$$\alpha < \beta < a^M \quad e \quad 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n$$

Desta última relação temos que, elevando todos os membros da desigualdade a potência $1/n$,

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}.$$

Somamos o valor -1 em todos os membros da desigualdade acima,

$$0 < (a^{\frac{1}{n}} - 1) < \frac{\beta - \alpha}{a^M}.$$

Como $a^M > 0$, segue que

$$0 < a^M \cdot (a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha.$$

Como $a > 1$, então para $\dfrac{m}{n} \leq M$, temos $a^{\frac{m}{n}} \leq a^M$, segue que

$$0 < a^{\frac{m}{n}} \cdot (a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha,$$

o que é equivalente a $0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} \leq \beta - \alpha$.

Assim, as potências $a^0 = 1, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{1}{n}}, \ldots, a^M$ são extremos de intervalor consecutivos, todos de comprimento menor do que $\beta - \alpha$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um destes extremos está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$, o que prova este Lema.

Vamos definir a função exponencial com domínio nos números inteiros.

Definição 8. Seja $a > 0$ um número real, $a \neq 1$. Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a^x$. Estas funções são chamadas de funções exponenciais de base a.

Temos as seguintes propriedades.

1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, está bem definida e, para quaisquer x e y números reais, temos que $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$. Além disso, f não assume o valor zero e é sempre positiva.

2. $f(1) = a$.

3. Seja $x < y$ em que x e y são números reais. Se $a > 1$, temos que $a^x < a^y$ e se $0 < a < 1$, temos que $a^y < a^x$.

4. f não é limitada superiormente.

5. f é uma função contínua.

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é sobrejetiva.

Vamos demonstrar a propriedade 1), as demais podem ser encontradas em (LIMA et al., 2005). Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem que a propriedade $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ ela não pode assumir o valor zero, visto que ela não a função identicamente nula. De fato, suponha que existe $x_o \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_o) = 0$. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e usando esta propriedade,

$$f(x) = f(x - x_o + x_o) = f(x_o + (x - x_o)) = f(x_o) \cdot f(x - x_o) = 0 \cdot f(x - x_o) = 0.$$

Ou seja, isto implica que $f(x) = 0$, contradição. Logo, $f(x) \neq 0$ para qualquer x número real. Ainda,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0$$

A função f com domínio nos reais está bem definida. De fato, $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$, com $f(r) = a^r$ é a única função tal que que $f(r+s) = f(r) \cdot f(s)$, para qualquer r e s racionais e $f(1) = a$. Ainda, esta função é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Disto resultará que existe uma única maneira de definir a^x quando x é irracional. Com efeito, suponhamos $a > 1$, o outro caso é demonstrado de forma análoga. Seja x um número irracional. Então, $r < x < s$, com $r, s \in \mathbb{Q}$. O número real positivo a^x é o único número real cujas aproximações por falta são a^r, com $r < x$, $r \in \mathbb{Q}$ e cujas aproximações por excesso são a^s, com $x < s$, $s \in \mathbb{Q}$. Não pode existir dois números reais diferentes, digamos $A < B$, com esta propriedade. Supondo que existisse tais A e B, teríamos $r < x < s$, com $r, s \in \mathbb{Q}$ então $a^r < A < B < a^s$ e então o intervalo $[A, B]$ não conteria potências de a com expoente racional e isto contradiz o Lema 1. $\square$

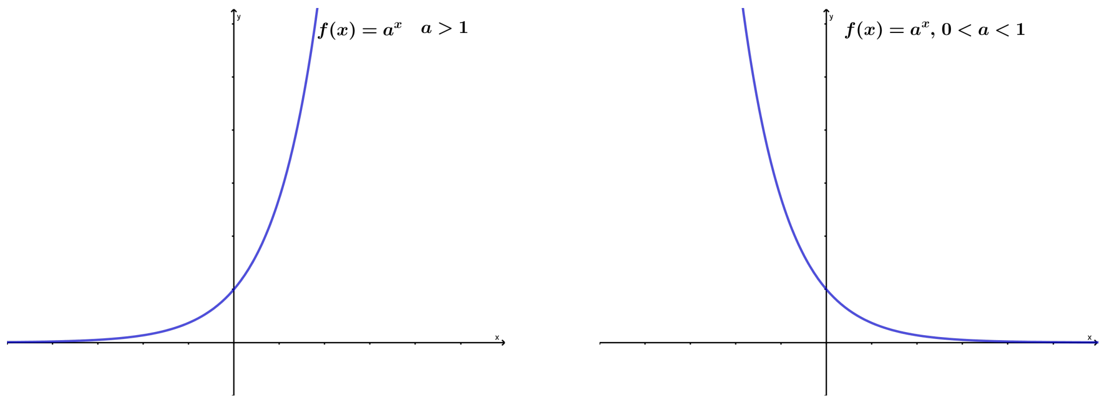

Figura 12 – Gráfico do lado esquerdo de uma função exponencial crescente e do lado direito, uma função exponencial decrescente

A propriedade 3 diz que uma função exponencial é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, veja os gráficos na Figura 12. Ainda, no caso em que $a > 1$, quando x é negativo, mas com valor em módulo muito grande, observamos um crescimento lento. Para valores de x positivos, a função exponencial cresce aceleradamente a medida que x aumenta.

Observamos que como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é injetiva (pois é crescente ou decrescente) e sobrejetiva, então ela é uma função bijetiva com a propriedade adicional de $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Esta última propriedade diz que transformamos a soma num produto. O Teorema abaixo diz que as funções exponenciais são as únicas funções que têm esta propriedade.

Teorema 1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $f(nx) = (f(x))^n$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = a^x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e $f(1) = a$.
3. $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Iniciamos mostrando que a afirmação (1) implica em (2). Suponhamos que é válida a igualdade $f(nx) = (f(x))^n$ para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Seja $x \in \mathbb{R}$. Seja $r \in \mathbb{Q}$ com $r = \dfrac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, usando a hipótese

$$(f(r\,x))^n = f(n\,r\,x) = f(m\,x) = (f(x))^m.$$

Logo, $f(rx) = (f(x))^{\frac{m}{n}} = (f(x))^r$. Assim, se $f(1) = a$, teremos

$$f(r) = f(r \cdot 1) = (f(1))^r = a^r, \;\; r \in \mathbb{Q}.$$

Faremos o caso que f é crescente, o caso em que f é decrescente é análogo. Temos que $1 = f(0) < f(1) = a$. Suponhamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos que $f(x) < a^x$. Então, pelo Lema 1, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, concluímos que $x < r$. Por outro lado, $a^r < a^x$ e a base é maior que um, segue que $r < x$. Contradição. Isto implica que para todo x número real temos que $f(x) = a^x$.

Vamos mostrar que (2) implica em (3). Seja $f(x) = a^x$. Sejam x e y números reais quaisquer. Então, $f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$, pois esta propriedade esta estabelecida para funções exponenciais.

Agora, a afirmação (3) implica em (1). Seja $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Pela hipótese, aplicada n vezes, $f(nx) = f(x + \cdots + x) = f(x) \cdots f(x) = (f(x))^n$, e isto completa a demonstração deste Teorema. $\square$

Definição 9. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de tipo exponencial quando $g(x) = b \cdot a^x$, onde a e b são constantes reais positivas.

Observamos que se $a > 1$, então g é crescente e se $0 < a < 1$, a função g é decrescente.

Temos o seguinte Teorema que caracterização das funções tipo exponenciais.

Teorema 2. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que para x e h números reais, o acréscimo relativo $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ dependa apenas de h, mas não dependa de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = \dfrac{g(1)}{g(0)}$ temos que $g(x) = b \cdot a^x$ para qualquer x número real.

Demonstração. Por hipótese, a função $\varphi(h) = \dfrac{g(x+h)}{g(x)}$ independe do valor de x. Vamos reescalonar definindo $f(x) = \dfrac{g(x)}{b}$ onde $b = g(0)$. Observamos que f é monótona, injetiva e $f(0) = 1$.

Então, $\varphi(h) = \dfrac{f(x+h)}{f(x)}$ continua independendo do valor de x. Assim, para $x = 0$, segue que $\varphi(h) = \dfrac{f(0+h)}{f(0)} = f(h)$ para qualquer $h \in \mathbb{R}$.

Logo, para qualquer $h \in \mathbb{R}$, $f(x+h) = \varphi(h) \cdot f(x) = f(h) \cdot f(x)$. Ou seja, para quaisquer x, y números reais, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Segue do Teorema 1, que $f(x) = a^x$, logo, $g(x) = b \cdot f(x)$, ou seja, $g(x) = b \cdot a^x$. $\square$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = b \cdot a^x$ do tipo exponencial. Seja $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ uma progressão aritmética de razão h, ou seja, $x_{n+1} = x_n + h$. Então, $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots)$ forma uma progressão geométrica de razão a^h, pois

$$f(x_{n+1}) = b \cdot a^{x_{n+1}} = b \cdot a^{x_n+h} = b \cdot a^{x_n} \cdot a^h = (b \cdot a^{x_n}) \cdot a^h = f(x_n) \cdot a^h$$

Como o $(n+1)$-termo de uma progressão aritmética é dada por $x_{n+1} = x_1 + n\,h$, segue que $f(x_{n+1}) = f(x_1) \cdot A^n$, com $A = a^h$.

O Teorema abaixo nos dará uma segunda caracterização das funções tipo exponenciais através das progressões.

Teorema 3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ monótona injetiva que transforma uma progressão aritmética $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ em uma progressão geométrica $(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ com $f(x_n) = y_n$. Se $f(0) = b$ e $a = \dfrac{f(1)}{f(0)}$, teremos que $f(x) = b \cdot a^x$ para qualquer x número real.

Demonstração. Seja $b = f(0) > 0$. Definimos a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ com $g(x) = \dfrac{f(x)}{b}$. Observamos que g é monótona, injetiva, também transforma progressões aritméticas em progressões geométricas e $g(0) = 1$.

Seja $x \in \mathbb{R}$, a sequência $x, 0, -x$ está em progressão aritmética. Logo, $g(x), 1, g(-x)$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x)$. Ainda,

$$g(-x) = \frac{1}{g(x)}. \tag{3.7}$$

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. A sequência $0, x, 2x, \ldots, nx$ é uma progressão aritmética. Então, $1, g(x), g(2x), \ldots, g(nx)$ é uma progressão geométrica com razão $g(x)$. Então, seu $(n+1)$-ésimo termo é dado por

$$g(xn) = (g(x))^n. \tag{3.8}$$

Agora, $-n$ é um inteiro negativo, então, de (3.7) e (3.8), segue que

$$g(-nx) = \frac{1}{g(nx)} = \frac{1}{(g(x))^n} = (g(x))^{-n} \tag{3.9}$$

Portanto, de (3.8) e (3.9), vale que $g(nx) = (g(x))^n$ para $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Do Teorema 1, sendo $a = g(1) = \dfrac{f(1)}{f(0)}$, temos que $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = b \cdot a^x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.
$\square$

3.1.3 Funções Logarítmicas

São funções ligadas a um grande número de aplicações, principalmente onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade existente da mesma naquele instante dado.

Seja a um número real positivo, $a \neq 1$. Como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ com $f(x) = a^x$ é uma bijeção, segue que f possui uma inversa.

Definição 10. A inversa da função exponencial de base a, chamada de função logarítmica, é a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real positivo x, o número real $\log_a x$.

Por definição,

$$a^{\log_a(x)} = x \quad e \quad log_a(a^x) = x.$$

Assim, $\log_a(x)$ é o expoente a qual se deve elevar a base a para obtermoso número x, ou seja,

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x. \tag{3.10}$$

Vamos mostrar algumas propriedades dos logarítmos, que são consequência da definição acima. .

- (a) $\log_a 1 = 0$.
- (b) $\log_a a = 1$.
- (c) $log_a a^k = k$.
- (d) $a^{log_a b} = b$.

- (e) Logarítmo do produto: $log_a(bc) = log_ab + log_ac$.
- (f) Logarítmo do quociente: $log_a\frac{b}{c} = log_ab - log_ac$.
- (g) Logarítmo da potência: $log_ab^k = k \cdot \log_a b$.
- (h) Mudança de base: $log_ab = \dfrac{log_cb}{log_ca}$.

Demonstração. (a) Pela definição, temos que

$$log_a1 = x \iff a^x = 1 \iff a^x = a^0 \iff x = 0.$$

(b) Pela definição, temos que

$$log_aa = x \iff a^x = a \iff a^x = a^1 \iff x = 1.$$

(c) Pela definição temos que

$$log_aa^k = x \iff a^x = a^k \iff x = k.$$

(d) Ainda pela definição, temos

$$a^x = b \iff x = log_ab \implies a^x = a^{log_ab} = b.$$

(e) Sejam $\log_a b = p$, $\log_a c = q$ e $\log_a(bc) = r$. Pela definição temos que $a^p = b$, $a^q = c$ e $a^r = bc$. Assim, $a^r = a^p \cdot a^q$. Pela propriedade da potenciação temos

$$a^r = a^p \cdot a^q = a^{p+q} \iff r = p + q \implies log_a(bc) = r = log_ab + log_ac.$$

(f) Sejam $log_ab = p$, $log_ac = q$ e $log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = r$. Pela definição, temos $a^p = b$, $a^q = c$ e $a^r = \dfrac{b}{c}$. Assim, $a^r = \dfrac{a^p}{a^q}$. Pela potenciação temos que

$$a^r = a^{p-q} \iff r = p - q \implies log_a\left(\frac{b}{c}\right) = r = log_ab - log_ac.$$

(g) Sejam $log_ab = p$, $log_ab^k = q$, com $k \in \mathbb{R}$. Pela definição, temos $a^p = b$ e $a^q = b^k$. Assim $a^q = (a^p)^k$. Da potenciação, temos

$$a^q = a^{pk} \iff q = p \cdot k \implies log_ab^k = pk = k \cdot log_ab.$$

(h) Sejam $log_ab = p$ e $log_cb = q$. Pela definição temos que $a^p = b$ e $c^q = b$, logo $a^p = c^q$.

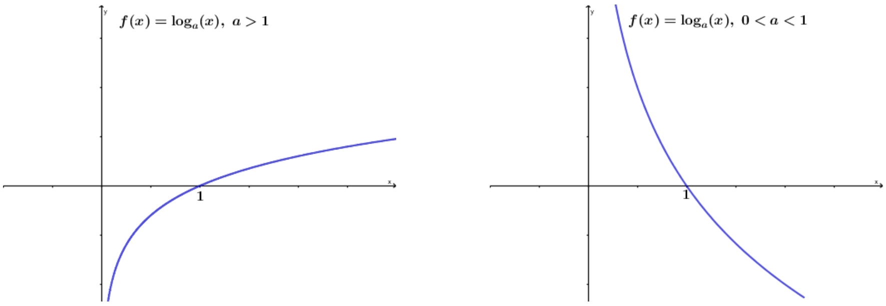

Figura 13 – Gráfico do lado esquerdo de uma função logarítmica crescente e do lado direito, uma função logarítmica decrescente.

Assim, $log_c a^p = log_c c^q$. Por (g) e (b), temos

$$p \cdot log_c a = q \cdot log_c c = q \cdot 1 = q \implies log_a b \cdot log_c a = log_c b \implies log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}.$$

A função $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, veja a Figura 13.

O Teorema abaixo nos da uma característica de quando um problema matemático pode ser modelado por uma função logarítmica.

Teorema 4. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$, para quaisquer x e y números reais. Então, existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a(x)$ para $x \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração. Suponhamos que f seja crescente, o caso decrescente é demonstrado de forma análoga. Temos que

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) = 2f(1),$$

o que implica em $f(1) = 0$.

Inicialmente, suponhamos que exista $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(a) = 1$ (depois, mostraremos que isso sempre acontece, logo não é uma hipótese inicial). Como f é crescente, $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, então $a > 1$.

Seja $m \in \mathbb{N}$, pela hipótese inicial aplicada m vezes,

$$f(a^m) = f(a \cdot a \cdots a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = 1 + 1 + \cdots + 1 = m. \qquad (3.11)$$

Ainda, de (3.11), segue que

$$0 = f(1) = f(a^m \cdot a^{-m}) = f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m}).$$

Então, $f(a^{-m}) = -m$.

Seja $r = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, sendo $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, então $rn = m$,

$$m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = nf(a^r)$$

e, então

$$f(a^r) = \frac{m}{n} = r. \tag{3.12}$$

Seja $x \in \mathbb{I}$, para r e s racionais com $r < x < s$, temos $a^r < a^x < a^s$. Então, como f é crescente, $f(a^r) < f(a^x) < f(a^s)$. Agora, por (3.12), temos que $r < f(a^x) < s$. Ou seja, todo número racional r, menor que x, é também menor que $f(a^x)$ e todo número racional s, maior que x, é também maior que $f(a^x)$, segue que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sendo $y = a^x$, temos que $f(y) = \log_a y$ para todo $y > 0$.

Caso geral em que se tem uma função $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ crescente, com a propriedade $g(xy) = g(x) + g(y)$ e sem mais hipóteses adicionais.

Observamos que $g(1) = 0$ e, como $1 < 2$ e g crescente, $g(2) = b > 0$. Definimos uma nova função

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{g(x)}{b}$$

com a propriedade $f(xy) = f(x) + f(y)$, crescente e $f(2) = 1$.

Logo, da primeira parte da demonstração aplicada a esta função f, temos que $f(x) = \log_2(x)$ para qualquer $x > 0$.

Isto significa que, para qualquer $x > 0$,

$$x = 2^{f(x)} = 2^{\frac{g(x)}{b}} = \left(2^{\frac{1}{b}}\right)^{g(x)} = a^{g(x)}$$

com $a = 2^{1/b}$. Tomando $\log_a$ em ambos os lados da identidade acima, segue que $g(x) = \log_a x$ para $x > 0$. $\square$

3.2 Equações de Diferenças

As equações de diferenças são muito usadas em fenômenos naturais como dinâmicas populacionais ao longo do tempo, em meses, semanas, dias, horas, etc...Não de forma contínua, mas discreta, tentando modelar situações e o comportamento de fenômenos naturais que se aproximam da realidade. Para mais detalhes, ver (OLIVEIRA, 2017).

Definição 11. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real. Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos uma equação de diferenças como

$$Q(n+1) = f(Q(n))$$

em que Q é uma função discreta, ou seja, $Q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Em palavras gerais, uma equação de diferenças é uma fórmula expressando valores de uma quantidade Q em termos de valores prévios de Q.

Surgem duas perguntas, como encontrar as equações de diferenças apropriadas para modelar uma determinada situação proposta e, na sequência, como entender o comportamento deste modelo, se este nos fornece as características procuradas. Ambas as perguntas são difíceis de serem respondidas. Modelamos algo por equação de diferenças observando o que já tem sido feito e, após tentando melhorar e adequar as hipóteses, (ALLMAN; RHODES, 2004). Algumas equações de diferenças possuem fórmulas explícitas e de outras apenas conseguimos desenvolver técnicas para alcançar algumas informações e características do modelo proposto.

Exemplo 1. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$. Considere a condição inicial da equação de diferenças dado por $x(0) = x_0$. Seja $f\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned}
n = 0: &\quad x(1) = f(x(0)) = f(x_0)\\
n = 1: &\quad x(2) = f(x(1)) = f(f(x_0)) = (f \circ f)(x_0) = f^2(x_0)\\
n = 2: &\quad x(3) = f(x(2)) = f(f^2(x_0)) = (f \circ f^2)(x_0) = f^3(x_0)\\
\dots&\\
n = k-1: &\quad x(k) = f(x(k-1)) = f(f^{k-1}(x_0)) = (f \circ f^{k-1})(x_0) = f^k(x_0)
\end{aligned}$$

Portanto, a solução de $x(n+1) = f(x(n))$, é dada por

$$x(n) = f^n(x_0)$$

Exemplo 2. Seja a equação diferencial $x(n+1) = (x(n))^2$, com $x(0) = x_0$. Observamos que $f(x) = x^2$. Então,

$$\begin{aligned}
n = 0: &\quad x(1) = f(x(0)) = f(x_0) = x_0^2 = x_0^2\\
n = 1: &\quad x(2) = f(x(1)) = f(x_0^2) = (x_0^2)^2 = x_0^4\\
n = 2: &\quad x(3) = f(x(2)) = f(x_0^4) = (x_0^4)^2 = x_0^8\\
\dots&\\
n = k-1: &\quad x(k) = f(x(k-1)) = f(x_0^{2^{k-1}}) = x_0^{2^k}
\end{aligned}$$

Logo, a solução é dada por

$$x(n) = x_0^{2^n}.$$

Exemplo 3. Vamos buscar a equação geral de uma progressão geométrica por meio de equações de diferenças. Sabemos que uma (PG) progressão geométrica é uma sequência de números, não nulo, em que cada termo posterior, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um número fixo chamado de razão da progressão. Considerando o primeiro termo como $a_1 \neq 0$ e a razão $q \neq 0$, a progressão geométrica fica definida como:

$$a_{n+1} = q \cdot a_n, \quad com\ n \geq 1.$$

Assim,temos

Para $n \geq 2$,

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_{n-1} \cdot a_n = qa_1 \cdot qa_2 \cdot qa_3 \cdot qa_{n-2} \cdot qa_{n-1}.$$

Usando o cancelamento da multiplicação, escrevemos a equação geral da progressão geométrica como

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \;\; n \geq 1.$$

3.3 Modelos matemáticos

Na literatura, os modelos matemáticos que representam a dinâmica das populações são extremamente importantes. Eles podem apontar mudanças nas populações bem como comportamentos futuros. Perguntamos por que as populações crescem ou declinam ou se há alguma estalibilização. Vamos analisar dois modelos matemáticos discretos que descrevem o comportamento de várias populações. Para derivar estes dois modelos, nos baseamos no livro (ALLMAN; RHODES, 2004).

3.3.1 Modelo Maltusiano Discreto

Para derivar este modelo, uma hipótese aceitável é que, em um certo dia, a população mudará devido a novos nascimentos e óbitos. Denotaremos por f a adição de um certo número múltiplo da população existente, também chamada de taxa de fecundidade, e por d, chamada de taxa de óbito, a fração da população que morrerá Para rastrear a população P, focamos em ΔP, que é a mudança da população em um único dia. Temos que

$$\Delta P = f\,P - d\,P = (f - d)\,P \tag{3.13}$$

ou seja, a equação acima diz que a variação da população é proporcional ao múltiplo de nascimentos menos o múltiplo de óbitos da população num único dia.

Algumas notações são mais simples. Seja $P_t = P(t)$ o tamanho da população medida no dia t. Então, podemos reescrever a equação (3.13) como

$$\Delta P = P_{t+1} - P_t \tag{3.14}$$

que é a diferença ou a mudança na população em dois dias consecutivos.

Substituimos a equação (3.13) na equação (3.14), obtemos que

$$P_{t+1} = P_t + \Delta P = P_t + (f - d)P_t = (1 + f - d)P_t \tag{3.15}$$

Seja $\lambda = 1 + f - d$ na equação (3.15), nosso modelo de crescimento populacional é dado por

$$P_{t+1} = \lambda\, P_t \tag{3.16}$$

em que λ é referenciada na literatura como taxa de crescimento finito da população e a equação (3.15) é conhecida como uma equação de diferenças.

Ainda, se sabemos a população inicial, denotada por P_0, temos que

$$\begin{aligned} P_{t+1} &= \lambda\, P_t \\ P_o &= P_0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

e após iterar t vezes em (3.17), segue que

$$P_t = P_0\, \lambda^t \tag{3.18}$$

ou seja, para este modelo, podemos prever a população em qualquer momento de tempo no futuro. A equação de diferenças (3.18) é as vezes também chamada de exponencial ou geométrica.

O modelo em (3.17) ou (3.18) é conhecido como modelo Maltusiano, pois o modelo resulta em crescimento exponencial (caso $\lambda > 1$) ou decaimento exponencial (caso $0 < \lambda < 1$). Entretanto, observamos que tal previsão, para tempos longos, pode não ser precisa, pois as funções exponenciais crescem rapidamente e sem limites. Com este modelo, cedo ou tarde, teríamos mais organismos do que os átomos do universo.

3.3.2 Modelo Logístico Discreto

Para sermos mais realísticos no nosso modelo, precisamos reexaminar as hipóteses que foram assumidas no modelo Maltusiano. A principal falha é que assumimos que as taxas de fecundidade e morte da nossa população são as mesmas, independentemente do tamanho da população. De fato, quando a população é grande, é razoável esperar uma taxa de mortalidade mais alta e menor taxa de fecundidade, (ALLMAN; RHODES, 2004). Precisamos de alto para modificar o nosso modelo de forma que a taxa de crescimento depende do tamanho da população

Vamos focar na $\dfrac{\Delta P}{P}$ que é a variação na população por indivíduos, ou chamada na literatura de taxa de crescimento per-capita sobre uma simples etapa do tempo. Para pequenos valores de P, a taxa de crescimento per capita deve ser grande, pois imaginamos uma população com muitos recursos disponíveis no ambiente para suportar o seu futuro crescimento. Para grandes valores de P, entretanto, a taxa de crescimento per capita deve ser menor, pois os recursos no ambiente já estão comprometido. É razoável assumir que $\dfrac{\Delta P}{P}$ como uma função de P, como o gráfico da Figura 14.

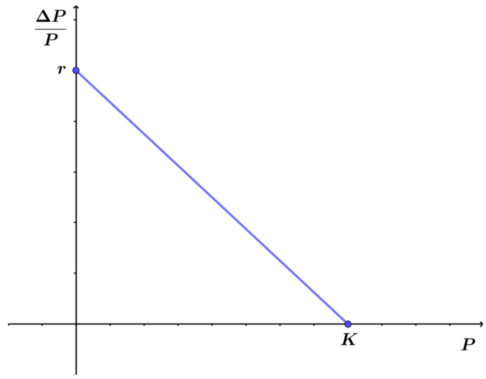

Figura 14 – Taxa de crescimento per-capita como função do tamanho da população

Este pode ser um dos gráficos que representa a ideia de quando a população é pequena a taxa per capita é grande, mas quando a população aumenta, a taxa per capita diminui. Observando o gráfico na Figura 14, um modelo melhorado conduz a fórmula

$$\frac{\Delta P}{P} = m\,P + b$$

para algum $m < 0$ e $b > 0$, ou seja, uma reta decrescente que passa pelo ponto $(K, 0)$ e $(0, r)$, para $K > 0$ é ponto que intercepta a linha horizontal e $r > 0$ o ponto que intercepta a linha vertical. É mais claro escrever isso da forma:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{-r}{K}\,P + r = r\left(1 - \frac{P}{K}\right) \tag{3.19}$$

Como sabemos que $P_{t+1} = P_t + \Delta P$, pela equação (3.19), segue que

$$\begin{aligned} P_{t+1} &= P_t + \Delta P = P_t + P_t\left(r\left(1 - \frac{P_t}{K}\right)\right) \\ &= P_t\left(1 + r\left(1 - \frac{P_t}{K}\right)\right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Este modelo dado em (3.20) é conhecido como modelo logístico discreto.

Os parâmetros K e r no modelo (3.20) têm interpretações diretas. Primeiro, se $P < K$, então temos que $\dfrac{P}{K} < 1$ o que implica que $1 - \dfrac{P}{K} > 0$. Como $\dfrac{\Delta P}{P} = r\left(1 - \dfrac{P}{K}\right)$, segue que a taxa de crescimento per capita é positiva, ou seja, $\dfrac{\Delta P}{P} > 0$, e a população crescerá. Por outro lado, se $P > K$, então $\dfrac{\Delta P}{P} < 0$, a taxa percapita é negativa e a população decrescerá. A constante K é chamada de capacidade de carga do meio ambiente, pois ela representa o número máximo de indíviduos que podem ser suportados sobre um longo período.

Quando a população é pequena, ou seja, P é muito menor que K, o fator $\left(1 - \dfrac{P}{K}\right)$ na taxa per capita deve ser próximo do número um. Para pequenos valores de P, nosso modelo é aproximadamente

$$P_{t+1} \approx (1 + r)\, P_t,$$

em outras palavras, temos um crescimento exponencial para no início. Observamos que r faz o papel de $f - d$, a taxa de fecundidade menos a taxa de mortalidade no modelo Maltusiano.

A equação (3.20) pode resultar em um número não inteiro, mas, mesmo assim, ainda faz sentido. Se a população tem muitos indivíduos, mesmo que o número calculado seja não inteiro, estamos tentando descrever aproximadamente o tamanho da população, podemos tomar a parte inteira e ignorar a parte fracionária sem uma perda significativa.

3.4 Modelo SIR

Exporemos, brevemente, um modelo matemático simples, que pode fazer previsões sobre o futuro de uma epidemia, que é o modelo SIR. Nossa ideia não é deduzir este modelo, mas apenas mostrar algumas de suas características essenciais. Também não vamos apresentar as equações diferenciais ordinárias que representam este modelo, pois fogem ao escopo deste trabalho. Alguns estudos recentes na literatura, inclusive de outros modelos, podem ser encontrados em (GAMMAITONI, 2020; CEZARO; LAZO, 2021; GOMES; ROCHA; MONTEIRO, 2020).

O modelo SIR, também chamado de modelo compartimental, divide a população em três compartimentos: S, I, R, iniciais que dão o nome ao modelo. O compartimento S representa os SUSCETÌVEIS, que são as pessoas saudáveis, sujeitas à infecção do vírus. O segundo compartimento, denotado pela letra I, representa os INFECTADOS, ou seja, o número de pessoas já infectadas. O terceiro compartimento, denotado por R representa os REMOVIDOS. Neste último estão os indivíduos curados, imunizados ou mortos.

Figura 15 – Esquema compartimental do modelo SIR, (GAMMAITONI, 2020).

A passagem de um compartimento para o outro se dá por probabilidades, veja a Figura 15. O parâmetro da passagem do primeiro compartimento (suscetível) para o segundo (infectados) é dado por K. O valor K diz qual a probalidade de uma pessoa saudável ficar infectada e adoecer, num determinado período de tempo. Geralmente, K é dado pelo produto do percentual de pessoas que entram em contato com uma pessoa saudável durante esse tempo, denotado por s, e a probabilidade de transmissão do vírus de pessoa a pessoa, denotada por p. Ou seja, $K = s \cdot p$. Quanto maior o valor de K, mais rápido o vírus se espalhará. A passagem do segundo compartimento (I) para o terceiro (R) também ocorre com uma probabilidade r. A evolução da pandemia é dada pelo número de pessoas em cada um dos compartimentos num determinado tempo e sua soma, $(S + I + R)$, é dada pelo número de indivíduos existentes. Estas três quantidades estão relacionadas por um sistema de equações diferenciais ordinárias ou no sistema de equações na forma discreta dado na página 28 em (SABETI, 2011).

A curva é em formato de sino, que nos dá o número de infectados no decorrer do tempo, veja a Figura 16. Observamos que na parte inicial, há um crescimento rápido de pessoas infectadas que pode ser reproduzido por uma função exponencial. No centro, teremos o pico de contagiados e, por fim, esse número começa a cair até desaparecer por completo. A forma específica da curva depende diretamente dos parâmetros K (probabilidade de adoecer) e r probabilidade de ser removido do grupo de doentes (curados, imunes ou mortos).

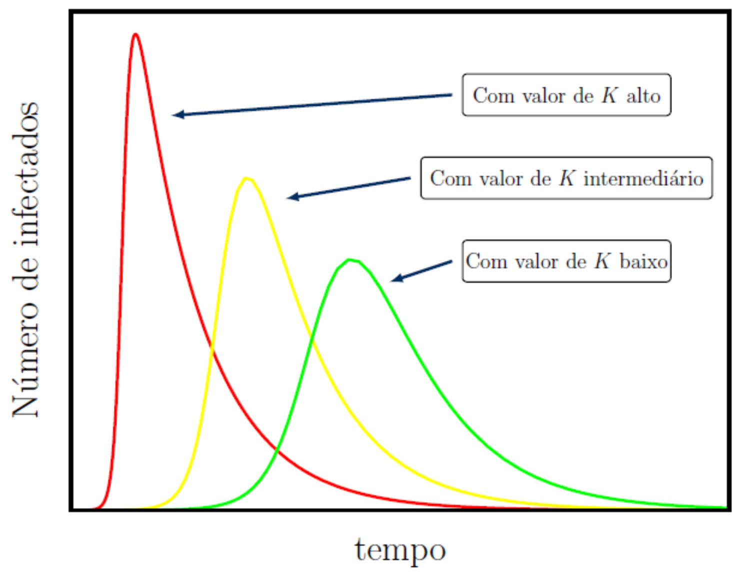

Figura 16 – Curvas do modelo matemático SIR, (GAMMAITONI, 2020).

Importante observarmos que para valores menores de K, a pandemia evolui mais lentamente, empurrando o pico para frente. Isso ajuda, a ganhar tempo, por exemplo, para os governantes criarem protocolos de segurança para o combate ao espalhamento do vírus e aos cientistas para a procura de vacinas eficazes. Para diminuirmos o valor de K, precisamos olhar diretamente para os fatores que ele é composto, ou seja, diminuir a probabilidade de transmissão do vírus, isto é, reduzir s. Isto pode ser feito, por exemplo, reduzindo o contato entre as pessoas. Além disso, devemos reduzir p. Esta redução pode ser feita seguindo os protocolos de segurança, higienização das mãos, uso de álcool em gel, máscaras, etc.

4 Proposta de Atividade

Esta atividade foi adaptada para o ensino presencial de (DESMOS, 2020), mas também pode ser aplicada de forma online (como veremos no próximo Capítulo).

4.1 Plano de atividade

Público Alvo:
Alunos do primeiro ano do Ensino Médio, onde são estudadas as funções afins, exponenciais e logarítmicas.

Pré-requisitos:
O domínio, a imagem e os gráficos das funções afim e exponencial são os pré-requisitos desta atividade.

Duração Prevista:
Aproximadamente noventa minutos, o que equivale a dois períodos consecutivos de aula.

Recursos Necessários:
Papel, lápis, borracha, régua, calculadora, quadro e giz.

Organização da Turma:
A atividade será realizada individualmente.

Atividade Proposta

Segue as etapas da atividade proposta.

Etapa 1:

O professor dará início a atividade apresentação do problema relatando uma breve parte histórica do número de contagiados pelo corona vírus e que a atividade será aplicada a estudar o número de contagiados na cidade de Rio Grande, que possui aproximadamente 210.000 habitantes.

Etapa 2:

Em seguida, o professor fornecerá uma tabela com dois valores reais de contágio na cidade e suas respectivas quinzenas.

Quinzena	Tempo	Número de contagiados
30/04	0	5
15/05	1	12
⋮	⋮	⋮
30/10	12	?

Neste momento o professor solicitará aos alunos que cada faça uma previsão do número de contagiados na última quinzena de outubro, que corresponde ao tempo $t = 12$. É importante o professor veficar se o alunos estimaram valores inteiros, caso contrário, explicará para turma que esses valores representam pessoas contagiadas e deve assumir apenas valores inteiros positivos.

Etapa 3

Usando o eixo X para representar o tempo dado em quinzenas e o eixo Y para representar o número de contagiados, o professor pedirá para que os alunos façam um esboço do gráfico que eles pensam que melhor aproxime os pontos dados no tempo $t = 0$ e $t = 1$ dados na Tabela acima.

Observando os esboços individualmente, o professor fará a pergunta: Qual a função que melhor reprenta o número de contagiados pelo coronavírus na cidade de Rio Grande? O professor pedirá aos alunos que interpretem os números em palavras, explicando o motivo da escolha de tal função. Em seguida, o professor solicitará que alguns alunos, dará preferência aos que tenham gráficos diferentes, façam o esboço de seus gráficos no quadro. Poderão haver respostas de alunos que entendam que a melhor função para aproximar o crescimento do número de contagiados é a função linear e outros que entendam que a melhor função é a exponencial. Poderá haver falta de consenso entre os estudantes, isso é esperado e será discutido no momento da visualização dos gráficos no quadro.

Etapa 4:

O professor fornecerá mais dois valores de contagiados em outras duas quinzenas, correspondentes ao tempo $t = 2$ e $t = 3$, para que os alunos verifiquem o gráfico que melhor representa o crescimento do contágio.

Quinzena	Tempo	Número de contagiados
30/04	0	5
15/05	1	12
30/05	2	33
15/06	3	79

Com estes pontos, o professor esperará que os alunos visualizem o gráfico e concluem que e a função que melhor aproxima o número de contagiados é a exponencial, onde a taxa de crescimento não é constante.

Tendo em vista a conclusão da turma, o professor interferirá e ajudará obter a taxa de crescimento exponencial, usando uma progressão geométrica, onde a razão é dada pelo quociente do termo seguinte pelo anterior. Na sequência $(5, 12, ...)$ a razão será $r = \frac{12}{5} = 2,4$. Com isso obterá a função que representará o número de contagiados é dada por

$$y(t) = 5 \cdot (2,4)^t$$

em que t é um número inteiro positivo e representa o tempo dado em quinzenas e y representa o número de contagiados.

Com a equação, o professor pedirá aos alunos que determinem o número de contagiados em t=5 e, que comparem com a previsão feita por eles em t=12. Caso ache necessário o professor poderá pedir o número de contagiados em outro tempo,e novamente comparem com a previsão. Neste momento questionará a turma se eles mantém ou trocam suas previsões.

Etapa 5

A partir deste momento, com o auxílio de uma calculadora, o professor pedirá que os alunos completem a tabela até a primeira quinzena de novembro ou seja, até $t = 13$, usando a função exponencial. Com isso os alunos perceberão se sua estimativa estava de acordo ou não.

Quinzena	Tempo	Número de contagiados
30/04	0	5
15/05	1	12
30/05	2	29
15/06	3	69
30/06	4	166
15/07	5	398
30/07	6	956
15/08	7	2.293
30/08	8	5.504
15/09	9	13.209
30/09	10	31.702
15/10	11	76.084
30/10	12	180.602
15/11	13	438.244

Surgirão neste momento vários questionamentos, visto que a população de Rio Grande é de 210.000 habitantes e que, na primeira quinzena de novembro, teríamos aproximadamente o dobro da população contagiada. Então, o professor deverá intervir mostrando que a função exponencial é a que mais se aproxima do número de contagiados até determinado tempo. O professor levará os estudantes a concluirem que nem todo crescimento rápido é um crescimento exponencial.

Etapa 6:

O professor apresentará uma outra função que melhor possa representar o número de contagiados, a função logística discreta, dada pela equação:

$$P_{t+1} = P_t \left(1 + r\left(1 - \frac{P_t}{K}\right)\right)$$

Esta curva logística discreta possui um gráfico em formato de "S"comum chamada de sigmóide. O professor explicará que a curva logística iniciará o crescimento de forma exponencial até um certo tempo, depois continuará o crescimento mas com taxa de contágio reduzida e se estabilizará. Explicará também como obter um valor aproximado para r e que K representa a capacidade total do meio, neste caso, $K = 210.000$, o número de aproximado de habitantes da cidade de Rio Grande.

Quinzena	Tempo	Número de contagiados
30/04	0	5
15/05	1	12
30/05	2	31
15/06	3	81
30/06	4	210
15/07	5	546
30/07	6	1417
15/08	7	3669
30/08	8	9436
15/09	9	23855
30/09	10	57687
15/10	11	124632
30/10	12	205696
15/11	13	212441

Etapa 7:

Depois de introduzir a função logística, o professor fará a apresentação do gráfico que contém o número real de contagiados na cidade de Rio Grande.

Quinzena	Tempo	Número de contagiados
30/04	0	5
15/05	1	12
30/05	2	33
15/06	3	79
30/06	4	197
15/07	5	557
30/07	6	1464
15/08	7	1940
30/08	8	2468
15/09	9	3127
30/09	10	3934
15/10	11	4341
30/10	12	4661
15/11	13	......

Na sequência, pedirá aos alunos que comparem este gráfico com o gráfico das funções linear, exponencial e logística, discutidos nas etapas anteriores. Os alunos deverão concluir, entre estas curvas, qual é a melhor que aproxima o número de contagiados.

5 Relato da Aplicação da Atividade

Na noite de 19 de novembro de 2020, a atividade foi aplicada para 5 alunos da disciplina de código 01469 - Números e Funções, turma única, do primeiro semestre do curso de Matemática Licenciatura, na sala online https/conerenciaweb.rnp.br/events/numeros e funções, sob a supervisão da professora Daiane Freitas.

Nesta seção, mostraremos os passos da aplicação. Devido ao tempo de aula online, restringimos os cálculos até o tempo $t = 7$.

1) Introdução

Após as apresentações, foi feito um breve relato sobre a origem e evolução do contágio do corona vírus, onde foi identificado pela primeira vez e como se espalhou pelo mundo.

O foco da atividade foi na cidade de Rio Grande, no Estado Rio Grande do Sul, com aproximadamente 210.000 habitantes, cidade a qual está localizada a Universidade em que curso o PROFMAT.

Breve histórico realizado: "Em dezembro de 2019, foi identificado em Wuhan, na China, o Coronavírus ou Covid 19. Transmitido de pessoa a pessoa, se espalhou pelo mundo em alta velocidade, chegou ao Brasil em fevereiro de 2020. Na cidade de Rio Grande,RS, com aproximadamente 210.000 habitantes,em abril já tinha 5 pessoas contaminadas."

2) Foi apresentada uma tabela com o tempo em quinzenas e dois valores reais do número de contagiados em Rio Grande em suas respectivas quinzenas. Solicitamos aos alunos que estimassem o número de contagiados no tempo $t = 7$, que corresponde à primeira quinzena do mês de agosto. Obtivemos como respostas de valores estimados: 54, 59, 62, 108 e 120.

Quinzena	Tempo	Número de contagiados
30/04	0	5
15/05	1	12
30/05	2	
15/06	3	
30/06	4	
15/07	5	
30/07	6	
15/08	7	?

3) Em seguida, pedimos aos alunos que fizessem o esboço de um gráfico com os pontos dados, veja a Figura 17, usando o eixo X para o tempo em quinzenas e o eixo Y para o número de contagiados.

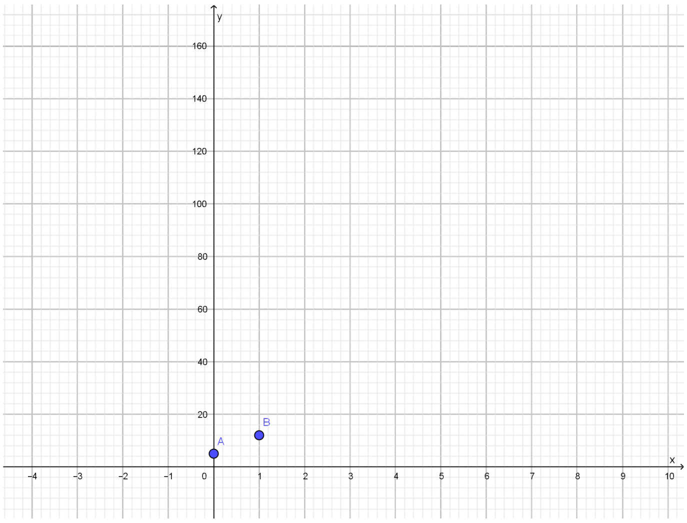

Figura 17 – Dois pontos reais

4) Alguns minutos depois, quando todos já haviam concluído o esboço de seu gráfico, por exemplo o gráfico da Figura 18, foi feita a pergunta: Qual a função que melhor representa este gráfico?

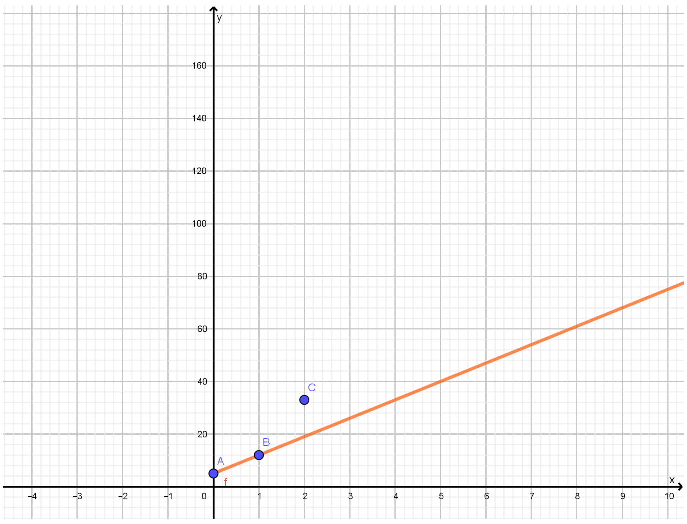

Figura 18 – Reta que passa pelos dois pontos reais

Um aluno somente marcou os dois pontos dados, $(0, 5)$ e $(1, 12)$, mas logo após respondeu que seria uma função afim ou linear. Outro disse ser uma parábola e outro uma reta. Um dos alunos respondeu que precisava de mais pontos para dizer qual seria a função e outro disse ser uma exponencial.

5) Foi neste momento que mostramos para o tempo $t = 2$ o valor de 33 contagiados, como na Figura 19, e questionamos se alguém mudaria sua resposta referente ao tipo de função escolhida anteriormente, pedindo que fosse explicado.

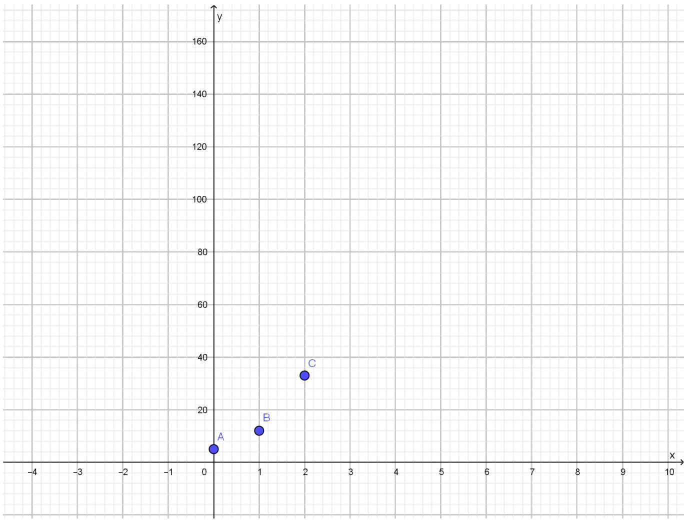

Figura 19 – Três pontos reais

Após ver o ponto $(2, 33)$, um dos alunos manteve seu gráfico, a parábola, argumentando que o ponto não ficou na reta. Dois alunos disseram ser uma função exponencial, pois houve um aumento rápido, de 12 para 33 naquela quinzena. Um aluno não respondeu.

6) Comentando suas respostas, questionamos: O que você entende por crescimento exponencial? Obtivemos duas respostas, um aluno disse "que era um crescimento incontrolável indefinidamente"e outro disse "que tende ao infinito".

7) Na sequência, pedimos então que preenchessem a tabela inicial usando a função exponencial, para podermos comparar mais adiante. Na montagem da função explicamos cada termo, a partir dos valores reais, iniciais, falamos sobre uma progressão geométrica, explicando como calcular a razão, pois um aluno disse não ter estudado no ensino médio. Como a exponencial é um produto de fatores e a razão é dada pelo quociente do do termo subsequente pelo anterior, calculamos $r = \frac{12}{5} = 2,4$.

Retomamos a atividade com a função exponencial obtida

$$y(t) = 5 \cdot (2,4)^t.$$

Os alunos completaram a tabela, tempo a tempo. Um aluno errou um cálculo, corrigindo logo em seguida. Discutimos o arredondamento do número de contagiados, uma vez que estamos tratando de pessoas. Todos os alunos presentes participaram do preenchimento da tabela. Um aluno deixou a sala, talvez por problemas na conexão de internet. Após todos terminarem de preencher a tabela com os valores inteiros, nos tempos de 1 até 7, apresentamos o gráfico desta função exponencial, veja a Figura 20.

Quinzena	Tempo (t)	Contagiados $5 \cdot (2,4)^t$
30/04	0	5
15/05	1	12
30/05	2	29
15/06	3	69
30/06	4	166
15/07	5	398
30/07	6	956
15/08	7	2.293

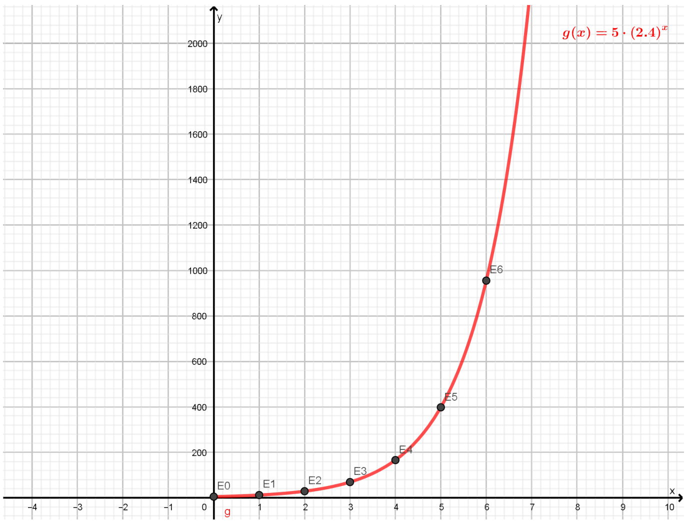

Figura 20 – Função exponecial discreta

8) Neste momento questionamos se alguém havia acertado a estimativa? Todos responderam que NÃO, visto que o valor calculado pela função exponencial foi de 2.293 e o menor e o maior valor estimados por eles ,respectivamente, era de 54 e 120. Houve um aluno que ainda disse: "BEM LONGE".

9) Continuando, foi perguntado se haveria outro tipo de função que melhor representasse o número de contagiados pelo corona vírus na cidade de Rio Grande em função do tempo e qual seria esta função. Depois de um pequeno período de silêncio, um aluno insistiu na parábola e outro manteve a função exponencial. Argumentamos que tanto a parábola como a exponencial eram ilimitadas, o que não poderia acontecer numa situação em que a população é finita. Neste momento foi apresentado a eles a função logística, explicando cada termo da sua fórmula, onde o número de contagiados P_{t+1}, depende do número de contagiados do tempo anterior P_t e r que é a média dos razões calculadas de dois em dois tempos dos valores reais, e do k, total da população estudada que é 210.000 habitantes. Sendo assim, a função logística discreta é limitada, pois não ultrapassa o total

da população estudada.

$$P_{t+1} = P_t \cdot \left(1 + r \cdot \left(1 - \frac{P_t}{k}\right)\right)$$

Na sequência, apresentamos a tabela com o número de contagiados calculados pela função logística discreta e seu respectivo gráfico, veja a Figura 21. Mostramos que assim como a exponencial, o número de contagiados pelo corona vírus se aproxima dos valores reais, com certa margem de erro, até determinado tempo.

Quinzena	Tempo - (t)	Contagiados - P_{t+1}
30/04	0	5
15/05	1	12
30/05	2	31
15/06	3	81
30/06	4	210
15/07	5	546
30/07	6	1.417
15/08	7	3.669
....	....	....
....	....	210.000

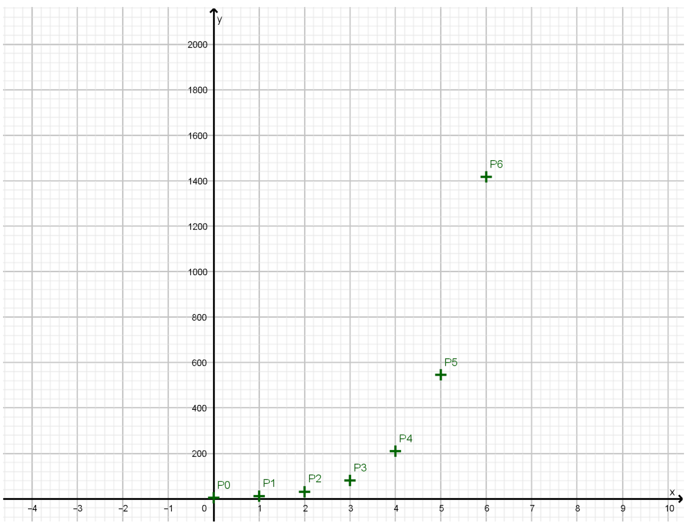

Figura 21 – Função logística discreta

10) Seguindo a aplicação da atividade, mostramos a tabela e o gráfico com os valores reais do número de contagiados na cidade de Rio Grande, veja a Figura 22. Comentamos que pode não condizer com a realidade, uma vez que os dados reais podem ser subestimados, pois pode não ter sido feita uma testagem adequada, podendo haver mais pessoas contagiadas.

Quinzena	Tempo	Número Real de Contagiados
30/04	0	5
15/05	1	12
30/05	2	33
15/06	3	79
30/06	4	197
15/07	5	557
30/07	6	1.464
15/08	7	1.940

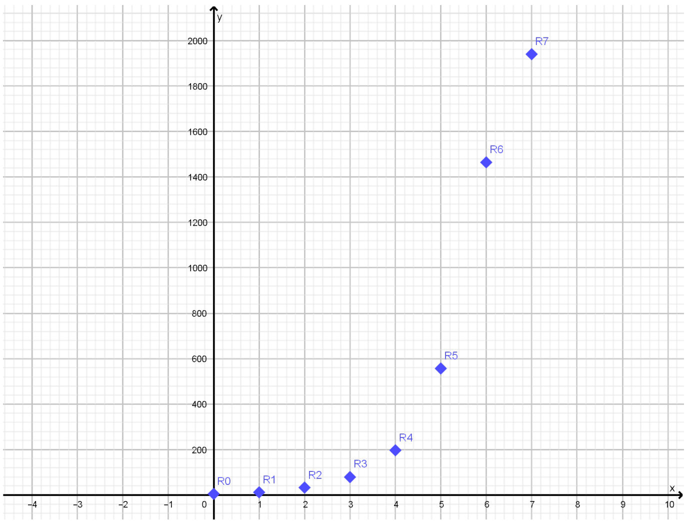

Figura 22 – Dados reais

11) Comparamos as três tabelas, exponencial, logística e a real e comentamos sobre as aproximações no gráfico, veja a Figura 23. Colocamos que a função exponencial e a função logística se aproximam da realidade até certo tempo, visto que a exponencial tem crescimento ilimitado, ultrapassando a população existente e a logística cresce até atingir a totalidade da população. Teríamos neste momento a chamada imunidade de rebanho e, logo após, um decrescimento do número de contagiados. Ainda, os valores reais fornecidos nem sempre mostram a realidade. Comentamos sobre a primeira quinzena de junho, em que na função exponencial, tínhamos 69 contagiados e na logística 81 contagiados e o número real de contagiados nesta quinzena é de 79. Porém, na última quinzena de julho, a exponencial, havia 956 contagiados,na função logística 1.417 contagiados enquanto o número real de contagiados da quinzena é de 1.464. Notamos neste momento que a função logística era a que mais se aproximava da realidade até determinado tempo. Foi então aberto um momento para novos questionamentos e comentários sobre a atividade. A turma não questionou, mas um aluno fez o comentário: "LEGAL".

Agradecemos a participação dos quatro alunos que permaneceram até o final da aplicação da atividade e a oportunidade que foi dada pela professora Daiane Freitas.

Tempo	C. exponencial	C. logística	C. real
0	5	5	5
1	12	12	12
2	29	31	33
3	69	81	79
4	166	210	197
5	398	546	557
6	956	1.417	1.464
7	2.293	3.669	1.940
...	...	...	....
?	?	210.000	....

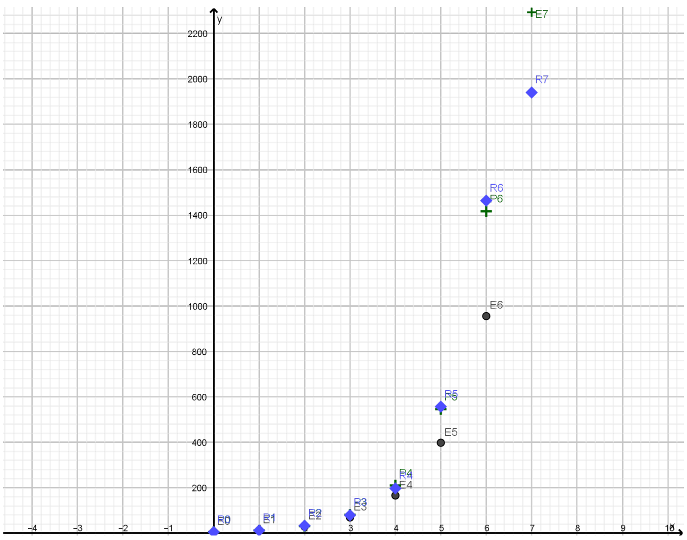

Figura 23 – Dados reais comparados com as aproximações da exponencial e da logística

12) Comentários finais: Apesar de ter ministrado minha primeira aula no modo remoto, onde senti muito a necessidade do contato físico e visual dos alunos, pois todos estavam de camêra desligada, achei satisfatória a aplicação da atividade. Gostaria que houvesse mais participantes, o que deixaria a aula mais rica de idéias e respostas.

Mas a maioria desse pequeno grupo presente, participou dos questionamentos através do chat, também algo novo para mim. Porém, no final quando abrimos para comentários e questionamentos sobre a aplicação, não houve uma participação efetiva. Uma vez que a pandemia estava assustando não só o Brasil mas o mundo, esperava vários comentários e quetionamentos.

Obtive um "LEGAL"que valeu muito.

6 Considerações finais

Nesse trabaho foram estudadas taxas de crescimento e decrescimento, bem como foi verificada qual a melhor taxa que fornece o número de contagiados num determinado espaço de tempo, nesse caso, trabalhando com os dados de contaminados pelo coronavírus na cidade de Rio Grande. Ainda, comparou-se as curvas das funções afim, exponencial e logística com intenção de verificar qual delas está mais próxima do número real de pessoas contagiadas.

Os achados desse estudo permitiram constatar que nenhuma das curvas representa perfeitamente a curva de crescimento do número de casos de coronavírus. Todavia, identificou-se que a curva da função logística mostrou-se mais fiel à realidade do contágio até determinado tempo, ou seja, embora não descreva perfeitamente, ela parece ser a melhor explicação.

Referências

ALLMAN, E.; RHODES, J. *Mathematical models in Biology: an introduction*. New York: Cambridge University Press, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 34, 35 e 36.

ANDERSEN, K. G. et al. The proximal origin of sars-cov-2. *Nature Medicine*, v. 26, n. 1, p. 450–455, 2020. Citado na página 14.

AçORES, C. dos. *Crescimento exponencial vs crescimento logístico*. 2020. Disponível em: <http://correiodosacores.pt/NewsDetail/ArtMID/383/ArticleID/21262/Crescimento-exponencial-vs-crescimento-log237stico>. Acesso em: 28.04.2021. Citado na página 17.

BASSANEZI, R. *Ensino - aprendizagem com Modelagem matemática*. Campinas: Editora Contexto, 2002. Citado na página 17.

BBC. *Gripe espanhola: a viagem em que o 'navio da morte' Demerara venceu bombardeios alemães e trouxe a doença ao Brasil*. Público, 2020. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/internacional-54907997>. Acesso em: 25.04.2021. Citado na página 13.

BNCC. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018. 600 p. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Citado na página 10.

BRASIL, G. *Ministério da Saúde*. 2020. Disponível em: <https:www.saude.gov.br>. Acesso em: 21.09.2020. Citado na página 8.

CAPILUPE, A. R. *Equações de diferenças: aplicações em conteúdos do ensino médio e em modelos populacionais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São João Del Rei, abril 2017. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=07381835630&d=20210427154837&h=41fcc9f01d1257dc7a3ef09272f282e6c7c22495>. Acesso em: 27.04.2021. Citado na página 18.

CEZARO, A. D.; LAZO, M. Why can we observe a plateau even in an out of control epidemic outbreak? a seir model with the interaction of n distinct populations for covid-19 in brazil. *Trends in Computational and Applied Mathematics*, v. 22, n. 1, p. 109–123, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 18, 19 e 38.

DESMOS. *Mocha Modeling: Starbucks Locations*. 2020. Disponível em: <https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/564d37a2895eb8280b0bfe0d>. Acesso em: 13.10.2020. Citado na página 41.

DODONOV, P. *Mais Um Blog de Ecologia e Estatística*. 2020. Disponível em: <https://anotherecoblog.wordpress.com/2020/03/26/covid-19-crescimento-exponencial-e-crescimento-logistico/>. Acesso em: 13.10.2020. Citado na página 19.

FIOCRUZ. *Combate à epidemia de H1N1: um histórico de sucesso*. 2021. Disponível em: <https://cee.fiocruz.br/?q=node/1314>. Acesso em: 28.04.2021. Citado na página 13.

G1. *Brasil tem 5.901 mortes e 85.380 casos confirmados por coronavírus*. 2020. Disponível em: <https://g1.globo.com/bemestar/coronavirus/noticia/2020/04/30/brasil-tem-5901-mortes-por-coronavirus.ghtml>. Acesso em: 25.05.2021. Citado na página 15.

G1. *Crescimento exponencial e curva epidêmica: entenda os principais conceitos matemáticos que explicam a pandemia de coronavírus*. 2020. Disponível em: <https://g1.globo.com/bemestar/coronavirus/noticia/2020/03/31/crescimento-exponencial-e-curva-epidemica-entenda-os-principais-conceitos-matematicos-que-explica
ghtml>. Acesso em: 23.03.2021. Citado na página 17.

GALILEU, R. *Conheça as 5 maiores pandemias da história*. Público, 2020. Disponível em: <https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/Saude/noticia/2020/03/conheca-5-maiores-pandemias-da-historia.html>. Acesso em: 25.04.2021. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

GAMMAITONI, L. Prevendo o futuro da epidemia. *L'Osservatore*, v. 1, n. 1, p. 1–3, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.

GOMES, S.; ROCHA, C. R.; MONTEIRO, I. *Modelagem dinâmica aplicada à COVID*. Rio Grande: FURG, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 38.

GRANDE, P. de R. *Cenário Covid-19 em Rio Grande*. Público, 2020. Disponível em: <https://www.riogrande.rs.gov.br/pagina/cenario-covid>. Acesso em: 16.12.2020. Citado na página 16.

GRANDE, P. de R. *Secretária Municipal da Saúde*. 2020. Disponível em: <http://www.riogrande.rs.gov.br>. Acesso em: 21.09.2020. Citado na página 8.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio, volume 1*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 27.

MARTINS, T. E. *Equações de recorrência na Educação Básica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande, julho 2014. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=01077844085&d=20210427161225&h=4efa7e35cb0d6a1f9c527de97af05b996660338a>. Acesso em: 27.04.2021. Citado na página 19.

NATGEO. *Os Médicos da Peste Usavam Máscaras com Bicos Estranhos – Porquê?* Público, 2021. Disponível em: <https://www.natgeo.pt/historia/2020/03/os-medicos-da-peste-usavam-mascaras-com-bicos-estranhos-porque>. Acesso em: 25.04.2021. Citado na página 12.

NOVAKI, C. *Equação de diferenças na projeção de populações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Tecnológica do Paraná, janeiro 2017. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=03605813909&d=20210427150458&h=ec1c8f6c5b4ce48333058a497adbd642a80d8a03>. Acesso em: 27.04.2021. Citado na página 18.

OLIVEIRA, I. P. de. *Equações de recorrência: uma análise e proposta para o orçamento familiar*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Tecnológica do Paraná, setembro 2017. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=40632424800&d=20210427160503&h=8c3b2d72040f2ce8c7554f0b80e16eae4db3d4bd>. Acesso em: 27.04.2021. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 33.

OMS. *WHO Director-General's opening remarks at the media briefing on COVID-19*. 2020. Disponível em: <https://www.who.int/director-general/speeches/detail/who-director-general-s-opening-remarks-at-the-media-briefing-on-covid-19---11-march-2020>. Acesso em: 24.05.2021. Citado na página 13.

PACHECO, A. M. *Modelagem matemática no ensino de equações de recorrência*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Mato Grosso, abril 2013. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=00633213942&d=20210427161843&h=4b1cb3177015c4c2465cdaea705c0f9ae411cffb>. Acesso em: 27.04.2021. Citado na página 20.

RS, G. *Secretária do Estado do Rio Grande do Sul*. 2020. Disponível em: <https:www.sauders.gov.br>. Acesso em: 21.09.2020. Citado na página 8.

SABETI, M. *Discrete epidemic study SIR with age structure and application of pulse and constant vaccination*. Recife: Tese de Doutorado, UFPE, 2011. Citado na página 39.

SAúDE, M. da. *Linha do tempo*. 2020. Disponível em: <https://coronavirus.saude.gov.br/linha-do-tempo/#fev2020>. Acesso em: 25.04.2021. Citado na página 15.

TAKAHASHI, R. *No Blog de O Globo, a história da epidemiologia matemática*. 2020. Disponível em: <https://impa.br/noticias/no-jornal-o-globo-a-historia-da-epidemiologia-matematica/>. Acesso em: 08.06.2021. Citado na página 8.

VEJA. *A matemática para conter o avanço explosivo do novo corona vírus*. 2020. Disponível em: <https://saude.abril.com.br/medicina/a-matematica-para-conter-o-avanco-explosivo-do-novo-coronavirus/>. Acesso em: 25.05.2021. Citado na página 17.

VOL. *O que é uma curva exponencial de uma pandemia?* 2021. Disponível em: <https://vestibular.uol.com.br/resumo-das-disciplinas/atualidades/o-que-e-curva-exponencial-de-uma-pandemia---entenda-o-ritmo-do-crescimento-das-infeccoes-do-co htm>. Acesso em: 13.04.2021. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

WIKIPEDIA. *Coronavírus da síndrome respiratória aguda grave 2*. 2020. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/CoronavC3ADrus_da_sC3ADndrome_respiratC3B3ria_aguda_grave_2>. Acesso em: 24.05.2021. Citado na página 14.

ZANATA, A. *Modelagem matemática com exponencial e logarítmo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Mato Grosso, abril 2018. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=02965923152&d=20210427152855&h=f64dc10356686e930fd0bb8ad4bb808d0b6ac6e0>. Acesso em: 27.04.2021. Citado na página 17.