FURG

Jornal O Matemático

IMEF
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

Jornal O Matemático, Rio Grande, RS, ***Edição Extra – A Matemática nas Finanças,*** *outubro de 2017.*

EDITORIAL

Caro Leitor!

Esta ***Edição Extra- A Matemática nas Finanças*** é uma forma de mostrar como a Matemática pode nos ajudar a decidir como usar o nosso dinheiro, de forma mais consciente e racional.

Vamos mostrar a Matemática aplicada ao mundo real mostrando situações-problemas versando sobre juros simples e compostos, taxas equivalentes, série de pagamentos iguas e em particular o pagamento de uma fatura de cartão de crédito.

Alessandro da Silva Saadi
MATEMÁTICO – FURG

Apoio:

Educação
Ministério da Educação

PROEXC
FURG
Pró-Reitoria de Extensão e Cultura

Educação Financeira no Brasil

A Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF, instituída pelo Decreto nº 7.397, de 22 de dezembro de 2010, tem a finalidade de promover a educação financeira e previdenciária e contribuir para o fortalecimento da cidadania, a eficiência e solidez do sistema financeiro nacional e a tomada de decisões conscientes por parte dos consumidores.

A ENEF foi instituída como proposta de política de Estado, de caráter permanente, com necessidade de ação conjunta, pública e privada, por meio de gestão centralizada e execução descentralizada. De acordo com o Art.2º do seu decreto, tem como diretrizes:

I – atuação permanente e em âmbito nacional;

II – gratuidade das ações de educação financeira;

III – prevalência do interesse público;

IV – atuação por meio de informação, formação e orientação;

V- centralização da gestão e descentralização da execução das atividades;

VI – formação de parcerias com órgãos e entidades públicas e instituições privadas;

VII – avaliação e revisão periódicas permanentes.

> **"A educação financeira sempre foi importante para auxiliar as pessoas a planejar e gerir sua renda, poupar, investir e garantir uma vida financeira mais tranquila. Nos últimos anos, sua relevância cresce em decorrência do desenvolvimento dos mercados financeiros e da inclusão bancária, bem como das mudanças demográficas, econômicas e políticas."**
>
> **Plano Diretor**
> **ENEF, 2010**

Relevante para diversos públicos, a Educação Financeira é uma causa transversal sob os pontos de vista organizacional, temático e setorial. Muitas organizações já estão contribuindo com ações educativas e sociais visando promover no brasileiro a capacidade de tomar decisões financeiras conscientes para sua vida e para a economia do país.

Para conhecer mais da Estratégia Nacional de Educação Financeira, acesse: www.vidaedinheiro.gov.br.

PROPESP
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS GRADUAÇÃO

Situação-problema: Joãozinho e o seu cartão FiadoCard

Conforme o artigo de Pacievitch (2008), o cartão de crédito tal como conhecemos foi criado nos Estados Unidos, em 1950. Porém, ainda na década de 20, a ideia de dar crédito aos clientes fieis já era colocada em prática por hotéis, postos de gasolina e outros tipos de comércio. No Brasil, o cartão de crédito chegou em 1954, com a Diners Club e foi durante a década de 1990 que os bancos brasileiros puderam emitir seus próprios cartões, diminuindo os custos para seus clientes. Mas a popularização ocorreu entre 2000 e 2006, quando o número de transações saltou de 0,9 para 3,6 bilhões, e o valor transacionado, de R$ 59 bilhões para R$ 221 bilhões.

Na figura: cartões de crédito

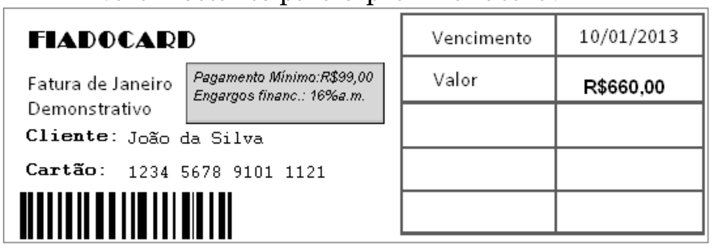
SITUAÇÃO-PROBLEMA:

Joãozinho é um trabalhador brasileiro que como tantos outros está emergindo. Arranjou um emprego, abriu uma conta no Banco do Povo e já conseguiu o seu primeiro cartão de crédito, o ***FiadoCard.*** Jota, apelido de Joãozinho, tem 23 anos de idade e trabalha no Polo Naval. Todo dia 5, é efetuado o pagamento salarial e para janeiro seu salário bruto é de R$ 2.100,00 onde é descontado o INSS (contribuição previdenciária) no percentual de 11% e 1% para o plano de saúde e para fevereiro ele terá um aumento percentual de 20% em seu salário. Em janeiro, Joãozinho tem várias contas a pagar:

- ✔ **Luz**: vencimento em 5 de janeiro, valor de R$ 57,50. Pagamento em atraso tem multa de 2% e juros simples de 4,5% ao mês.
- ✔ **Água**: vencimento em 15 de janeiro, valor de R$ 61,90. Pagamento em atraso tem juros simples de 6% ao mês.
- ✔ **Telefone fixo**: vencimento em 7 de janeiro, valor de R$ 55,00. Pagamento em atraso tem juro de R$ 0,22 ao dia.
- ✔ **Aluguel**: vencimento em 10 de janeiro, valor de R$ 450,00. Pagamento em atraso tem cobrança de juros simples de 10% ao mês.

Na figura: contas a pagar

- ✔ **Alimentação:** valor reservado: R$ 390,00.
- ✔ **Lazer**: valor reservado: R$ 150,00.
- ✔ **Prestação da moto**: vencimento em 15 de janeiro, valor de R$ 92,60. Pagamento em atraso tem multa de 2% e juros simples de 6% ao mês.
- ✔ **Combustível para sua moto**: valor reservado: R$ 45,00.
- ✔ **Possível assinatura de uma revista de motos**: R$ 18,00.
- ✔ **Fatura do cartão de crédito**: vencimento em 10 de janeiro, valor de R$ 660,00. Pagamento mínimo: R$ 99,00 e juro de 16% ao mês sobre o valor restante para a próxima fatura.



FIADOCARD

Fatura de Janeiro
Demonstrativo

Pagamento Mínimo:R$99,00
Engargos financ.: 16%a.m.

Cliente: João da Silva

Cartão: 1234 5678 9101 1121

Vencimento	10/01/2013
Valor	R$660,00

Na figura: a fatura a pagar

OS PROBLEMAS QUE SURGEM

Questão 1) O salário líquido de Joãozinho paga todas as despesas?

Questão 2) Qual ou quais as soluções que Joãozinho tem para pagar suas despesas sem pagar juros?

Questão 3) Qual ou quais as soluções que Joãozinho tem para pagar suas despesas pagando o menor valor de juros sem utilizar os valores reservados para alimentação, lazer, combustível e a assinatura da revista?

Questão 4) Se as despesas se mantiverem em fevereiro, com o novo salário, Joãozinho conseguirá pagá-las?

Questão 5) Se Joãozinho pagar apenas o valor mínimo da fatura do cartão de crédito, de quanto será o juro na próxima fatura?

Questão 6) Qual a taxa equivalente de juros anual cobrada pela operadora de cartão de crédito?

As respostas para essas questões podem não serem únicas. É necessário tomar decisões referentes às informações do problema que estão em aberto e cada decisão tomada define um caminho diferente para uma solução.
Veja algumas soluções nas páginas 6, 7 e 8.

O conhecimento matemático

Porcentagem

O símbolo % representa uma divisão por 100. Por exemplo, Joãozinho tem um desconto total de 12% em seu salário. A expressão 12% (*forma percentual*) pode ser indicada por 12 em 100 ou $\frac{12}{100}$ (*forma fracionária*) ou ainda 0,12 (*forma decimal*) . Isso quer dizer que a cada R$ 100,00 de seu salário, R$ 12,00 será descontado. Nessas condições, pode-se dizer que:

Desconto = 0,12 x *Salário*

Para se calcular uma **porcentagem do valor básico**, basta multiplicar o **valor básico** pela **taxa percentual.**

Fator de Correção

Quando se tem um valor inicial P_0 e se quer aumentar de i (taxa na forma decimal), para obter o novo valor P, basta multiplicar o valor original por $(1 + i)$. O número $(1 + i)$ é chamado de **fator de correção** *(de aumento)*.

Fator de Aumento: $P = P_0 \times (1+i)$

Caso se tenha um desconto de i (taxa na forma decimal), para obter o novo valor P, basta multiplicar o valor original por $(1 – i)$. O número $(1 – i)$ é chamado de **fator de correção** *(de desconto)*.

Fator de Desconto: $P = P_0 \times (1-i)$

Juros Simples

Para Zani, Wagner e Morgado (1993), a operação básica da matemática financeira é a operação de empréstimo. Alguém que dispõe de um capital C (chamado de principal), empresta-o a outrem por um certo período de tempo. Após esse período, ele recebe o seu capital C de volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de *juro*. A soma $J + C$ é chamada de *montante* e será representada por M. A razão $i = \frac{J}{C}$, que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de *taxa de juros*.

O principal C pode ser chamado também de **capital inicial** e é o valor monetário que serve de base para o cálculo dos **juros**.

Nas **taxas de juros** deve-se ter uma parte numérica para um referido período de tempo. Por exemplo: na taxa de 10% ao mês, a parte numérica é 10% e o período de tempo que se refere é mês.

Uma maneira de simplificar a escrita das taxas de juros é abreviando os períodos de tempo como na seguinte tabela:

Tabela: Abreviatura das Taxas

Período referido	Abreviatura
ao dia	a.d.
ao mês	a.m.
ao semestre	a.s.
ao ano	a.a.

Na Matemática Financeira o **prazo** pode ser entendido como o tempo necessário que um certo capital, aplicado a uma taxa de juros, necessita para produzir um **montante**. Sendo assim, o prazo é considerado discreto, já que a menor fração de tempo considerada na prática é de 1 dia. Por esse motivo o prazo é denotado pela letra n.

No sistema de juros simples, somente o capital inicial rende juros. Seja a situação do pagamento do aluguel do Joãozinho no valor de R$ 450,00, onde é cobrado juros simples de 10% a.m. se ele pagar em atraso. Qual será o juro se ele pagar o aluguel com atraso de:

a) um mês?

O juro será de:

J= 450 × 0,1 × 1 = R$ 45,00.

Isto é, 10% de R$ 450,00 em 1 mês.

b) dois meses?

Somente o capital inicial rende juros, logo seu valor será:

J= 450 × 0,1 × 2 = R$ 90,00.

Isto é, o valor do juro de 2 meses é igual a 2 vezes o juro de 1 mês.

c) três meses?

O juro será de:

J= 450 × 0,1 × 3 = R$ 135,00.

Isto é, 3 vezes o juro de 1 mês.

A cobrança de juros quando se tem um capital e uma taxa fixada irá variar apenas no tempo, isto é, só irá existir cobrança de juros se houver atraso, logo deduze-se uma fórmula para o cálculo do juro simples que é:

$$J = C \times i \times n,$$

sendo $\boldsymbol{C}$ o capital inicial, $\boldsymbol{i}$ uma taxa na forma decimal e $\boldsymbol{n}$ o prazo na mesma unidade de tempo da taxa.

Cálculo do Montante

O montante M é a incorporação dos juros ao capital inicial, ou seja, é o capital mais os juros.

$$M = C + J$$

Assim, para o cálculo do montante a juros simples, temos:

$$M = C + C \times i \times n$$

Colocando em evidência o fator comum C, temos a fórmula geral do montante:

$$M = C(1 + i \times n)$$

Juros para Períodos não Inteiros

Geralmente, nas operações financeiras, utiliza-se o mês e o ano comercial cujos números de dias são de 30 e 360, respectivamente. O juro assim calculado é chamado de juro comercial e a contagem dos dias para cobrança ou pagamento dos juros deve ser feita de forma exata.

Portanto, se a taxa for mensal e o prazo em dias, divide-se a taxa por 30 e obtém-se uma taxa proporcional diária. Se a taxa for anual e o prazo em dias, divide-se a taxa por 360 e obtém-se uma taxa proporcional diária.

Veja uma situação onde o prazo de aplicação e o período da taxa de juros não coincidem:

Joãozinho, para comprar sua moto, fez um financiamento onde deve pagar o valor de R$ 92,60 no dia 15 de janeiro de 2013. Se o pagamento for feito com atraso, o devedor pagará multa de 2% sobre o valor da prestação e juros simples de 6% ao mês. Supondo que ele pague a dívida no dia 01 de fevereiro de 2013, de quanto será a multa e o juro?

BANCO DO BRASIL | 001-9 | 00193.95334 30000.000007 00000.027219 3 38770000020000

Local de pagamento: QUALQUER BANCO ATÉ O VENCIMENTO — Vencimento: 15/01/2013
Cedente: MOTO K Ltda — Agência/Código cedente: 0012-3/ 987564
Data do documento: 15/01/2013 — No. documento — Espécie doc. — Aceite — Data process.: 02/01/2013 — Nosso número: 0272193
Uso do banco — Carteira: 25/625 — Espécie: R$ — Quantidade — x Valor: 92,60 — (=) Valor documento: 92,60
Instruções (Texto de responsabilidade do cedente) — (-) Desconto / Abatimento — (-) Outras deduções — (+) Mora / Multa — (+) Outros Acréscimos — (=) Valor cobrado

Sr Caixa, após o vencimento cobrar multa de 2% e juros simples de 6% ao mês

TÍTULO SUJEITO A PROTESTO

Sacado — Autenticação Mecânica
Nome: João da Silva
Rua: A, 01, Bairro Bom

Para resolver esse problema, tem-se alguns passos:

1º passo) faz-se a contagem exata dos dias em atraso, nesse caso não se conta o dia do vencimento, mas se conta o dia do pagamento. Constrói-se uma tabela para contagem dos dias.

Tabela: Contagem dos dias

Mês	Nº de dias
janeiro	31 – 15 = 16
fevereiro	01
Total	17

2º passo) a multa é uma penalidade, logo não importa a quantidade de dias de atraso, calcula-se a multa aplicando o seu percentual sobre o capital (valor da dívida):

$$multa=0{,}02\times 92{,}6=1{,}852=R\$\,1{,}85$$

3º passo) encontra-se a taxa proporcional diária:

$$i_{mensal}=6\%a.m. \quad \rightarrow \quad i_{diária}=6\%a.m.\div 30=0{,}2\%a.d.$$

4º passo) calcula-se o juro simples:

$$J=92{,}6\times 0{,}002\times 17=3{,}1484=R\$3{,}15$$

Juros Compostos

Podemos entender os juros compostos como sendo o que popularmente chamamos de *juros sobre juros*, mas na verdade, o correto é afirmar que os **juros incidem sobre o montante imediatamente anterior**. Os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte. O regime de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro e o seu cálculo é conhecido como cálculo *exponencial* de juros.

Tabela: Cálculo a Juros Simples

n	Juro por período	Montante
1	1000 · 0,2 · 1 = 200	R$ 1.200,00
2	1000 · 0,2 · 2 = 400	R$ 1.400,00
3	1000 · 0,2 · 3 = 600	R$ 1.600,00
4	1000 · 0,2 · 4 = 800	R$ 1.800,00

Tabela: Cálculo a Juros Compostos

n	Juro por período	Montante
1	1000 · 0,2 = 200	R$ 1.200,00
2	1200 · 0,2 = 240	R$ 1.440,00
3	1440 · 0,2 = 288	R$ 1.728,00
4	1728 · 0,2 = 345, 6	R$ 2.073,60

Para encontrarmos uma fórmula para calcular o montante, em uma operação financeira, vamos considerar um capital inicial que chamamos de C e uma taxa i e calcular o montante período a período:

Note que para saber o novo montante, devemos multiplicar o valor atual por (1 + i) .

$$M_1=C(1+i)$$
$$M_2=C(1+i)(1+i)=C(1+i)^2$$
$$M_3=C(1+i)^2(1+i)=C(1+i)^3$$
$$M_4=C(1+i)^3(1+i)=C(1+i)^4$$
$$\vdots$$
$$M_n=C(1+i)^n$$

ou simplesmente $M=C=(1+i)^n$ que é a fórmula geral do montante a juros compostos.

Assim, a solução do problema da *tirinha* acima, fica:

$$M=1000\times(1+0{,}20)^4$$
$$M=1000\times(1{,}20)^4$$
$$M=1000\times 2{,}0736=2073{,}60$$

Taxas Proporcionais

Duas taxas são **proporcionais** quando existe entre elas a mesma proporção que a dos períodos a que se refere. Por exemplo, as taxas de 24% a.a. e de 2% a.m. são proporcionais tanto em juros compostos quanto em juro simples.

Taxas Equivalentes

Taxas equivalentes são aquelas que aplicadas ao mesmo **capital**, durante o **mesmo intervalo de tempo**, produzem **montantes iguais**.

Veja a seguinte situação:

Um capital de R$100,00 aplicados por 12 meses a uma taxa de juros compostos de 2% a.m. e o mesmo capital aplicado pelo mesmo período a uma taxa de juros compostos de 24% a.a. terão o mesmo montante?

Tabela: Cálculo do montante

Prazo de 12 meses	Prazo de 1 ano
$M=100.(1{,}02)^{12}=126{,}82$	$M=100.(1{,}24)^{1}=124{,}00$

Como se observa, os montantes não são iguais, pois há a composição da taxa de 2% a.m. durante 12 meses ao passo que a taxa de 24% a.a. é aplicada apenas uma única vez. Então, as taxas de 2% a.m. e 24% a.a. não são equivalentes.

Mas como encontrar taxas equivalentes em juros compostos?

Que taxa de juros anual é equivalente a taxa de 3%a.m.?

$i_{anual}=?$

$i_{mensal}=3\%a.m.=0{,}03\,a.m.$

Nº períodos (meses por ano) = 12

Assim:

$$i_{anual}=(1+0{,}03)^{12}-1=0{,}4258\,a.a.=42{,}58\%a.a.$$

Na prática, o que fazemos?

Temos uma taxa de 0,03 a.m. Se fosse juros simples multiplicaríamos por 12 para encontrarmos a taxa anual, mas a capitalização é composta, então ao invés de multiplicarmos, somamos "1" à taxa e ficamos com *(1+0,03)* e elevamos na *12ª* potência e depois subtraímos "1" fora dos parenteses e ficamos com $(1+0{,}03)^{12}-1$ sendo essa a taxa anual equivalente.

Por exemplo, tenho a taxa de 2% .am. E quero saber qual é a taxa equivalente anual. Então pego 2% na forma decimal:

$$(0{,}02+1)^{12}-1=1{,}2682-1=0{,}2682=26{,}82\%a.a.$$

Séries de Pagamentos

As séries de pagamentos uniformes são aquelas em que os pagamentos ou recebimentos são constantes e ocorrem em intervalos de tempos iguais.

Séries Imediatas Postecipadas

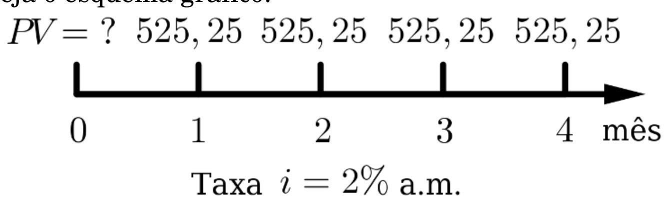
São as séries que são simultaneamente: temporárias, periódicas, fixas, imediatas e postecipadas e que a taxa seja referida ao mesmo período dos pagamentos. As séries uniformes postecipadas são aquelas em que o primeiro pagamento ocorre no momento 1 da série (0+n).

- **Imediata** - quando o primeiro pagamento da série ocorre no primeiro período da série;
- **Postecipada**- quando os pagamentos ocorrem no período "1"(um) da série.

Valor Presente de uma Série Postecipada

Exemplo motivador: Uma pessoa compra uma TV que, irá pagar em 4 prestações mensais de R$ 525,25 sem entrada. As prestações serão pagas a partir do mês seguinte ao da compra e o vendedor afirmou estar cobrando uma taxa de juros compostos de 2%a.m. Pergunta-se o valor da TV a vista.

Veja o esquema gráfico:



A soma dos valores atuais PV é:

$$P=\frac{525{,}25}{1{,}02}+\frac{525{,}25}{1{,}02^2}+\frac{525{,}25}{1{,}02^3}+\frac{525{,}25}{1{,}02^4}$$

$$P=525{,}25\cdot\left[\frac{1}{1{,}02}+\frac{1}{1{,}02^2}+\frac{1}{1{,}02^3}+\frac{1}{1{,}02^4}\right]$$

P = 525,25.[0,980392+0,961169 + 0,942322 + 0,923845]

P = 525, 25.[3,807729]

P = 2000,01 ***preço da TV à vista***

Pode-se notar que o valor a vista da TV foi obtido multiplicando-se a prestação por um **fator constante** que depende apenas da taxa de juros e do número de parcelas do financiamento e que a soma (entre colchetes) é de termos de uma progressão geométrica (PG) finita. Na verdade, esse fator, denominado por Teixeira e Netto (1998) de **Fator de Valor Presente por Operação Múltipla (FVPm)**, pode ser generalizado para qualquer taxa e número de parcelas, utilizando para isso a fórmula do somatório dos termos de uma PG finita. Sendo assim, temos:

$$a_1=\frac{1}{(1+i)}\quad a_n=\frac{1}{(1+i)^n}\quad q=\frac{1}{(1+i)}$$

$$S_n=FVP_m=\frac{a_1-a_n q}{1-q}$$

Então:

$$FVP_m=\frac{\dfrac{1}{(1+i)}-\dfrac{1}{(1+i)^n}\cdot\dfrac{1}{(1+i)}}{1-\dfrac{1}{(1+i)}}=\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n\cdot i}$$

Ou seja, para se encontrar o valor presente P (ou valor a vista) de uma série de pagamentos basta multiplicar o valor da prestação R pelo **[FVPm]**.

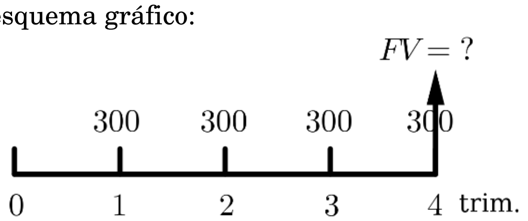
$P = R\cdot[FVPm]$, onde:

- P é o valor a vista
- R é o valor da prestação
- n é o número de parcelas
- i é a taxa

Montante de uma Série Postecipada

Exemplo motivador: JH Silva fez uma aplicação em um plano de capitalização onde fará 4 depósitos trimestrais no valor de R$ 300,00 cada. A taxa nessa aplicação é de 5% a.trim e o cliente faz o primeiro depósito 1 trimestre após a abertura da conta.

Veja o esquema gráfico:



Qual será o montante S dessa aplicação?

Temos de encontrar todos os montantes na data 4 e somá-los:

$$S=300+300(1{,}05)+300(1{,}05)^2+300(1{,}05)^3$$
$$S=300[1+(1{,}05)+(1{,}05)^2+(1{,}05)^3]$$
$$S=300[1+1{,}05+1{,}1025+1{,}157625]$$
$$S=300[4{,}310125]$$
$$S=1293{,}04 \ \text{ montante dessa aplicação}$$

É notável que o montante foi obtido multiplicando-se o valor do depósito por um **fator constante** que depende apenas da taxa e do número de depósitos e que a soma (entre colchetes) é também de termos de uma progressão geométrica (PG) finita e que de forma análoga ao valor presente, é denominado de **Fator de Acumulação de Capitais por Operação Múltipla (FACm).**

$$FAC_m=\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

Assim, para encontrar o montante *S* de uma série de pagamentos, basta multiplicar o valor da prestação R pelo **[FACm]**.

$S = R\cdot[FACm]$, onde:

- S é o valor acumulado
- R é o valor da prestação ou depósito
- n é o número de parcelas
- i é a taxa

Algumas Soluções para Situação-Problema

Questão 1) O salário líquido de Joãozinho paga todas as despesas?

1º) Somam-se todas as despesas do mês de janeiro conforme a tabela.

Tabela: Total das Despesas de Janeiro

Despesa	Valor (R$)
Luz	57,50
Água	61,90
Telefone fixo	55,00
Aluguel	450,00
Alimentação	390,00
Lazer	150,00
Prestação moto	92,60
Combustível	45,00
Assinatura revista	18,00
Fatura cartão de crédito	660,00
Total	**1.980,00**

2º) Calcula-se o salário líquido: o salário bruto de Joãozinho é de R$ 2.100,00 e os descontos somam 12% = $\frac{12}{100}$ = 0,12. Usando o fator de redução (1–0,12) = 0,88, tem-se que o salário líquido V_{LIQ} é dado por:

V_{LIQ} = 2.100·0,88 = R$ 1.848,00

3º) Como R$ 1.848,00 < R$ 1.980,00, nota-se que o salário líquido não paga todas as despesas de Joãozinho.

Questão 2) Qual ou quais as soluções que Joãozinho tem para pagar suas despesas sem pagar juros?

Para essa questão, o número de possibilidades é muito grande, mas alguns passos devem ser tomados:

1°) A diferença entre o total das despesas e o salário líquido é de:

1.980 – 1.848 = R$ 132,00.

2º) Ele deve pagar todas as contas que geram multa e juros e algumas possíveis soluções são:

- ✔ Joãozinho pode destinar apenas 390 – 132 =R$ 258,00 para alimentação e manter e pagar as demais despesas.
- ✔ Ele pode destinar apenas 150,00 –132,00 = R$ 18,00 para lazer e manter e pagar as demais despesas.
- ✔ Ele pode não assinar a revista no valor de R$18,00 e destinar apenas 150 – (132–18) = 150 – 114 = R$ 36,00 para lazer.
- ✔ Dividindo $\frac{132}{2}$ = 66 e reservar 390 – 66 = R$ 324,00 para alimentação e 150 – 66 = R$ 84,00 para lazer.

3º) Existem outras possibilidades para resolver essa questão. Desde que se diminua R$ 132,00 nas despesas que não envolvam cobrança de juros, todas estariam corretas.

Questão 3) Qual ou quais as soluções que Joãozinho tem para pagar suas despesas pagando o menor valor de juros sem utilizar os valores reservados para alimentação, lazer, combustível e a assinatura da revista?

Para essa questão, sugere-se seguir alguns passos:

1º) Para resolver esse problema deve-se estar atento à data do pagamento do salário do Joãozinho que é sempre o dia 5 de cada mês e que faltam R$ 132,00 para pagar todas as despesas.

2º) Calcular os juros e/ ou multa das contas de luz, água, telefone fixo, aluguel, prestação da moto e fatura do cartão e decidir, dentre elas, qual ou quais são as que geram a menor despesa financeira, se ele deixar de pagar:

- ✔ **Conta de luz**: *Vencimento: 05 de janeiro*
  - ➢ C = 57,60
  - ➢ multa = 2% = 0,02
  - ➢ i = 4,5% a.m. = 0,045 a.m.
  - ➢ n = 1 mês

Assim:
multa= 0,02·57,5 =R$ 1,15
J = 57,5·0,045·1 = R$ 2,59
Total da despesa: 1,15 + 2,59 = **R$ 3,74.**

- ✔ **Conta de água**: *Vencimento: 15 de janeiro*
  - ➢ C = 61,90
  - ➢ $i_{mens}=6\%a.m.\ 0{,}06\,a.m. \rightarrow i_{diár}=\frac{0{,}06}{30}=0{,}002\,a.d.$
  - ➢ n = 21 dias

Tabela: Contagem dos dias

Mês	Nº de dias
janeiro	31 – 15 = 16
fevereiro	05
Total	21

Dessa forma:
J= 61,90·0,002·21 = R$ 2,60.

- ✔ **Conta do telefone fixo**: *Vencimento: 07 de janeiro*
  - ➢ C = 55,00
  - ➢ J = 0,22 por dia
  - ➢ n = 29 dias

Tabela: Contagem dos dias

Mês	Nº de dias
janeiro	31 – 7 = 24
fevereiro	05
Total	29

Assim:
J = 0,22 . 29 = **R$ 6,38**

- ✔ **Aluguel**: *Vencimento: 10 de janeiro*
  - ➢ C = 450,00
  - ➢ $i_{mensal}=10\%a.m.=0{,}10\,a.m. \rightarrow i_{diária}=\frac{0{,}10}{30}\,a.d$
  - ➢ n = 26 dias

Tabela: Contagem dos dias

Mês	Nº de dias
janeiro	31 – 10 = 21
fevereiro	05
Total	26

Assim:

$J=450\cdot\frac{0{,}1}{30}\cdot 26$ = **R$ 39,00.**

- ✔ **Prestação da moto:** *Vencimento: 15 de janeiro*
  - ➢ C = 92,60
  - ➢ multa = 2% = 0,02
  - ➢ $i_m=6\%a.m.=0{,}06\,a.m \rightarrow i_d=\frac{0{,}06}{30}=0{,}002\,a.d.$
  - ➢ n = 21 dias

Tabela: Contagem dos dias

Mês	Nº de dias
janeiro	31 – 15 = 16
fevereiro	05
Total	21

Desse modo:
multa = 0,02·92,60 = R$ 1,85
J = 92,6· 0,002·21 = R$ 3,89
Total da despesa: T = *1,85* + *3,89* = **R$ 5,74.**

3º) Analisando a situação, as contas devem somar, no mínimo, R$ 132,00.

- ✔ Note que as seguintes contas somadas estão abaixo do valor mínimo:
  - ➢ contas de luz e água somadas resultam em 57,5 + 61,9 = **R$ 119,40**;
  - ➢ luz e telefone somadas resultam em 57,5 + 55 = **R$ 112,50**;
  - ➢ água e telefone somadas resultam em 61,9 + 55= **R$ 116,90**.
- ✔ Já as contas de luz, água e telefone somadas atingem o valor mínimo: 57,5 + 61,9 + 55 = R$ 174,40 e a soma dos juros referentes a elas é de 3,74 + 2,60 + 6,38 = **R$ 12,72**.
- ✔ Se deixar de pagar R$ 132,00 na fatura do cartão de crédito será cobrado **R$ 21,12** de juros.
- ✔ O valor do aluguel está muito acima do valor mínimo e será cobrado R$ 39,00 de juros se não for pago.
- ✔ Outras possibilidades estão na combinação da prestação da moto com as contas de luz, água ou telefone:
  - ➢ Prestação da moto e luz: 92,6+ 57,5= R$ 150,10 e juros de 5,74+ 3,74 =**R$ 9,48**.
  - ➢ Prestação da moto e água: 92,6 + 61,9 = R$ 154,50 e juros de 5,74 + 2,60 = **R$ 8,34**.
  - ➢ Prestação da moto e telefone: 92,6 + 55 = R$ 147,60 e juros de 5,74 + 6,38 = **R$ 12,12**.

4º) Note que o menor valor referente a juros está na combinação prestação da moto e conta de água que gera um valor de juros de R$ 8,34, logo essa é a melhor opção.

Material retirado da dissertação de mestrado "*Situações-problema no Ensino de Matemática Financeira*" de autoria de Alessandro da Silva Saadi.
Disponível em:
https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=29256

COMITÊ EDITORIAL

Coordenador e editor:
Alessandro da Silva Saadi
Revisão:
Alessandro da Silva Saadi
Patrícia Lima da Silva
Telefone:
(53) 3233 6907
E-mail: prima@furg.br

Universidade Federal do Rio Grande FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física

IMEF

Tiragem: 500 exemplares – Distribuição gratuita

Periodicidade: extra

Impressão: Editora e Gráfica da FURG.

Estamos na Internet!

Visite-nos em:

www.imef.furg.br

facebook.com/jornalomatematico

Acesso ao material completo: Situações-problema no Ensino de Matemática Finaceira em:

http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?titulo=financeira&pag=7

Questão 4) Se as despesas se mantiverem em fevereiro, com o novo salário, Joãozinho conseguirá pagá-las?

1º) Supõe-se a mesma despesa de janeiro: R$ 1.980,00.

2º) Calcula-se o salário bruto para fevereiro que tem aumento de 20% = 0,20, usando o fator de correção de aumento *(1 + i)*:

$$V_N = 2100\cdot(1+0{,}20) = 2100\cdot 1{,}2 = R\$\ 2.520{,}00.$$

3º) Calcula-se o salário líquido de fevereiro e usando o fator de redução (1– 0,12) = 0,88, tem-se:

$$V_{LIQ} = 2.520\cdot 0{,}88 = R\$\ 2.217{,}60.$$

4º) Como R$ 1980,00 < R$ 2.217,60, o novo salário paga todas as despesas.

Questão 5) Se Joãozinho pagar apenas o valor mínimo da fatura do cartão de crédito, de quanto será o juro na próxima fatura?

1º) O valor da fatura é de R$ 660,00 e o pagamento mínimo é de R$ 99,00, logo a base de cálculo do juro para próxima fatura será de:

$$C = 660 - 99 = \mathbf{R\$\ 561{,}00}.$$

2º) O tempo é n = 1 mês e a taxa é i = 16% a.m. = 0,16 a.m. e o juro será de:

$$J = 561\cdot 0{,}16\cdot 1 = \mathbf{R\$\ 89{,}76}.$$

Questão 6) Qual a taxa equivalente de juros anual cobrada pela operadora de cartão de crédito?

A taxa mensal de juros é de 16% a.m.. Se o cliente não fizer o pagamento integral, essa taxa será composta e assim, ao invés de se multiplicar essa taxa por 12 meses, deve-se usar a ideia e os conceitos de juros compostos, assim, tem-se como taxa anual equivalente:

$$i_{anual} = (0{,}16+1)^{12} - 1 = (1{,}16)^{12} - 1 = 5{,}936 - 1 = 4{,}936$$
$$i_{anual} = 4{,}936 \times 100 = 493{,}6\%a.a.$$

Ou seja, quase 500% ao ano, se o cliente deixar de pagar a dívida por um ano, pagará de juros quase **5 vezes** o capital emprestado.

Casos Interessantes

Taxa Abusiva: No ano passado, meu médico pediu-me a realização de um exame que o convênio não cobria. Fui a um laboratório para fazer a análise. O preço cobrado para o procedimento era de R$50,00 a vista. Como era final de mês, pedi à atendente que gostaria de parcelar e ela me disse as condições do laboratório: entrada de R$30,00 e R$30,00 para 30 dias. Fiz os cálculos na hora. Se eu desse R$30,00 de entrada, ficaria devendo R$20,00 e depois de 30 dias pagaria R$30,00.
Vejam só: o capital emprestado é de R$20,00 e o juro é de R$10,00, assim a taxa de juro cobrada era de $i = \frac{J}{C} = \frac{10}{20} = 0{,}5 = 50\%a.m.$
Logo, paguei a vista.

Comprar a Vista ou a Prazo? O Sr. Arthur deseja comprar uma TV de led que custa a vista R$5000,00. Ele já juntou esse dinheiro que está aplicado em um banco a uma taxa de juros de 0,6% ao mês. Ao chegar na loja, perguntou ao gerente se poderia ter algum desconto a vista. O gerente lhe respondeu que não, mas poderia parcelar a TV em 10 prestações de R$500,00, sem entrada e sem juros. **O que ele deve fazer, comprar a vista ou a prazo?**
Encontrando o valor atual da série de pagamentos, através da fórmula *P = R·[FVPm],* temos:

$$P = 500\cdot\left[\frac{(1+0{,}006)^{10}-1}{(1+0{,}006)^{10}\cdot 0{,}006}\right]$$
$$P = 500\cdot\left[\frac{0{,}061646}{0{,}0063698}\right]$$
$$P = 500\cdot 9{,}6778548 = R\$\,4838{,}93$$

Comparando com o valor a vista da TV temos que:

R$4838,93 < R$5000,00

Nesse caso, o melhor é comprar parcelado.

Como Juntar R$1.000.000,00? Você já parou para pensar como juntar tal quantia? Se você fizer o investimento certo e com um pouco de esforço mensal, é possível juntar esse valor ou até mais. Imagine um jovem com 18 anos que começa a trabalhar e pretende se aposentar aos 60 anos de idade. Ele pode fazer um plano de previdência privada cuja a taxa gira em torno de 0,85% ao mês. Vamos para os cálculos:
S = 1.000.000,00
n = 42 anos = 42 x 12 = 504 meses
i = 0,85% a.m. = 0,0085
R = valor de cada depósito
Usando a fórmula mostrada na página 6, *S = R·[FACm],* temos:

$$1000000 = R.\left[\frac{(1+0{,}0085)^{504}-1}{0{,}0085}\right]$$
$$1000000 = R.\left[\frac{71{,}22867}{0{,}0085}\right]$$
$$R = \frac{1000000}{8379{,}84} = R\,\$\,119{,}33$$

Os depósitos devem ser de apenas R$119,33 por mês e o indivíduo acumulará:

R$1.000.000,00