

Adriano Mansur Padilha Zaher

**Uma Aplicação de Geometria Diferencial à
Indústria: molde para empacotamento
automático**

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Dezembro, 2014

Adriano Mansur Padilha Zaher

Uma Aplicação de Geometria Diferencial à Indústria: molde para empacotamento automático

Trabalho submetido por Adriano Mansur Padilha Zaher como requisito parcial para conclusão do curso de Bacharelado em Matemática Aplicada junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Bacharelado em Matemática Aplicada

Orientador: Dr. Rodrigo Barbosa Soares

Coorientador: Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Dezembro, 2014

Adriano Mansur Padilha Zaher

Uma Aplicação de Geometria Diferencial à Indústria: molde para empacotamento automático

Trabalho submetido por Adriano Mansur Padilha Zaher como requisito parcial para conclusão do curso de Bacharelado em Matemática Aplicada junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, 18 de Dezembro de 2014:

Dr. Rodrigo Barbosa Soares
(Orientador - FURG)

**Dra. Cinthya Maria Schneider
Meneghetti**
(Coorientadora - FURG)

Dr. Mário Rocha Retamoso
(Avaliador - FURG)

Dr. Leandro Sebben Bellicanta
(Avaliador - FURG)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Dezembro, 2014

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo de Máquina de Empacotamento Automático	19
Figura 2 – Representação dos ângulos α e ϕ	20
Figura 3 – Representação das curvas BC e \overline{BC}	21
Figura 4 – Molde	52

Sumário

	Introdução	6
1	PRÉ-REQUISITOS	7
1.1	Definições no \mathbb{R}^2	7
1.2	Definições no \mathbb{R}^3	9
2	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA	19
3	DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DA GEOMETRIA DO MOLDE	21
3.1	Consequências da condição iii b	24
3.2	Consequências da condição iii c	24
3.3	Eliminando as auto intersecções do molde	27
3.4	Vetor Normal da superfície desenvolvível	30
3.5	Curvaturas Principais e o ângulo θ	30
4	GEOMETRIA DO MOLDE: \overline{BC} GRÁFICO.	36
4.1	Curvatura e torção da curva BC	36
4.2	Curvatura da curva \overline{BC} e relação entre $\bar{\kappa}$ e κ	38
4.3	Triedro de Frenet para a curva BC	43
4.4	Vetor normal da superfície desenvolvível	45
4.5	Determinação da geratriz d	46
5	EXEMPLO	49
6	CONCLUSÃO	53
A	APÊNDICE	54
A.1	Curvas BC e \overline{BC}	54
A.1.1	Coeficientes da primeira forma quadrática da superfície acima de \overline{BC}	54
A.1.2	Coeficientes da primeira forma quadrática do molde	55
	REFERÊNCIAS	59

Introdução

Neste trabalho, estudamos as equações e algumas propriedades geométricas de um modelo de máquina de empacotar. Acreditamos que este modelo se assemelha a muitos que existem no mercado. Nosso objetivo principal é apresentar uma aplicação de Geometria Diferencial à indústria, justificando a importância da presença de um matemático colaborando na projeção e execução de equipamentos mais eficazes e produtivos. Como base, utilizamos os trabalhos de (BOERSMA; MOLENAAR, 1995) e (MOT, 1973).

A criação de um processo suave para embalar itens de produção é um problema bastante comum na indústria. Geralmente, o material utilizado para embalar é desenrolado de um rolo horizontal e desliza em uma superfície curva, chamada de molde, a qual serve para auxiliar o material a formar um cilindro vertical onde ele, o material, molda-se contra a parede cilíndrica e é selado ao longo da borda dianteira a fim de formar um tipo de embalagem (por exemplo, uma embalagem de plástico). Os itens de produção são então colocados na embalagem, a parte superior é fechada e a embalagem é retirada do cilindro. O problema com esse processo é que se o molde não possuir a forma apropriada, o material utilizado na embalagem pode apresentar dobras fazendo com que o processo seja interrompido.

Desta maneira, o problema geométrico que surge é determinar a forma apropriada do molde para que o processo ocorra da forma mais suave possível, ou seja, sem dobras ou rasgos. Como o molde é uma superfície de transição de um plano para um cilindro, é esperado que ele seja isométrico ao plano, bem como ao cilindro. Segundo (FORSYTH, 1912), (KREYSZIG, 1991) e (STRUIK, 1988), isto significa que o molde deve ser uma superfície desenvolvível.

O conceito fundamental que é estudado no trabalho é o de superfície desenvolvível. Essas superfícies são utilizadas também para construir cascos de navios, roupas, calçados e partes de carro. Elas possuem o mesmo plano tangente em todos os pontos ao longo de uma geratriz, são casos particulares de superfícies regradas, isométricas ao plano e, portanto, possuem a mesma curvatura Gaussiana do plano, que é identicamente nula.

Os conceitos de Geometria Diferencial necessários para compreender os cálculos deste trabalho são: fórmulas de Frenet-Serrat, superfícies regradas, superfícies desenvolvíveis, isometria, primeira forma fundamental, vetor normal unitário e curvatura Gaussiana. Tais conceitos podem ser encontrados em (CARMO, 2012), (OPREA, 2007) e (TENENBLAT, 2008) e de forma resumida no Capítulo I deste trabalho.

1 Pré-requisitos

Neste capítulo, enunciaremos as definições e os resultados principais utilizados ao longo do trabalho. Para maiores detalhes, veja (TENENBLAT, 2008), (CARMO, 2012) e (DELGADO; FRENSEL, 2010).

1.1 Definições no \mathbb{R}^2

Definição 1. Uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação diferenciável α de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^2 . A variável $t \in I$ é dita parâmetro da curva e o subconjunto de \mathbb{R}^2 dos pontos $\alpha(t)$, $t \in I$, é chamado traço da curva.

Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita regular se $\forall t \in I$, $\alpha'(t) \neq 0$. Dizemos que α é simples quando a aplicação α é injetora, isto é, $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ se $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in I$.

Definição 2. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva parametrizada diferenciável regular, a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(s)| ds,$$

é chamada função comprimento de arco da curva a partir de t_0 , onde $t_0 \in I$.

Definição 3. Dizemos que uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0,$$

para todos $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$. Isto é, o comprimento de arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$.

Das Definições 2 e 3 segue a Proposição 1:

Proposição 1. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $\forall t \in I$, $|\alpha'(t)| = 1$.

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $t_0 \in I$ fixo e consideremos a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ o comprimento de arco a partir de t_0 .

Então,

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\xi)| d\xi = t_0 - t \quad \text{se } t \geq t_0$$

e

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\xi)| d\xi = s(t) = - \int_t^{t_0} |\alpha'(\xi)| d\xi = -(t_0 - t) = t - t_0, \quad \text{se } t_0 \geq t,$$

ou seja, $s(t) = t - t_0$ para todo $t \in I$. Logo; $s'(t) = |\alpha'(t)| = 1 \quad \forall t \in I$.

(\Leftarrow) Se $|\alpha'(t)| = 1 \quad \forall t \in I$, então $\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0$ para quaisquer $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$. \square

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, $|\alpha'(s)| = 1$ para todo $s \in I$.

Para cada $s \in I$, o vetor $\alpha'(s)$ é um vetor unitário e será designado por $\mathbf{t}(s)$, isto é, $\mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s))$.

Seja $\mathbf{n}(s)$ o vetor unitário de \mathbb{R}^2 ortogonal a $\mathbf{t}(s)$ tal que a base ortonormal $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ tem a orientação da base canônica $\{e_1, e_2\}$. Então $\mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$, pois $|\mathbf{n}(s)| = 1$.

Definição 4. A base ordenada $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ é chamada o referencial de Frenet da curva α em s .

Definição 5. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, então a curvatura α em $s \in \mathbb{R}$ é o número real

$$\bar{\kappa} = |\bar{\mathbf{t}}_s(s)|.$$

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa(s) > 0$. O vetor

$$\mathbf{n}(s) = - \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)}$$

é denominado vetor normal a α em s .

A parametrização da curva α que usaremos neste trabalho, pode ser escolhida sem perda de generalidade, como gráfico de uma função a qual é côncava, isto é,

$$\alpha(s) = (s, z(s)),$$

tal que $z''(s) < 0 \forall s \in I$.

Inicialmente tomamos uma parametrização por comprimento de arco para simplificar os cálculos.

Observação 1. Como, para cada $s \in I$, $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^2 , temos que $\mathbf{t}'(s) = \alpha''(s)$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$.

Mas como $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 1$ para todo $s \in I$, temos que $\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0$, ou seja, $\mathbf{t}'(s)$ é ortogonal a $\mathbf{t}(s)$.

Logo $\mathbf{t}'(s)$ é paralelo a $\mathbf{n}(s)$, isto é, existe uma função $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{t}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{n}(s),$$

para todo $s \in I$, onde

$$\kappa(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s)$$

é chamada a **curvatura** de α em $s \in I$.

De modo análogo, como $\mathbf{n}(s)$ é um vetor unitário, segue-se que $\mathbf{n}'(s)$ é ortogonal a $\mathbf{n}(s)$ e é, portanto, paralelo a $\mathbf{t}(s)$. Além disso, como $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0$, temos que

$$\langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle = -\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}'(s) \rangle = -\langle \mathbf{n}(s), -\kappa\mathbf{n}(s) \rangle = \kappa(s).$$

Logo,

$$\mathbf{n}'(s) = \kappa(s)\mathbf{t}(s).$$

Portanto, se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s , então o referencial de Frenet (definição 4) satisfaz as equações:

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) = \kappa(s)\mathbf{t}(s), \end{cases}$$

que são as fórmulas de Frenet de uma curva plana.

1.2 Definições no \mathbb{R}^3

Definição 6. Uma curva parametrizada diferenciável de \mathbb{R}^3 é uma aplicação diferenciável α , de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^3 . A variável $t \in I$ é o parâmetro da curva e o subconjunto de \mathbb{R}^3 formado pelos pontos $\alpha(t)$, $t \in I$, é o traço da curva.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva parametrizada diferenciável. O vetor tangente a α em t é o vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. A curva α é regular se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Definição 7. Sejam α uma curva regular e $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$. O comprimento de arco da curva α de t_0 a t_1 é dado por

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(\xi)| d\xi,$$

e a função comprimento de arco da curva α a partir de t_0 é

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\xi)| d\xi,$$

para todo $t \in I$.

Definição 8. Dizemos que uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco se

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(\xi)| d\xi = t_1 - t_0,$$

para todos $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$.

Das Definições 7 e 8 segue a Proposição 2:

Proposição 2. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$.

Demonstração. Demonstração análoga à Proposição 1. □

Definição 9. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $s \in I$. O número $|\alpha''(s)| = \kappa(s)$ chama-se curvatura de α em s .

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa(s) > 0$. O vetor

$$\mathbf{n}(s) = -\frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)}$$

é denominado vetor normal a α em s .

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa(s) > 0$. O vetor binormal a α em s é

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s).$$

Como $\mathbf{b}'(s) = \mathbf{t}'(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s)$ e $\mathbf{t}'(s)$ é paralelo à $\mathbf{n}(s)$ então $\mathbf{b}'(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s)$. Portanto $\mathbf{b}'(s)$ é paralelo à $\mathbf{n}(s)$.

Definição 10. O número real $\tau(s)$ definido por $\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$ é denominado torção da curva α em s .

Portanto, se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$, então o triedro de Frenet definido por $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$, $\mathbf{n}(s) = -\frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)}$ e $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ satisfaz as equações:

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) = \kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s), \end{cases}$$

que são denominadas fórmulas de Frenet da curva α .

Definição 11. Uma superfície parametrizada regular ou simplesmente uma superfície é uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 , tal que:

- (1) X é diferenciável de classe C^∞ ;
- (2) Para todo $p = (u, v) \in U$, a diferencial de X em p , $dX_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora.

As variáveis u, v são parâmetros da superfície. O subconjunto S de \mathbb{R}^3 obtido pela imagem da aplicação X é denominada traço de X .

Se $X(u, v)$ é uma superfície parametrizada regular, dizemos que um vetor w de \mathbb{R}^3 é um vetor tangente a X em $p = X(u_0, v_0)$ se $w = \alpha'(t)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva na superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0) = q$.

O plano tangente a X em p é o conjunto de todos os vetores tangentes a X em p , que denotamos por T_pX .

Se $X(u, v)$ é uma superfície e $p = X(u_0, v_0)$, dizemos que um vetor de \mathbb{R}^3 é normal a X em p se é ortogonal a T_pX , isto é, é ortogonal a todos os vetores tangentes a X em p .

Dado um plano tangente T_pX , existe uma única direção normal a este plano e, portanto, existem exatamente dois vetores unitários normais a X em p . Daqui por diante, vamos fixar o vetor unitário normal a X em p como sendo o vetor

$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(p).$$

Se o domínio da superfície X é um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, então, variando $(u, v) \in U$, temos uma aplicação diferenciável $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, denominada aplicação normal de Gauss, definida por

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u, v),$$

cuja imagem está contida na esfera unitária, centrada na origem.

Definição 12. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular, a aplicação

$$I_p : T_pX \rightarrow \mathbb{R}$$

é denominada a primeira forma quadrática de X em p .

$$I_p : T_pX \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \rightarrow I_p(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2.$$

Consideramos uma superfície dada por $X(u, v)$ e um ponto $p = X(u_0, v_0)$. Então, um vetor $w \in T_pX$ é da forma

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$I_p(w) = a^2 \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0) + b^2 \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0).$$

Usando a notação

$$\begin{cases} E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0), \\ F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0), \\ G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0), \end{cases}$$

temos que

$$I_p(w) = a^2 E(u_0, v_0) + 2ab F(u_0, v_0) + b^2 G(u_0, v_0),$$

onde $E(u_0, v_0)$, $F(u_0, v_0)$ e $G(u_0, v_0)$ são os coeficientes da primeira forma quadrática na base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p X$.

Duas superfícies diferenciáveis são isométricas se os respectivos coeficientes da primeira forma quadrática coincidem ponto a ponto.

Definição 13. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Fixado $p = (u_0, v_0) \in U$, a segunda forma quadrática de X em p é uma aplicação $II_p : T_p X \rightarrow \mathbb{R}$, que para cada vetor $w \in T_p X$ associa o valor $II_p(w)$ da seguinte forma: se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva diferenciável da superfície, tal que $(u_0, v_0) = q$ e $\alpha'(t_0) = w$, então definimos $II_p(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle$, onde N é o vetor normal a X . (TENENBLAT, 2008)

A expressão da segunda forma quadrática na base $\{X_u, X_v\}$ é dada por

$$II_p(w) = a^2 \langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0) + b^2 \langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0).$$

Usando a notação

$$\begin{cases} e(u_0, v_0) = \langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0), \\ f(u_0, v_0) = \langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0), \\ g(u_0, v_0) = \langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0), \end{cases}$$

temos que

$$II_p(w) = a^2 e(u_0, v_0) + 2ab f(u_0, v_0) + b^2 g(u_0, v_0),$$

onde $e(u_0, v_0)$, $f(u_0, v_0)$ e $g(u_0, v_0)$ são os coeficientes da segunda forma quadrática.

Definição 14. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $p = X(u_0, v_0)$. A função curvatura normal em p é uma aplicação $k_n : T_p X - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ que, para cada vetor $w \in T_p X$ não-nulo, associa o valor

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)}.$$

Proposição 3. Sejam $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e k_n a função curvatura normal de X em $p = X(u_0, v_0)$. Então, existem vetores unitários e ortogonais $w_1, w_2 \in T_p X$ tais que $k_1 = k_n(w_1)$ e $k_2 = k_n(w_2)$ são os valores mínimo e máximo da função k_n .

Demonstração. Se k_n é uma constante, então quaisquer dois vetores unitários e ortogonais de T_pX satisfazem as condições da proposição.

Suponhamos que k_n não é constante. Consideremos a função $\tilde{k}_n : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{k}_n(a, b) = k_n (aX_u(p) + bX_v(p)), \quad (a, b) \neq (0, 0),$$

isto é,

$$\tilde{k}_n(a, b) = \frac{a^2e_0 + 2abf_0 + b^2g_0}{a^2E_0 + 2abF_0 + b^2G_0}.$$

Esta função é diferenciável já que $(a, b) \neq (0, 0)$. Além disso, para todo $\lambda \neq 0$, $\tilde{k}_n(\lambda a, \lambda b) = \tilde{k}_n(a, b)$. Portanto, para obter os valores mínimo e máximo da função \tilde{k}_n , basta restringir \tilde{k}_n à circunferência C de \mathbb{R}^2 de raio 1 dada por $a^2 + b^2 = 1$. Como \tilde{k}_n é contínua, então existem pontos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) de C tais que

$$k_1 = \tilde{k}_n(a_1, b_1) \quad k_2 = \tilde{k}_n(a_2, b_2) \quad (1.1)$$

são respectivamente o mínimo e o máximo da função \tilde{k}_n restrita a C . Portanto,

$$k_1 \leq \tilde{k}_n(a, b) \leq k_2,$$

para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Além disso, como \tilde{k}_n não é constante, $k_1 < k_2$.

Consideremos agora os vetores de T_pX

$$\bar{w}_1 = a_1X_u(p) + b_1X_v(p),$$

$$\bar{w}_2 = a_2X_u(p) + b_2X_v(p).$$

Pela própria definição de \tilde{k}_n , temos que, para todo $w \in T_pX - 0$,

$$k_1 = \tilde{k}_n(\bar{w}_1) \leq k_n \leq \tilde{k}_n(\bar{w}_2) = k_2.$$

Vamos provar que \bar{w}_1 e \bar{w}_2 são vetores ortogonais. Como (a_1, b_1) e (a_2, b_2) dão o mínimo e o máximo da função \tilde{k}_n , então as derivadas parciais de \tilde{k}_n são nulas nestes pontos. Calculando essas derivadas parciais e usando (1.1), obtemos as seguintes expressões

$$(e_0 - k_1E_0) a_1 + (f_0 - k_1F_0) b_1 = 0, \quad (1.2)$$

$$(e_0 - k_2E_0) a_2 + (f_0 - k_2F_0) b_2 = 0, \quad (1.3)$$

$$(f_0 - k_1F_0) a_1 + (g_0 - k_1G_0) b_1 = 0, \quad (1.4)$$

$$(f_0 - k_2F_0) a_2 + (g_0 - k_2G_0) b_2 = 0. \quad (1.5)$$

Se a_1, a_2, b_1, b_2 são não-nulos, então subtraímos a equação (1.2) multiplicada por a_2 da equação (1.3) multiplicada por a_1 , em seguida subtraímos a equação (1.4) multiplicada por b_2 da equação (1.5) multiplicada por b_1 . Finalmente, somando as equações obtidas, temos que

$$(k_1 - k_2)(a_1a_2E_0 + a_1b_2F_0 + a_2b_1F_0 + b_1b_2G_0) = 0.$$

Como $k_1 \neq k_2$, concluímos que

$$\langle \bar{w}_1, \bar{w}_2 \rangle = a_1 a_2 E_0 + a_1 b_2 F_0 + a_2 b_1 F_0 + b_1 b_2 G_0 = 0.$$

De modo análogo, prova-se que \bar{w}_1 e \bar{w}_2 são ortogonais quando algum dos números a_1, a_2, b_1, b_2 se anula. Observamos que obtivemos dois vetores ortogonais \bar{w}_1, \bar{w}_2 , não necessariamente unitários (embora $a_i^2 + b_i^2 = 1, \quad i = 1, 2$), que dão o mínimo e o máximo da função \tilde{k}_n . Considerando

$$w_1 = \frac{\bar{w}_1}{|\bar{w}_1|}, \quad w_2 = \frac{\bar{w}_2}{|\bar{w}_2|},$$

como $\tilde{k}_n(\lambda w) = k_n(w), \quad \forall \lambda \neq 0$, concluímos que w_1 e w_2 satisfazem as condições da proposição. \square

Com a notação da proposição anterior, os vetores w_1 e w_2 são chamados **vetores principais** de X em p e as curvaturas k_1, k_2 são denominadas **curvaturas principais** de X em p . As direções de $T_p X$ determinadas pelos vetores principais são chamadas **direções principais**.

O produto das curvaturas principais $K(p) = k_1 k_2$ denomina-se **curvatura gaussiana** de X em p e a semi-soma de k_1 e k_2 , $H(p) = \frac{k_1 + k_2}{2}$, é chamada **curvatura média** de X em p . Segue-se dessas definições que as curvaturas principais de X em p são soluções da equação

$$x^2 - 2H(p)x + K(p) = 0.$$

Proposição 4. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Se $p = (u_0, v_0)$, então,

$$H(p) = \frac{1}{2} \frac{e_0 G_0 - 2f_0 F_0 + E_0 g_0}{E_0 G_0 - F_0^2},$$

$$K(p) = \frac{e_0 g_0 - f_0^2}{E_0 G_0 - F_0^2}.$$

Demonstração. Se um número real k_0 é uma curvatura principal em p , na direção de $w = a_0 X_u(p) + b_0 X_v(p)$, então

$$(e_0 - k_0 E_0) a_0 + (f_0 - k_0 F_0) b_0 = 0,$$

$$(f_0 - k_0 F_0) a_0 + (g_0 - k_0 G_0) b_0 = 0.$$

De fato, como k_0 é o valor mínimo ou máximo da função (olhar a demonstração da Proposição 3)

$$\frac{a^2 e_0 + 2abf_0 + b^2 g_0}{a^2 E_0 + 2abF_0 + b^2 G_0}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\},$$

em (a_0, b_0) , obtemos o sistema de equações acima calculando as derivadas parciais dessa função em (a_0, b_0) .

Segue-se do fato que (a_0, b_0) é uma solução não-trivial do sistema que o determinante

$$\begin{vmatrix} e_0 - k_0 E_0 & f_0 - k_0 F_0 \\ f_0 - k_0 F_0 & g_0 - k_0 G_0 \end{vmatrix} = 0,$$

isto é, k_0 satisfaz a equação

$$x^2 - \frac{e_0 G_0 - 2f_0 F_0 + E_0 g_0}{E_0 G_0 - F_0^2} x + \frac{e_0 g_0 - f_0^2}{E_0 G_0 - F_0^2} = 0.$$

Pela relação entre os coeficientes de uma equação do segundo grau e as raízes da equação, concluímos que

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{1}{2} \frac{e_0 G_0 - 2f_0 F_0 + E_0 g_0}{E_0 G_0 - F_0^2}, \\ K(p) &= \frac{e_0 g_0 - f_0^2}{E_0 G_0 - F_0^2}. \end{aligned}$$

□

Definição 15. Uma família (diferenciável) a 1-parâmetro de retas $\{\alpha(t), w(t)\}$ é uma correspondência que associa a cada $t \in I$ um ponto $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ e um vetor $w(t) \in \mathbb{R}^3$, $w(t) \neq 0$, tais que ambos $\alpha(t)$ e $w(t)$ sejam diferenciáveis em t . Para cada $t \in I$, a reta L_t passando por $\alpha(t)$ que é gerada por $w(t)$ é chamada **a reta da família em t**.

Dada uma família a 1-parâmetro de retas $\{\alpha(t), w(t)\}$, a superfície parametrizada

$$X(t, v) = \alpha(t) + vw(t), t \in I, v \in \mathbb{R},$$

é chamada **superfície regrada** gerada pela família $\{\alpha(t), w(t)\}$. As retas L_t são chamadas as **geratrizes**, e a curva $\alpha(t)$ é chamada **diretriz** da superfície X .

Exemplo 1. Uma das superfícies regradas mais conhecidas é o hiporbolóide de revolução. Sejam S^1 o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy , e $\alpha(s)$ uma parametrização de S^1 pelo comprimento de arco. Para cada s , seja $w(s) = \alpha'(s) + e_3$, onde e_3 é o vetor unitário do eixo Oz . Então

$$X(s, v) = \alpha(s) + v(\alpha'(s) + e_3)$$

é uma superfície regrada. Podemos colocá-la em uma forma mais familiar escrevendo

$$X(s, v) = (\cos(s) - v \operatorname{sen}(s), \operatorname{sen}(s) + v \cos(s), v)$$

e observando que $x^2 + y^2 - z^2 = 1 + v^2 - v^2 = 1$. Isto mostra que o traço de X é um hiporbolóide de revolução.

É interessante observar que se tomarmos

$$w(s) = -\alpha'(s) + e_3,$$

teremos novamente a mesma superfície. Isto mostra que o hiperbolóide de revolução tem duas famílias de geratrizes.

A partir de agora, passamos a procurar sobre a superfície S , imagem da aplicação $X(t, v)$, dada por

$$X(t, v) = \alpha(t) + vw(t),$$

uma curva parametrizada $\beta(t)$ tal que $\langle \beta'(t), w'(t) \rangle = 0 \forall t \in I$.

Sem perda de generalidade podemos supor que $|w(t)| = 1$.

A importância da curva $\beta(t)$, chamada de linha de estrição da superfície S , no contexto do trabalho, ficará claro mais adiante.

Em outras palavras, podemos escrever

$$\beta(t) = \alpha(t) + u(t)w(t),$$

para alguma função $u = u(t)$. Para determinar $\beta(t)$ basta conhecer a função $u(t)$.

Supondo a existência de uma tal curva $\beta(t)$, obtemos

$$\beta'(t) = \alpha'(t) + u'(t)w(t) + u(t)w'(t),$$

portanto, como $\langle w(t), w'(t) \rangle = 0$,

$$0 = \langle \beta'(t), w'(t) \rangle = \langle \alpha'(t), w'(t) \rangle + u(t)\langle w'(t), w'(t) \rangle.$$

Segue que

$$\beta(t) = \alpha(t) + \left(-\frac{\langle \alpha', w' \rangle}{\langle w', w' \rangle} \right) w(t).$$

Mostraremos agora que a curva β não depende da escolha da diretriz α para a superfície regrada β .

Para provar esta afirmação, seja $\bar{\alpha}$ uma outra diretriz da superfície regrada; isto é, vale, para todo (t, v) ,

$$X(t, v) = \alpha(t) + vw(t) = \bar{\alpha}(t) + sw(t) \tag{1.6}$$

para alguma função $s = s(v)$. Então, obtemos

$$\beta - \bar{\beta} = (\alpha - \bar{\alpha}) + \frac{\langle \bar{\alpha}' - \alpha', w' \rangle}{\langle w', w' \rangle} w,$$

onde $\bar{\beta}$ é a linha de estrição correspondente a $\bar{\alpha}$. Por outro lado, a equação (1.6) implica que

$$\alpha - \bar{\alpha} = (s - v)w(t).$$

Assim,

$$\beta - \bar{\beta} = \left[(s - v) + \frac{\langle (v - s)w', w' \rangle}{\langle w', w' \rangle} \right] w = 0.$$

Isto prova a afirmação.

Tomaremos agora a curva $\beta(t)$ como diretriz da superfície regradada S e escreveremos a superfície da seguinte maneira:

$$X(t, m) = \beta(t) + mw(t).$$

Sendo assim,

$$X_t(t, m) = \beta'(t) + mw'(t),$$

$$X_m(t, m) = w(t)$$

e

$$X_t \times X_m = \beta' \times w + mw' \times w.$$

Como $\langle w', w \rangle = 0$ e $\langle w', \beta' \rangle = 0$, usando o duplo produto vetorial temos que:

$$\beta' \times w = \lambda w'$$

para alguma função $\lambda(t)$. Assim,

$$|X_t \times X_m|^2 = (\lambda^2 + m^2) |w'|^2.$$

Portanto, os eventuais pontos singulares (onde a diferencial não é injetora) da superfície regradada $X(t, m)$ ocorrem se $\lambda = 0$ e $m = 0$. Observe também que

$$\lambda(t) = \frac{\langle \beta' \times w, w' \rangle}{|w'|^2}.$$

Definição 16. Uma superfície regradada

$$X(t, m) = \beta(t) + mw(t)$$

é chamada desenvolvível se

$$\langle \beta'(t) \times w(t), w'(t) \rangle \equiv 0,$$

com $|w(t)| = 1$.

Na Definição 16, no caso em que $\beta'(t) = w(t)$, diz-se que $X(t, m)$ é uma superfície tangente de β .

Exemplo 2. Os exemplos mais comuns de superfícies desenvolvíveis são os cilindros, os cones e a superfície tangente à uma curva no espaço.

É importante salientar que, portanto, em uma superfície desenvolvível os pontos singulares ocorrem ao longo da linha de estrição, o que justifica a sua importância.

Voltando ao exemplo (1) fica fácil observar que o hiperbolóide não é uma superfície desenvolvível, pois não verifica a condição $\langle \beta'(s) \times w(s), w'(s) \rangle \equiv 0$ como mostramos abaixo. Temos

$$\begin{cases} \beta'(s) = (-\operatorname{sen}(s), \cos(s), 0), \\ w(s) = (-\operatorname{sen}(s), \cos(s), 1), \\ w'(s) = (-\cos(s), -\operatorname{sen}(s), 0). \end{cases}$$

Fazendo o produto misto, obtemos

$$\langle \beta'(s) \times w(s), w'(s) \rangle = -1 \neq 0.$$

2 Descrição do problema

O problema consiste em determinar a forma apropriada que uma superfície deve ter para que o processo na fabricação de embalagens seja o mais suave possível, isto é, sem que haja rasgos e/ou rugas do material.

Considerando o processo de formação da embalagem descrito na introdução, sabemos que a superfície a ser estudada é denominada superfície desenvolvível.

Neste trabalho a parte da máquina que se enquadra neste tipo de superfície será chamada de molde e o restante da máquina assemelha-se ao um cilindro vertical.

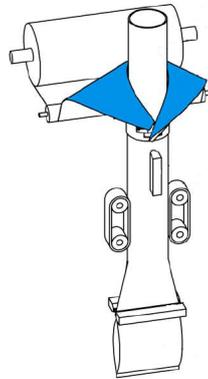


Figura 1 – Exemplo de Máquina de Empacotamento Automático

Primeiramente, consideramos duas curvas que irão nos auxiliar na construção do molde. Uma delas será chamada de \overline{BC} . Suponha que \overline{BC} é côncava e está contida em um plano. A outra curva será chamada de BC é obtida quando dobramos a curva \overline{BC} em torno de um cilindro circular.

Como temos uma curva no plano que está em transição para um cilindro, é esperado que determinados aspectos relacionados as curvas \overline{BC} e BC tais como comprimentos e ângulos sejam preservados.

Representamos os pontos de \overline{BC} e BC pelos vetores $\bar{\mathbf{r}}(s)$ (bidimensional) e $\mathbf{r}(s)$ (tridimensional), onde estas funções estão parametrizadas por comprimento de arco e são de classe C^3 .

Em seguida, introduzimos para cada curva seus respectivos Referenciais de Frenet. Para a curva \overline{BC} , temos os vetores tangente e normal e como \overline{BC} é côncava, então o seu vetor normal tem a segunda coordenada não-negativa, enquanto para a curva BC temos os vetores tangente, normal e binormal, pois BC encontra-se no espaço.

Como o molde é uma superfície desenvolvível ele é completamente determinado

pelas suas geratrizes. Portanto, por cada ponto de $\mathbf{r}(s)$ de BC passa uma geratriz cuja direção é dada por $\mathbf{d}(s)$ e, analogamente para \overline{BC} temos uma direção descrita por $\overline{\mathbf{d}}(s)$. Os vetores $\overline{\mathbf{d}}(s)$ e $\mathbf{d}(s)$ são expressos respectivamente nas bases ortonormais $\{\overline{\mathbf{t}}, \overline{\mathbf{n}}\}$ e $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$. Nas expressões dos vetores que representam as direções das geratrizes, temos dois ângulos: $\alpha(s)$ e $\phi(s)$, onde $\alpha(s)$ representa o ângulo entre a direção da geratriz e o vetor tangente em ambas as superfícies (pois elas são isométricas) e $\phi(s)$ é o ângulo entre o vetor normal $\mathbf{n}(s)$ e a projeção de $\mathbf{d}(s)$ sobre $\{\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$.

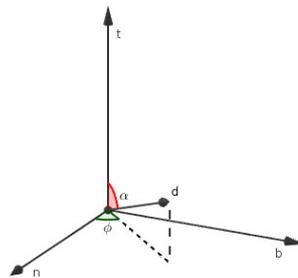


Figura 2 – Representação dos ângulos α e ϕ

Com as quantidades definidas acima, podemos olhar para as superfícies desenvolvíveis associadas a $\overline{\mathbf{r}}(s)$ e $\mathbf{r}(s)$.

Como exigimos que o processo de transição de uma superfície para a outra ocorra de maneira isométrica, então algumas condições aparecem nas derivadas em relação aos parâmetros (s, u) da forma paramétrica da superfície.

A partir destas condições, conseguimos determinar as derivadas das direções das geratrizes e juntamente com as fórmulas de Frenet obtivemos uma equação para o ângulo $\phi(s)$ e outra para o $\alpha(s)$ em termos da curvatura e torção. Essas equações fornecem dois pares de soluções (α_1, ϕ_1) e (α_2, ϕ_2) , a partir dos quais determinamos duas geratrizes que passam por um ponto $\mathbf{r}(s)$ de BC com direções dadas por $\mathbf{d}_1(s)$ e $\mathbf{d}_2(s)$, onde $\mathbf{d}_1(s)$ está contida no molde, enquanto $\mathbf{d}_2(s)$ pertence ao cilindro.

Diversos aspectos técnicos estão relacionados com a construção do molde e, de certa forma, alguns deles estão diretamente ligados a conceitos de Geometria Diferencial, com especial interesse o ângulo $\theta(s)$. Ele representa o ângulo entre os planos tangentes ao molde e ao cilindro em um ponto $\mathbf{r}(s)$ de BC . Este ângulo determina a inclinação do molde para que o material possa ser desenrolado durante o processo.

Outra maneira de fazer a construção do molde é considerar uma parametrização que seja gráfico. Os detalhes desta abordagem encontram-se no capítulo IV e um exemplo é ilustrado no capítulo V.

3 Descrição Matemática da Geometria do Molde

O molde é fabricado tomando-se uma seção plana e a dobrando ao longo de uma curva \overline{BC} que se deforma na curva BC no cilindro circular reto de raio R . Vamos supor que ambas as curvas sejam suficientemente diferenciáveis. Durante a deformação, dobras e rasgos não podem ocorrer, caso contrário o processo é interrompido, todas as distâncias e ângulos na superfície são preservados e, portanto, é razoável considerar que o molde seja isométrico ao plano.

De acordo com (FORSYTH, 1912) existem duas superfícies desenvolvíveis passando por BC isométricas ao plano. Uma característica dessas superfícies é que apresentam uma família a 1-parâmetro de retas, denominadas geratrizes, e ao longo de cada geratriz a superfície tem plano tangente constante. Este fato colabora para o sucesso do processo de formação da embalagem.

Os pontos das curvas \overline{BC} e BC são representados pelas parametrizações bidimensional e tridimensional $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(s)$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ respectivamente, onde s é o comprimento de arco e a derivada em relação à s será representada pelo índice s . Este parâmetro é o mesmo para as curvas \overline{BC} e BC devido à isometria.

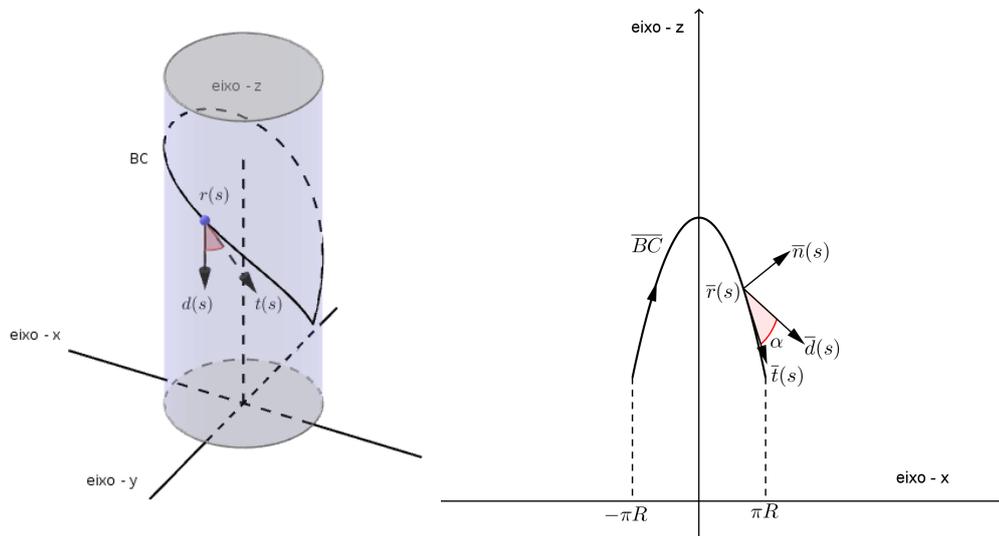


Figura 3 – Representação das curvas BC e \overline{BC}

Considere os vetores tangente e normal unitário à curva \overline{BC} dados por

$$\bar{\mathbf{t}}(s) = \bar{\mathbf{r}}_s(s), \quad \bar{\mathbf{n}}(s) = -\frac{\bar{\mathbf{t}}_s(s)}{\kappa(s)}. \quad (3.1)$$

Sejam $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ vetores tangente, normal unitário e binormal à curva BC , a saber

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{r}_s(s), \quad \mathbf{n}(s) = -\frac{\mathbf{t}_s(s)}{\kappa(s)}, \quad \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s). \quad (3.2)$$

Sejam $\bar{\kappa}$ e κ as curvaturas de \overline{BC} e BC , respectivamente dadas por

$$\bar{\kappa}(s) = |\bar{\mathbf{t}}_s(s)|, \quad \kappa(s) = |\mathbf{t}_s(s)|. \quad (3.3)$$

O molde é uma superfície desenvolvível gerada pela família a 1-parâmetro de geratrizes. Por isso, em cada ponto $\mathbf{r}(s)$ da curva BC passa uma geratriz do molde cuja direção é descrita pelo vetor unitário $\mathbf{d}(s)$. A geratriz correspondente no plano passa por cada ponto de $\bar{\mathbf{r}}(s)$ da curva \overline{BC} e sua direção é dada pelo vetor unitário $\bar{\mathbf{d}}(s)$. Os vetores $\mathbf{d}(s)$ e $\bar{\mathbf{d}}(s)$ podem ser expressos em termos da bases ortonormais $\{\bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{n}}\}$ e $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$. É possível notar que o ângulo α entre $\bar{\mathbf{d}}$ e $\bar{\mathbf{t}}$ e entre \mathbf{d} e \mathbf{t} é preservado devido a isometria entre o molde e o cilindro. Precisamente, temos

$$\bar{\mathbf{d}}(s) = \cos(\alpha(s))\bar{\mathbf{t}}(s) + \sin(\alpha(s))\bar{\mathbf{n}}(s), \quad (3.4)$$

$$\mathbf{d}(s) = \cos(\alpha(s))\mathbf{t}(s) + \sin(\alpha(s))[\cos(\phi(s))\mathbf{n}(s) + \sin(\phi(s))\mathbf{b}(s)], \quad (3.5)$$

onde $\phi(s)$ é o ângulo entre $\mathbf{n}(s)$ e a projeção de $\mathbf{d}(s)$ sobre o $\{\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ e $\alpha(s)$ é o ângulo entre $\bar{\mathbf{d}}(s)$ e $\bar{\mathbf{t}}(s)$ na curva \overline{BC} e, entre $\mathbf{d}(s)$ e $\mathbf{t}(s)$ na curva BC .

Para o plano acima de \overline{BC} e o molde, temos as representações paramétricas

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}(s, u) = \bar{\mathbf{r}}(s) + u\bar{\mathbf{d}}(s), \quad (3.6)$$

$$\boldsymbol{\rho}(s, u) = \mathbf{r}(s) + u\mathbf{d}(s) \quad (3.7)$$

onde, o parâmetro u é o comprimento de arco ao longo das geratrizes.

Exigimos que o mapeamento $\bar{\boldsymbol{\rho}}(s, u) \rightarrow \boldsymbol{\rho}(s, u)$ seja isométrico, isto é, a primeira forma fundamental das superfícies deve ser a mesma em pontos correspondentes. Desta maneira, impomos as seguintes condições nas derivadas de $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ e $\boldsymbol{\rho}$ em relação a u e s que serão indicadas por $\bar{\boldsymbol{\rho}}_u$, $\bar{\boldsymbol{\rho}}_s$, $\boldsymbol{\rho}_u$ e $\boldsymbol{\rho}_s$.

i) $|\bar{\boldsymbol{\rho}}_u| = |\boldsymbol{\rho}_u|$,

ii) $\bar{\boldsymbol{\rho}}_u \cdot \bar{\boldsymbol{\rho}}_s = \boldsymbol{\rho}_u \cdot \boldsymbol{\rho}_s$,

iii) $|\bar{\boldsymbol{\rho}}_s| = |\boldsymbol{\rho}_s|$.

Da condição (iii) temos que

$$|\bar{\mathbf{t}} + u\bar{\mathbf{d}}_s| = |\mathbf{t} + u\mathbf{d}_s|, \quad (3.8)$$

a qual implica nas três condições a seguir:

$$\text{iii a) } |\bar{\mathbf{t}}| = |\mathbf{t}|,$$

$$\text{iii b) } \bar{\mathbf{t}} \cdot \bar{\mathbf{d}}_s = \mathbf{t} \cdot \mathbf{d}_s,$$

$$\text{iii c) } |\bar{\mathbf{d}}_s| = |\mathbf{d}_s|.$$

Com os referenciais ortonormais definidos em (3.1) e (3.2) obtemos as fórmulas de Serret-Frenet para \overline{BC} e BC , respectivamente

$$\bar{\mathbf{t}}_s(s) = -\bar{\kappa}(s)\bar{\mathbf{n}}(s), \quad \bar{\mathbf{n}}_s(s) = \bar{\kappa}(s)\bar{\mathbf{t}}(s) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{t}_s(s) = -\kappa(s)\mathbf{n}(s), \quad \mathbf{n}_s(s) = \kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s), \quad \mathbf{b}_s(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s). \quad (3.10)$$

onde, $\tau(s)$ é a torção de BC dada por

$$\tau(s) = \frac{\mathbf{t}(s) \cdot (\mathbf{t}_s(s) \times \mathbf{t}_{ss}(s))}{\kappa^2(s)}. \quad (3.11)$$

Afim de explicitarmos o significado das equações (iii a, iii b e iii c), calcularemos $\bar{\mathbf{d}}_s(s)$ e $\mathbf{d}_s(s)$. Para não carregarmos demasiadamente a notação, omitiremos s das aplicações consideradas. Ex: $\alpha(s) = \alpha$.

Diferenciando a equação (3.4), obtemos

$$\boxed{\bar{\mathbf{d}}_s = -\text{sen}(\alpha) \alpha_s \bar{\mathbf{t}} + \cos(\alpha) \bar{\mathbf{t}}_s + \cos(\alpha) \alpha_s \bar{\mathbf{n}} + \text{sen}(\alpha) \bar{\mathbf{n}}_s.} \quad (3.12)$$

Utilizando as equações (3.9) em (3.12), temos

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{d}}_s &= -\text{sen}(\alpha) \alpha_s \bar{\mathbf{t}} - \cos(\alpha) \bar{\kappa} \bar{\mathbf{n}} + \cos(\alpha) \alpha_s \bar{\mathbf{n}} + \text{sen}(\alpha) \bar{\kappa} \bar{\mathbf{t}} \\ \bar{\mathbf{d}}_s &= -\text{sen}(\alpha) \bar{\mathbf{t}} (\alpha_s - \bar{\kappa}) + \cos(\alpha) \bar{\mathbf{n}} (-\bar{\kappa} + \alpha_s) \\ \bar{\mathbf{d}}_s &= (\bar{\kappa} - \alpha_s) [\text{sen}(\alpha) \bar{\mathbf{t}} - \cos(\alpha) \bar{\mathbf{n}}]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Diferenciando a equação (3.5), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_s &= -\text{sen}(\alpha) \alpha_s \mathbf{t} + \cos(\alpha) \mathbf{t}_s + \cos(\alpha) \cos(\phi) \alpha_s \mathbf{n} - \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) \phi_s \mathbf{n} + \\ &+ \text{sen}(\alpha) \cos(\phi) \mathbf{n}_s + \cos(\alpha) \text{sen}(\phi) \alpha_s \mathbf{b} + \\ &+ \text{sen}(\alpha) \cos(\phi) \phi_s \mathbf{b} + \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) \mathbf{b}_s. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Utilizando as equações (3.10) em (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_s &= -\text{sen}(\alpha) \alpha_s \mathbf{t} - \kappa \mathbf{n} \cos(\alpha) + \cos(\alpha) \cos(\phi) \alpha_s \mathbf{n} - \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) \phi_s \mathbf{n} + \\ &+ \text{sen}(\alpha) \cos(\phi) \kappa \mathbf{t} + \text{sen}(\alpha) \cos(\phi) \tau \mathbf{b} + \cos(\alpha) \text{sen}(\phi) \alpha_s \mathbf{b} + \text{sen}(\alpha) \cos(\phi) \phi_s \mathbf{b} - \\ &- \tau \mathbf{n} \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Rearranjando os termos, temos

$$\boxed{\mathbf{d}_s = (-\alpha_s \text{sen}(\alpha) + \kappa \text{sen}(\alpha) \cos(\phi)) \mathbf{t} + (\cos(\alpha) \cos(\phi) \alpha_s - \kappa \cos(\alpha) - (\phi_s + \tau) \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi)) \mathbf{n} + (\alpha_s \cos(\alpha) \text{sen}(\phi) + (\phi_s + \tau) \text{sen}(\alpha) \cos(\phi)) \mathbf{b}.} \quad (3.16)$$

3.1 Consequências da condição iii b

A condição (iii b) é dada por

$$\bar{\mathbf{t}} \cdot \bar{\mathbf{d}}_s = \mathbf{t} \cdot \mathbf{d}_s. \quad (3.17)$$

Calcularemos separadamente cada termo da equação (3.17). Primeiramente, calculamos o lado esquerdo. Para isso, substituímos a equação (3.13), obtendo

$$\bar{\mathbf{t}} \cdot \bar{\mathbf{d}}_s = \bar{\mathbf{t}} \cdot [(\bar{\kappa} - \alpha_s) (\sin(\alpha) \bar{\mathbf{t}} - \cos(\alpha) \bar{\mathbf{n}})].$$

De onde vem que

$$\boxed{\bar{\mathbf{t}} \cdot \bar{\mathbf{d}}_s = \bar{\kappa} \sin(\alpha) - \alpha_s \sin(\alpha)}. \quad (3.18)$$

Agora calculando o lado direito, substituímos a equação (3.15) no lado direito de (3.17) e temos

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot \mathbf{d}_s &= \mathbf{t} \cdot [(-\alpha_s \sin(\alpha) + \kappa \sin(\alpha) \cos(\phi)) \mathbf{t} + (\cos(\alpha) \cos(\phi) \alpha_s - \kappa \cos(\alpha) - \\ &\quad - (\phi_s + \tau) \sin(\alpha) \sin(\phi)) \mathbf{n} + (\alpha_s \cos(\alpha) \sin(\phi) + (\phi_s + \tau) \sin(\alpha) \cos(\phi)) \mathbf{b}]. \end{aligned}$$

Portanto

$$\boxed{\mathbf{t} \cdot \mathbf{d}_s = -\alpha_s \sin(\alpha) + \kappa \sin(\alpha) \cos(\phi)}. \quad (3.19)$$

Igualando (3.18) e (3.19) obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\kappa} \sin(\alpha) - \alpha_s \sin(\alpha) &= -\alpha_s \sin(\alpha) + \kappa \sin(\alpha) \cos(\phi) \\ \bar{\kappa} \sin(\alpha) - \cancel{\alpha_s \sin(\alpha)} &= \cancel{-\alpha_s \sin(\alpha)} + \kappa \sin(\alpha) \cos(\phi). \end{aligned}$$

Assim, obtemos a relação (3.20)

$$\boxed{\cos(\phi) = \frac{\bar{\kappa}}{\kappa}}, \quad (3.20)$$

pois α é estritamente maior que zero.

3.2 Consequências da condição iii c

A condição (iii c) é dado por

$$|\bar{\mathbf{d}}_s| = |\mathbf{d}_s|. \quad (3.21)$$

Calcularemos cada termo da equação (3.21) separadamente. Começando pelo lado esquerdo, ao substituírmos a equação (3.13) obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{d}}_s \cdot \bar{\mathbf{d}}_s &= [(\bar{\kappa} - \alpha_s) (\sin(\alpha) \bar{\mathbf{t}} - \cos(\alpha) \bar{\mathbf{n}})] \cdot [(\bar{\kappa} - \alpha_s) (\sin(\alpha) \bar{\mathbf{t}} - \cos(\alpha) \bar{\mathbf{n}})] \\ \bar{\mathbf{d}}_s \cdot \bar{\mathbf{d}}_s &= (-\alpha_s + \bar{\kappa})^2 (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) \\ \bar{\mathbf{d}}_s \cdot \bar{\mathbf{d}}_s &= \bar{\kappa}^2 - 2\alpha_s \bar{\kappa} + \alpha_s^2. \end{aligned}$$

De onde vem que

$$\boxed{\bar{\mathbf{d}}_s \cdot \bar{\mathbf{d}}_s = (\bar{\kappa} - \alpha_s)^2.} \quad (3.22)$$

No lado direito da equação (3.21), substituímos (3.15) e obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_s \cdot \mathbf{d}_s &= (\text{sen}(\alpha)(-\alpha_s + \cos(\phi)\kappa))^2 \\ &+ \left(\cos(\alpha)(\alpha_s \cos \phi - \kappa) - (\phi_s + \tau) \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) \right)^2 \\ &+ (\alpha_s \cos(\alpha) \text{sen}(\phi) + (\phi_s + \tau) \text{sen}(\alpha) \cos(\phi))^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Expandindo os produtos notáveis, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_s \cdot \mathbf{d}_s &= \text{sen}^2(\alpha)\alpha_s^2 + \text{sen}^2(\alpha) \cos^2(\phi)\kappa^2 - 2\alpha_s\kappa \text{sen}^2(\alpha) \cos(\phi) \\ &+ \kappa^2 \cos^2(\alpha) - 2\alpha_s\kappa \cos^2(\alpha) \cos(\phi) + (\phi_s + \tau)^2 \text{sen}^2(\alpha) \text{sen}^2(\phi) \\ &+ \left(-\text{sen}(2\alpha) \frac{\text{sen}(2\phi)}{2} \alpha_s + \text{sen}(2\alpha) \text{sen}(\phi) \kappa \right) (\phi_s + \tau) \\ &+ \alpha_s^2 \cos^2(\alpha) \text{sen}^2(\phi) + (\phi_s + \tau)^2 \text{sen}^2(\alpha) \cos^2(\phi) + \alpha_s \phi_s \text{sen}(2\alpha) \frac{\text{sen}(2\phi)}{2} \\ &+ \alpha_s \tau \text{sen}(2\alpha) \frac{\text{sen}(2\phi)}{2} + \alpha_s^2 \cos^2(\phi) \cos^2(\alpha). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Simplificando os termos simétricos e utilizando a relação trigonométrica fundamental, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_s \cdot \mathbf{d}_s &= \alpha_s^2 \text{sen}^2(\alpha) - 2\alpha_s\kappa \cos(\phi) \underbrace{(\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha))}_{=1} \\ &+ \alpha_s^2 \cos^2(\alpha) \cos^2(\phi) + \text{sen}^2(\alpha) \text{sen}^2(\phi) (\phi_s + \tau)^2 + \kappa \phi_s \text{sen}(2\alpha) \text{sen}(\phi) \\ &+ \cancel{\kappa \tau \text{sen}(2\alpha) \text{sen}(\phi)} - \cancel{\alpha_s \phi_s \text{sen}(2\alpha) \frac{\text{sen}(2\phi)}{2}} + (\text{sen}^2(\alpha) \cos^2(\phi) + \cos^2(\alpha)) \kappa^2 \\ &+ \cos^2(\alpha) \text{sen}^2(\phi) \alpha_s^2 + \text{sen}^2(\alpha) \cos^2(\phi) (\phi_s + \tau)^2 + \cancel{\alpha_s \phi_s \text{sen}(2\alpha) \frac{\text{sen}(2\phi)}{2}} \\ &+ \cancel{\alpha_s \tau \text{sen}(2\alpha) \frac{\text{sen}(2\phi)}{2}} - \cancel{\alpha_s \tau \text{sen}(2\alpha) \frac{\text{sen}(2\phi)}{2}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Colocando alguns termos em evidência e novamente utilizando a relação trigonométrica fundamental, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_s \cdot \mathbf{d}_s &= (\text{sen}^2(\alpha) \cos^2(\phi) + \cos^2(\alpha)) \kappa^2 + \alpha_s^2 \text{sen}^2(\alpha) - 2\alpha_s\kappa \cos^2(\phi) \\ &+ 2\kappa \cos(\alpha) \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) (\phi_s + \tau) + \alpha_s^2 \cos^2(\alpha) \underbrace{(\cos^2(\phi) + \text{sen}^2(\phi))}_{=1} \\ &+ \text{sen}^2(\alpha) (\phi_s + \tau)^2 \underbrace{(\text{sen}^2(\phi) + \cos^2(\phi))}_{=1} \\ \mathbf{d}_s \cdot \mathbf{d}_s &= (\text{sen}^2(\alpha) \cos^2(\phi) + \cos^2(\alpha)) \kappa^2 + \alpha_s^2 \underbrace{(\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha))}_{=1} - 2\alpha_s\kappa \cos(\phi) \\ &+ \text{sen}^2(\alpha) (\phi_s + \tau)^2 + 2\kappa \cos(\alpha) \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) (\phi_s + \tau). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Portanto,

$$\mathbf{d}_s \cdot \mathbf{d}_s = \left(\text{sen}^2(\alpha) \cos^2(\phi) + \cos^2(\alpha) \right) \kappa^2 - 2\alpha_s \kappa \cos(\phi) + \alpha_s^2 + \text{sen}^2(\alpha) (\phi_s + \tau)^2 + 2 \cos(\alpha) \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) \kappa (\phi_s + \tau). \quad (3.27)$$

Igualando as equações (3.22) e (3.26) temos

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}^2 - 2\alpha_s \bar{\kappa} + \alpha_s^2 &= \left(\text{sen}^2(\alpha) \cos^2(\phi) + \cos^2(\alpha) \right) \kappa^2 - 2\alpha_s \kappa \cos(\phi) + \alpha_s^2 + \\ &+ \text{sen}^2(\alpha) (\phi_s + \tau)^2 + 2 \cos(\alpha) \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) \kappa (\phi_s + \tau). \end{aligned} \quad (3.28)$$

De onde vem que

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}^2 - 2\alpha_s \bar{\kappa} &= \left(\text{sen}^2(\alpha) \cos^2(\phi) + \cos^2(\alpha) \right) \kappa^2 + 2 \cos(\alpha) \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) \kappa (\phi_s + \tau) \\ &+ \text{sen}^2(\alpha) (\phi_s + \tau)^2 - 2\alpha_s \kappa \cos(\phi). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Da equação (3.20), podemos escrever

$$\bar{\kappa} = \kappa \cos(\phi). \quad (3.30)$$

Substituindo a equação (3.30) na equação (3.28), obtemos

$$\begin{aligned} \left(\text{sen}^2(\alpha) \cos^2(\phi) + \cos^2(\alpha) \right) \kappa^2 + \text{sen}^2(\alpha) (\phi_s + \tau)^2 - \kappa^2 \cos^2(\phi) \\ + \text{sen}(2\alpha) \text{sen}(\phi) \kappa (\phi_s + \tau) = 0. \end{aligned}$$

Organizando os termos, tem-se

$$\begin{aligned} \left(\text{sen}^2(\alpha) \cos^2(\phi) + \cos^2(\alpha) - \cos^2(\phi) \right) \kappa^2 + 2 \cos(\alpha) \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) \kappa (\phi_s + \tau) + \\ \text{sen}^2(\alpha) (\phi_s + \tau)^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Utilizando $\text{sen}^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$, temos

$$\begin{aligned} \left((1 - \cos^2(\alpha)) \cos^2(\phi) + \cos^2(\alpha) - \cos^2(\phi) \right) \kappa^2 + \text{sen}(2\alpha) \text{sen}(\phi) \kappa (\phi_s + \tau) + \\ \text{sen}^2(\alpha) (\phi_s + \tau)^2 = 0. \end{aligned}$$

Continuando as simplificações e com o auxílio das relações trigonométricas fundamental, $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}(x) \cos(x)$ e definindo $y = (\phi_s + \tau)$, temos

$$\begin{aligned} \left(-\cos^2(\alpha) \cos^2(\phi) + \cos^2(\alpha) \right) \kappa^2 + \text{sen}(2\alpha) \text{sen}(\phi) \kappa y + \text{sen}^2(\alpha) y^2 &= 0 \\ \left(-\left(1 - \text{sen}^2(\alpha)\right) \cos^2(\phi) + \cos^2(\alpha) \right) \kappa^2 + \text{sen}(2\alpha) \text{sen}(\phi) \kappa y + \text{sen}^2(\alpha) y^2 &= 0 \\ \left(-\cos^2(\phi) \cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \right) \kappa^2 + \text{sen}(2\alpha) \text{sen}(\phi) \kappa y + \text{sen}^2(\alpha) y^2 &= 0 \\ \left(\cos^2(\alpha) \left(1 - \cos^2(\phi)\right) \right) \kappa^2 + \text{sen}(2\alpha) \text{sen}(\phi) \kappa y + \text{sen}^2(\alpha) y^2 &= 0 \end{aligned}$$

obtemos

$$\cos^2(\alpha) \operatorname{sen}^2(\phi) \kappa^2 + \operatorname{sen}(2\alpha) \operatorname{sen}(\phi) \kappa y + \operatorname{sen}^2(\alpha) y^2 = 0. \quad (3.32)$$

Calculamos a equação (3.32) com o auxílio da fórmula de Bhaskara.

De fato, temos

$$\cos^2(\alpha) \operatorname{sen}^2(\phi) \kappa^2 + 2 \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\phi) \kappa y + \operatorname{sen}^2(\alpha) y^2 = 0. \quad (3.33)$$

Resolvendo (3.33), tem-se

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4 \cos^2(\alpha) \operatorname{sen}^2(\alpha) \operatorname{sen}^2(\phi) \kappa^2 - 4 \cos^2(\alpha) \operatorname{sen}^2(\alpha) \operatorname{sen}^2(\phi) \kappa^2$$

$$\Delta = 0$$

logo,

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y = -\frac{2 \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\phi) \kappa}{2 \operatorname{sen}^2(\alpha)}.$$

Simplificando e utilizando $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ temos

$$y = -\frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} \operatorname{sen}(\phi) \kappa$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = -\frac{\kappa \operatorname{sen}(\phi)}{y}.$$

Explicitando y obtemos

$$\operatorname{tg}(\alpha) = -\frac{\kappa \operatorname{sen}(\phi)}{(\phi_s + \tau)}. \quad (3.34)$$

A equação (3.34) pode ser reescrita como

$$\boxed{(\phi_s + \tau) = -\kappa \operatorname{cotg}(\alpha) \operatorname{sen}(\phi)}. \quad (3.35)$$

onde usou-se que $\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}$.

3.3 Eliminando as auto intersecções do molde

Nesta seção, mostraremos como eliminar qualquer singularidade que possa existir na superfície desenvolvível. Para isso, devemos utilizar o fato de que as singularidades de uma superfície desenvolvível são encontradas na sua linha de estrição. A linha de

estricção é determinada pela propriedade que os vetores tangentes $\boldsymbol{\rho}_u$ e $\boldsymbol{\rho}_s$ são linearmente dependentes.

Usando (3.30) e (3.35) em (3.15), temos

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_s &= (-\alpha_s \text{sen}(\alpha) + \bar{\kappa} \text{sen}(\alpha)) \mathbf{t} \\ &+ (\alpha_s \cos(\alpha) \cos(\phi) - \kappa \cos(\alpha) + \cotg(\alpha) \text{sen}(\phi) \kappa \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi)) \mathbf{n} \\ &+ (\alpha_s \cos(\alpha) \text{sen}(\phi) - \cotg(\alpha) \text{sen}(\phi) \kappa \text{sen}(\alpha) \cos(\phi)) \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Em (3.36) usando o fato de que $\cotg(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)}$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_s &= (\bar{\kappa} \text{sen}(\alpha) - \alpha_s \text{sen}(\alpha)) \mathbf{t} \\ &+ (\alpha_s \cos(\alpha) \cos(\phi) - \kappa \cos(\alpha) + \kappa \cos(\alpha) \text{sen}^2(\phi)) \mathbf{n} \\ &+ (\alpha_s \cos(\alpha) \text{sen}(\phi) - \kappa \cos(\alpha) \text{sen}(\phi) \cos(\phi)) \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Utilizando a equação (3.30) na (3.37) e rearranjando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_s &= \text{sen}(\alpha) (\bar{\kappa} - \alpha_s) \mathbf{t} + (\alpha_s \cos(\alpha) \cos(\phi) - \bar{\kappa} \cos(\alpha) \cos(\phi)) \mathbf{n} \\ &+ (\alpha_s \cos(\alpha) \text{sen}(\phi) - \bar{\kappa} \cos(\alpha) \text{sen}(\phi)) \mathbf{b} \\ \mathbf{d}_s &= \text{sen}(\alpha) (\bar{\kappa} - \alpha_s) \mathbf{t} + \cos(\alpha) \cos(\phi) (\alpha_s - \bar{\kappa}) \mathbf{n} + \cos(\alpha) \text{sen}(\phi) (\alpha_s - \bar{\kappa}) \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{\mathbf{d}_s = (\alpha_s - \bar{\kappa}) (-\text{sen}(\alpha) \mathbf{t} - \cos(\alpha) (\cos(\phi) \mathbf{n} + \text{sen}(\phi) \mathbf{b}))}. \quad (3.38)$$

Diferenciando a equação (3.7) em relação a s e a u respectivamente, temos

$$\boldsymbol{\rho}_s = \mathbf{t} + u \mathbf{d}_s \quad (3.39)$$

$$\boldsymbol{\rho}_u = \mathbf{d}. \quad (3.40)$$

Substituindo (3.38) em (3.39), obtemos

$$\boxed{\boldsymbol{\rho}_s = \mathbf{t} - u (\alpha_s - \bar{\kappa}) (\text{sen}(\alpha) \mathbf{t} - \cos(\alpha) (\cos(\phi) \mathbf{n} + \text{sen}(\phi) \mathbf{b}))}. \quad (3.41)$$

e substituindo (3.5) em (3.40), temos

$$\boxed{\boldsymbol{\rho}_u = \cos(\alpha) \mathbf{t} + \text{sen}(\alpha) \cos(\phi) \mathbf{n} + \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) \mathbf{b}}. \quad (3.42)$$

Fazendo o produto vetorial entre os vetores $\boldsymbol{\rho}_u$ e $\boldsymbol{\rho}_s$, encontramos

$$\boldsymbol{\rho}_u \times \boldsymbol{\rho}_s = \begin{vmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \\ \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \cos(\phi) & \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) \\ 1 - u (\alpha_s - \bar{\kappa}) \text{sen}(\alpha) & u (\alpha_s - \bar{\kappa}) \cos(\alpha) \cos(\phi) & u (\alpha_s - \bar{\kappa}) \cos(\alpha) \text{sen}(\phi) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\rho_u \times \rho_s &= \left[u(\alpha_s - \bar{\kappa}) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \frac{\text{sen}(2\phi)}{2} - u(\alpha_s - \bar{\kappa}) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \frac{\text{sen}(2\phi)}{2} \right] \mathbf{t} \\
&+ \left[\text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) (1 - u(\alpha_s - \bar{\kappa}) \text{sen}(\alpha)) \right. \\
&- \left. u \cos(\alpha) (\alpha_s - \bar{\kappa}) \cos(\alpha) \text{sen}(\phi) \right] \mathbf{n} \\
&+ \left[u \cos(\alpha) (\alpha_s - \bar{\kappa}) \cos(\alpha) \cos(\phi) \right. \\
&- \left. \text{sen}(\alpha) \cos(\phi) (1 - u(\alpha_s - \bar{\kappa}) \text{sen}(\alpha)) \right] \mathbf{b}
\end{aligned}$$

Usando a distributividade, temos

$$\begin{aligned}
\rho_u \times \rho_s &= \left(\text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) - u(\alpha_s - \bar{\kappa}) \text{sen}^2(\alpha) \text{sen}(\phi) \right. \\
&- \left. \cos^2(\alpha) u(\alpha_s - \bar{\kappa}) \text{sen}(\phi) \right) \mathbf{n} \\
&+ \left(\cos^2(\alpha) u(\alpha_s - \bar{\kappa}) \cos(\phi) - \text{sen}(\alpha) \cos(\phi) \right. \\
&+ \left. \text{sen}^2(\alpha) \cos(\phi) u(\alpha_s - \bar{\kappa}) \right) \mathbf{b} \\
&= \left(\text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) - u(\alpha_s - \bar{\kappa}) \text{sen}(\phi) \left(\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \right) \right) \mathbf{n} \\
&+ \left(u(\alpha_s - \bar{\kappa}) \cos(\phi) \left(\cos^2(\alpha) + \text{sen}^2(\alpha) \right) - \text{sen}(\alpha) \cos(\phi) \right) \mathbf{b} \quad (3.43)
\end{aligned}$$

Utilizando em (3.43) o fato de que $\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\rho_u \times \rho_s &= \left(\text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) - u(\alpha_s - \bar{\kappa}) \text{sen}(\phi) \right) \mathbf{n} \\
&+ \left(u(\alpha_s - \bar{\kappa}) \cos(\phi) - \text{sen}(\alpha) \cos(\phi) \right) \mathbf{b}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{\rho_u \times \rho_s = (\text{sen}(\alpha) - u(\alpha_s - \bar{\kappa})) (\text{sen}(\phi) \mathbf{n} - \cos(\phi) \mathbf{b})}. \quad (3.44)$$

A dependência linear é expressa por

$$\text{sen}(\alpha) - u(\alpha_s - \bar{\kappa}) = 0.$$

$$\boxed{u_0(s) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha_s(s) - \bar{\kappa}(s)}}. \quad (3.45)$$

Portanto, a linha de estrição pode ser expressa na representação paramétrica, dada por

$$\rho(s) = \mathbf{r}(s) + u_0(s) \mathbf{d}(s). \quad (3.46)$$

Além disso, do ponto de vista prático o molde não pode possuir singularidades, então exigimos que a linha de estrição não esteja sobre o molde. Isto leva-nos a condição

que $u_0(s) < 0$ ou $\alpha_s - \bar{\kappa} < 0$. Seja $\psi = \psi(s)$ o ângulo entre o vetor tangente $\bar{\mathbf{t}}(s)$ a curva \overline{BC} e a direção positiva do eixo x . Logo, $\frac{d\psi}{ds} = -\bar{\kappa}$ e a condição que evita qualquer singularidade torna-se

$$\alpha_s(s) - \bar{\kappa}(s) = \frac{d}{ds} [\alpha(s) + \psi(s)] < 0. \quad (3.47)$$

Observe que $\alpha + \psi$ é o ângulo entre a geratriz $\bar{\mathbf{d}}(s)$ e a direção positiva do eixo x . De acordo com (3.47), podemos notar que conforme $\alpha + \psi$ diminui o parâmetro s aumenta fazendo com que as geratrizes através de $\bar{\mathbf{d}}(s)$ estão divergindo, assim evitando as auto intersecções.

3.4 Vetor Normal da superfície desenvolvível

Nesta seção calcularemos o vetor normal à superfície desenvolvível (molde) que é definido por

$$\mathbf{N}(u, s) = \frac{\boldsymbol{\rho}_u \times \boldsymbol{\rho}_s}{|\boldsymbol{\rho}_u \times \boldsymbol{\rho}_s|}(u, s). \quad (3.48)$$

Para isso, é necessário calcular cada um dos termos da definição (3.48).

Começamos com o denominador da equação (3.48), obtendo

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\rho}_u \times \boldsymbol{\rho}_s| &= \left[(\sin(\alpha) - u(\alpha_s - \bar{\kappa}))^2 (\sin(\phi) \mathbf{n} - \cos(\phi) \mathbf{b})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[(\sin(\alpha) - u(\alpha_s - \bar{\kappa}))^2 (\sin^2(\phi) \mathbf{n}^2 - \sin(2\phi) \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} + \cos^2(\phi) \mathbf{b}^2) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[(\sin(\alpha) - u(\alpha_s - \bar{\kappa}))^2 (\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= (\sin(\alpha) - u(\alpha_s - \bar{\kappa})) \end{aligned} \quad (3.49)$$

e substituindo (3.49) em (3.48) juntamente com (3.44), temos

$$\mathbf{N} = \frac{(\sin(\alpha) - u(\alpha_s - \bar{\kappa})) (\sin(\phi) \mathbf{n} - \cos(\phi) \mathbf{b})}{(\sin(\alpha) - u(\alpha_s - \bar{\kappa}))}.$$

Portanto, o vetor normal à superfície desenvolvível $\boldsymbol{\rho}$ é dado por

$$\boxed{\mathbf{N} = \sin(\phi) \mathbf{n} - \cos(\phi) \mathbf{b}.} \quad (3.50)$$

3.5 Curvaturas Principais e o ângulo θ

Nesta seção, calcularemos as curvaturas principais da superfície desenvolvível e o ângulo θ entre a superfície e o cilindro. Começaremos pelas curvaturas principais.

Derivando a equação (3.50) em relação a s e u , obtemos

$$\mathbf{N}_s = \cos(\phi) \phi_s \mathbf{n} + \sin(\phi) \mathbf{n}_s + \sin(\phi) \phi_s \mathbf{b} - \cos(\phi) \mathbf{b}_s \quad (3.51)$$

$$\mathbf{N}_u = 0. \quad (3.52)$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são definidos como:

$$e = -\langle \mathbf{N}_s, \boldsymbol{\rho}_s \rangle \quad (3.53)$$

$$f = -\langle \mathbf{N}_u, \boldsymbol{\rho}_s \rangle \quad (3.54)$$

$$g = -\langle \mathbf{N}_u, \boldsymbol{\rho}_u \rangle. \quad (3.55)$$

É fácil notar que ao substituirmos a equação (3.52) nas equações (3.54) e (3.55), obtemos como resultados

$$\boxed{f = g = 0.} \quad (3.56)$$

Resta-nos calcular o coeficiente e . Para isso, usaremos as equações (A.17) e (3.51) na equação (3.53), porém, antes de substituí-las em (3.53), explicitaremos (A.17) utilizando as equações (3.2) e (3.27).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_s &= \mathbf{t} + u(-\alpha_s \operatorname{sen}(\alpha) + \kappa \cos(\phi) \operatorname{sen}(\alpha)) \mathbf{t} \\ &+ u(\alpha_s \cos(\alpha) \cos(\phi) - \kappa \cos(\alpha) - (\phi_s + \tau) \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\phi)) \mathbf{n} \\ &+ u(\alpha_s \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\phi) + (\phi_s + \tau) \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\phi)) \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Substituindo na equação (3.57) as equações (3.30) e (3.35), temos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_s &= \mathbf{t} + u(-\alpha_s \operatorname{sen}(\alpha) + \bar{\kappa} \operatorname{sen}(\alpha)) \mathbf{t} + u(\alpha_s \cos(\alpha) \cos(\phi) - \kappa \cos(\alpha) + \\ &\kappa \operatorname{sen}^2(\phi) \cos(\alpha)) \mathbf{n} + u(\alpha_s \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\phi) - \underbrace{\kappa \cos(\phi) \operatorname{sen}(\phi) \cos(\alpha)}_{=\bar{\kappa}}) \mathbf{b} \\ \boldsymbol{\rho}_s &= \mathbf{t} + u(-\alpha_s \operatorname{sen}(\alpha) + \bar{\kappa} \operatorname{sen}(\alpha)) \mathbf{t} + u(\alpha_s \cos(\alpha) \cos(\phi) - \kappa \cos(\alpha) + \\ &\kappa \operatorname{sen}^2(\phi) \cos(\alpha)) \mathbf{n} + u(\alpha_s \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\phi) - \bar{\kappa} \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\phi)) \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Agora, substituímos as equações (3.51) e (3.58) na equação (3.53), obtemos

$$\begin{aligned} e &= -\langle \underbrace{\cos(\phi) \phi_s \mathbf{n}}_A + \underbrace{\operatorname{sen}(\phi) \mathbf{n}_s}_B + \underbrace{\operatorname{sen}(\phi) \phi_s \mathbf{b}}_C - \underbrace{\cos(\phi) \mathbf{b}_s}_D, \underbrace{\mathbf{t}}_a \rangle \\ &+ u \underbrace{(-\alpha_s \operatorname{sen}(\alpha) + \bar{\kappa} \operatorname{sen}(\alpha)) \mathbf{t}}_b \\ &+ u \underbrace{(\alpha_s \cos(\alpha) \cos(\phi) - \kappa \cos(\alpha) + \kappa \operatorname{sen}^2(\phi) \cos(\alpha)) \mathbf{n}}_c \\ &+ u \underbrace{(\alpha_s \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\phi) - \bar{\kappa} \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\phi)) \mathbf{b}}_d \rangle. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Primeiramente, calcularemos o produto escalar acima sem considerar o sinal negativo. Faremos as distributivas em etapas. Calculando o primeiro termo:

$$\begin{aligned} a(A + B + C + D) &= \phi_s \cos(\phi) \underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle}_{=0} + \operatorname{sen}(\phi) \underbrace{\langle \mathbf{n}_s, \mathbf{t} \rangle}_{\kappa} + \phi_s \operatorname{sen}(\phi) \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle}_{=0} \\ &- \cos(\phi) \underbrace{\langle \mathbf{b}_s, \mathbf{t} \rangle}_{=0}. \end{aligned}$$

Logo,

$$a(A + B + C + D) = \kappa \text{sen}(\phi). \quad (3.60)$$

Calculando o segundo termo:

$$\begin{aligned} b(A + B + C + D) &= u \text{sen}(\alpha) (\bar{\kappa} - \alpha_s) (\phi_s \cos(\phi) \underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle}_{=0} + \text{sen}(\phi) \underbrace{\langle \mathbf{n}_s, \mathbf{t} \rangle}_{=\kappa}) \\ &\quad + \phi_s \text{sen}(\phi) \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle}_{=0} - \cos(\phi) \underbrace{\langle \mathbf{b}_s, \mathbf{t} \rangle}_{=0}. \end{aligned}$$

Logo,

$$b(A + B + C + D) = u \kappa \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) (\bar{\kappa} - \alpha_s). \quad (3.61)$$

Calculando o terceiro termo:

$$\begin{aligned} c(A + B + C + D) &= u \cos(\alpha) (\alpha_s \cos(\phi) - \kappa + \kappa \text{sen}^2(\phi)) (\phi_s \cos(\phi) \underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}_{=1} \\ &\quad + \text{sen}(\phi) \underbrace{\langle \mathbf{n}_s, \mathbf{n} \rangle}_{=0} + \phi_s \text{sen}(\phi) \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle}_{=0} - \cos(\phi) \underbrace{\langle \mathbf{b}_s, \mathbf{n} \rangle}_{=-\tau}) \\ c(A + B + C + D) &= u \cos(\alpha) (\alpha_s \cos(\phi) - \kappa + \kappa \text{sen}^2(\phi)) (\phi_s \cos(\phi) + \tau \cos(\phi)). \end{aligned}$$

Simplificando a equação e utilizando a relação trigonométrica fundamental, temos

$$\begin{aligned} c(A + B + C + D) &= u \cos(\alpha) \cos(\phi) (\alpha_s \cos(\phi) - \kappa(1 - \text{sen}^2(\phi))) (\phi_s + \tau) \\ c(A + B + C + D) &= u \cos(\alpha) \cos(\phi) (\alpha_s \cos(\phi) - \kappa \cos^2(\phi)) (\phi_s + \tau). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Logo,

$$c(A + B + C + D) = u \cos(\alpha) \cos^2(\phi) (\alpha_s - \bar{\kappa}) (\phi_s + \tau). \quad (3.63)$$

Calculando o quarto termo:

$$\begin{aligned} d(A + B + C + D) &= u \cos(\alpha) \text{sen}(\phi) (\alpha_s - \bar{\kappa}) (\phi_s \cos(\phi) \underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle}_{=0} + \text{sen}(\phi) \underbrace{\langle \mathbf{n}_s, \mathbf{b} \rangle}_{=\tau}) \\ &\quad + \phi_s \text{sen}(\phi) \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}_{=1} - \cos(\phi) \underbrace{\langle \mathbf{b}_s, \mathbf{b} \rangle}_{=0}. \end{aligned}$$

Logo,

$$d(A + B + C + D) = u \cos(\alpha) \text{sen}^2(\phi) (\alpha_s - \bar{\kappa}) (\phi_s + \tau). \quad (3.64)$$

Somando-se as equações (3.60), (3.61), (3.63) e (3.64) e levando em conta o sinal de negativo da equação (3.59), que havíamos deixado de fora, obtemos

$$\begin{aligned} e &= -\kappa \text{sen}(\phi) - u \kappa \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) (\bar{\kappa} - \alpha_s) - u \cos(\alpha) \cos^2(\phi) (\alpha_s - \bar{\kappa}) (\phi_s + \tau) \\ &\quad - u \cos(\alpha) \text{sen}^2(\phi) (\alpha_s - \bar{\kappa}) (\phi_s + \tau) \\ e &= -\kappa \text{sen}(\phi) - u \kappa \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\phi) (\bar{\kappa} - \alpha_s) - u \cos(\alpha) (\alpha_s - \bar{\kappa}) (\phi_s + \tau) \end{aligned}$$

Logo, substituindo a equação (3.35), na equação acima, temos

$$\begin{aligned} e &= -\kappa \operatorname{sen}(\phi) - u \kappa \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\phi) (\bar{\kappa} - \alpha_s) - u \cos(\alpha) (\alpha_s - \bar{\kappa}) \left(-\kappa \operatorname{sen}(\phi) \frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} \right) \\ e &= -\kappa \operatorname{sen}(\phi) - u \kappa \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\phi) (\bar{\kappa} - \alpha_s) + u \kappa \operatorname{sen}(\phi) \frac{\cos^2(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} (\alpha_s - \bar{\kappa}). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Calculando o mínimo múltiplo comum na equação (3.65), encontramos

$$e = -\kappa \operatorname{sen}(\phi) - \frac{u \kappa \operatorname{sen}^2(\alpha) \operatorname{sen}(\phi) (\bar{\kappa} - \alpha_s) + u \kappa \operatorname{sen}(\phi) \cos^2(\alpha) (\alpha_s - \bar{\kappa})}{\operatorname{sen}(\alpha)}. \quad (3.66)$$

Colocando os termos em evidência e utilizando a relação trigonométrica fundamental na equação (3.66), temos

$$e = -\kappa \operatorname{sen}(\phi) + \frac{u \kappa \operatorname{sen}(\phi) (\alpha_s - \bar{\kappa})}{\operatorname{sen}(\alpha)}. \quad (3.67)$$

De onde vem que

$$e = -\frac{\kappa \operatorname{sen}(\phi) (\operatorname{sen}(\alpha) - u(\alpha_s - \bar{\kappa}))}{\operatorname{sen}(\alpha)}. \quad (3.68)$$

Com os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais já calculados, podemos encontrar as curvaturas Gaussiana e média da superfície desenvolvível. A curvatura Gaussiana é definida por

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (3.69)$$

Substituindo as equações (A.27), (A.30), (A.33), (3.56) e (3.68) na equação (3.69), temos

$$K = \frac{e(0) - 0}{E(1) - \cos^2(\alpha)}. \quad (3.70)$$

Portanto,

$$\boxed{K = 0.} \quad (3.71)$$

A curvatura média é definida por

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \quad (3.72)$$

Substituindo as equações (A.27), (A.30), (A.33), (3.56) e (3.68) na equação (3.72), temos

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{-\frac{\kappa \operatorname{sen}(\phi) (\operatorname{sen}(\alpha) - u(\alpha_s - \bar{\kappa}))}{\operatorname{sen}(\alpha)} - 2 \cos(\alpha) (0) + (0)E}{1 + 2u \operatorname{sen}(\alpha) (\bar{\kappa} - \alpha_s) + u^2 (\bar{\kappa} - \alpha_s)^2 - \underbrace{\cos^2(\alpha)}_{=1 - \operatorname{sen}^2(\alpha)}}. \\ H &= -\frac{1}{2} \frac{\kappa \operatorname{sen}(\phi) (\operatorname{sen}(\alpha) - u(\alpha_s - \bar{\kappa}))}{\operatorname{sen}(\alpha) (1 + 2u \operatorname{sen}(\alpha) (\bar{\kappa} - \alpha_s) + u^2 (\alpha_s - \bar{\kappa})^2) - 1 + \operatorname{sen}^2(\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Simplificando alguns termos na equação (3.73), chegamos a

$$H = -\frac{1}{2} \frac{\kappa \operatorname{sen}(\phi) (\operatorname{sen}(\alpha) - u(\alpha_s - \bar{\kappa}))}{\operatorname{sen}(\alpha) (\operatorname{sen}(\alpha) - u(\alpha_s - \bar{\kappa}))^2}. \quad (3.74)$$

Portanto,

$$H = -\frac{1}{2} \frac{\kappa \operatorname{sen}(\phi)}{\operatorname{sen}(\alpha)} \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha) - u(\alpha_s - \bar{\kappa})}. \quad (3.75)$$

Finalmente, podemos calcular as curvaturas principais. Elas são definidas como

$$k_1 = H - \sqrt{H^2 - K} \quad (3.76)$$

$$k_2 = H + \sqrt{H^2 - K}. \quad (3.77)$$

Substituindo as equações (3.71) e (3.75) na equação (3.76), obtemos

$$k_1 = H - \sqrt{H^2 - 0}$$

$$k_1 = H - H. \quad (3.78)$$

Portanto,

$$k_1 = 0. \quad (3.79)$$

Substituindo as equações (3.71) e (3.75) na equação (3.77), obtemos

$$k_2 = H + \sqrt{H^2 - 0}$$

$$k_2 = H + H$$

$$k_2 = 2H. \quad (3.80)$$

Portanto,

$$k_2 = -\frac{\kappa \operatorname{sen}(\phi)}{\operatorname{sen}(\alpha)} \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha) - u(\alpha_s - \bar{\kappa})}. \quad (3.81)$$

Na equação (3.50), fazendo $\phi = \phi_1$ e $\phi = \phi_2$ e utilizando as notações \mathbf{N}_1 e \mathbf{N}_2 para os vetores normais ao molde e ao cilindro respectivamente, temos que o vetor normal ao molde \mathbf{N}_1 está na direção positiva do eixo z , enquanto o vetor normal ao cilindro \mathbf{N}_2 está direcionado para dentro.

Um ângulo de interesse a ser calculado é, θ , pois ele é que determina a inclinação entre os planos tangentes ao molde e ao cilindro. Para isso, tomaremos no ponto $\mathbf{r}(s)$ da curva BC . Logo, θ é igual ao ângulo entre os vetores normais \mathbf{N}_1 e $-\mathbf{N}_2$ expresso por

$$\cos(\theta) = (\mathbf{N}_1) \cdot (-\mathbf{N}_2). \quad (3.82)$$

Substituindo na equação (3.82) as equações dos vetores normais dadas por (3.50), obtemos

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= (\operatorname{sen}(\phi_1)\mathbf{n} - \cos(\phi_1)\mathbf{b})(-\operatorname{sen}(\phi_2)\mathbf{n} + \cos(\phi_2)\mathbf{b}) \\ \cos(\theta) &= -\operatorname{sen}(\phi_1)\operatorname{sen}(\phi_2) - \cos(\phi_1)\cos(\phi_2) \\ \cos(\theta) &= -\cos(\phi_1 - \phi_2)\end{aligned}\tag{3.83}$$

Utilizando em (3.83) o fato que $\phi_2 = 2\pi - \phi_1$, temos

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= -\cos(2\phi_1 - 2\pi) \\ \cos(\theta) &= -(\operatorname{sen}(2\phi_1)\operatorname{sen}(2\pi) + \cos(2\phi_1)\cos(2\pi)) \\ \cos(\theta) &= -\cos(2\phi_1).\end{aligned}\tag{3.84}$$

Substituindo $\cos(2\phi_1) = \cos^2(\phi_1) - \operatorname{sen}^2(\phi_1)$ na equação (3.84), temos

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= -\cos^2(\phi_1) + \underbrace{\operatorname{sen}^2(\phi_1)}_{1-\cos^2(\phi_1)} \\ \cos(\theta) &= 1 - 2\cos^2(\phi_1).\end{aligned}\tag{3.85}$$

Substituindo a equação (3.20) na equação (3.85), temos

$$\boxed{\cos(\theta) = 1 - 2\left(\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right)^2}\tag{3.86}$$

Note que esse ângulo depende somente das curvaturas das curvas BC e \overline{BC} .

4 Geometria do Molde: \overline{BC} gráfico.

Nesta capítulo, apresentamos as coordenadas v , z e x , y , z respectivamente no \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , para o caso particular de uma parametrização de \overline{BC} que é gráfico de uma função descrita por $z = z(v)$ com v restrito a $-\pi R \leq v \leq \pi R$, onde $z(v)$ é uma função de classe C^3 . Ao longo do trabalho para facilitar a notação, a derivada em relação a v será denotada como segue $\frac{dz}{dv}(v) = z_v$.

Os pontos de \overline{BC} e BC são representados respectivamente pelos vetores $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(v)$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}(v)$ com as seguintes componetes cartesianas:

$$\bar{\mathbf{r}}(v) = (v, z(v)) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{r}(v) = \left(R \cos\left(\frac{v}{R}\right), R \sin\left(\frac{v}{R}\right), z(v) \right). \quad (4.2)$$

Podemos relacionar o parâmetro v com o comprimento de arco s . Se $\bar{\mathbf{r}}$ está parametrizada pelo comprimento de arco, então temos que

$$s = \int |\bar{\mathbf{r}}'(v)| dv. \quad (4.3)$$

Derivando a equação (4.1), obtemos

$$\bar{\mathbf{r}}'(v) = (1, z_v).$$

Substituindo-a em (4.3) tem-se

$$ds = \sqrt{1 + z_v^2} dv \quad (4.4)$$

e, portanto,

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_v^2}}. \quad (4.5)$$

4.1 Curvatura e torção da curva BC

A curvatura da curva BC (não parametrizada por comprimento de arco) é definida por

$$\kappa(v) = \frac{|\mathbf{r}'(v) \times \mathbf{r}''(v)|}{|\mathbf{r}'(v)|^3}. \quad (4.6)$$

A partir da equação (4.2), calculamos os termos $\mathbf{r}'(v)$ e $\mathbf{r}''(v)$, respectivamente. Antes de calcularmos, vale lembrar que não explicitaremos a dependência em v afim de

simplificar a notação.

$$\mathbf{r}'(v) = (-\text{sen}(\gamma), \cos(\gamma), z_v) \quad \text{onde} \quad \gamma = \frac{v}{R} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{r}''(v) = \left(-\frac{1}{R} \cos(\gamma), -\frac{1}{R} \text{sen}(\gamma), z_{vv}\right). \quad (4.8)$$

Calculando o numerador em (4.6)

$$|\mathbf{r}'(v) \times \mathbf{r}''(v)| = \left| (-\text{sen}(\gamma), \cos(\gamma), z_v) \times \left(-\frac{1}{R} \cos(\gamma), -\frac{1}{R} \text{sen}(\gamma), z_{vv}\right) \right| \quad (4.9)$$

tem-se:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(v) \times \mathbf{r}''(v)| &= \left[\left(z_{vv} \cos(\gamma) + \frac{z_v}{R} \text{sen}(\gamma) \right)^2 + \left(-\frac{z_v}{R} \cos(\gamma) + z_{vv} \text{sen}(\gamma) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{R} \text{sen}^2(\gamma) + \frac{1}{R} \cos^2(\gamma) \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Expandindo os produtos notáveis, chegamos a

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(v) \times \mathbf{r}''(v)| &= \left[z_{vv}^2 \cos^2(\gamma) + \frac{z_v^2}{R^2} \text{sen}^2(\gamma) + 2z_{vv}z_v \cos(\gamma)\text{sen}(\gamma) \right. \\ &\quad \left. + z_{vv}^2 \text{sen}^2(\gamma) + \frac{z_v^2}{R^2} \cos^2(\gamma) - 2z_{vv}z_v \cos(\gamma)\text{sen}(\gamma) + \frac{1}{R^2} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Organizando os termos e utilizando a relação trigonométrica fundamental, temos

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(v) \times \mathbf{r}''(v)| &= \left[z_{vv}^2 \underbrace{(\text{sen}^2(\gamma) + \cos^2(\gamma))}_{=1} + \frac{z_v^2}{R^2} \underbrace{(\text{sen}^2(\gamma) + \cos^2(\gamma))}_{=1} + \frac{1}{R^2} \right]^{1/2} \\ |\mathbf{r}'(v) \times \mathbf{r}''(v)| &= \sqrt{z_{vv}^2 + \frac{z_v^2}{R^2} + \frac{1}{R^2}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{|\mathbf{r}'(v) \times \mathbf{r}''(v)| = \frac{1}{R} (R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{1/2}}. \quad (4.11)$$

Agora, calculando o denominador em (4.6), temos

$$|\mathbf{r}'(v)| = \sqrt{\underbrace{\text{sen}^2(\gamma) + \cos^2(\gamma)}_{=1} + z_v^2}.$$

Assim,

$$\boxed{|\mathbf{r}'(v)| = \sqrt{1 + z_v^2}}. \quad (4.12)$$

Substituindo (4.11) e (4.12) em (4.6), concluímos que a curvatura da curva BC é dada por

$$\kappa = \frac{(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{1/2}}{R(1 + z_v^2)^{3/2}}. \quad (4.13)$$

A torção da curva BC é por definição

$$\tau(v) = \frac{(\mathbf{r}'(v) \times \mathbf{r}''(v)) \cdot \mathbf{r}'''(v)}{|\mathbf{r}'(v) \times \mathbf{r}''(v)|^2}. \quad (4.14)$$

O denominador já foi calculado em (4.11), então precisamos somente calcular o numerador.

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}'(v) \times \mathbf{r}''(v)) \cdot \mathbf{r}'''(v) &= \begin{pmatrix} z_{vv} \cos(\gamma) + \frac{z_v}{R} \sin(\gamma), \\ -\frac{z_v}{R} \cos(\gamma) + z_{vv} \sin(\gamma), \\ \frac{1}{R} \sin^2(\gamma) + \frac{1}{R} \cos^2(\gamma) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} \sin(\gamma), -\frac{1}{R^2} \cos(\gamma), z_{vvv} \end{pmatrix} \\ (\mathbf{r}'(v) \times \mathbf{r}''(v)) \cdot \mathbf{r}'''(v) &= \frac{z_{vv}}{R^2} (\sin(\gamma) \cos(\gamma) - \sin(\gamma) \cos(\gamma)) + \frac{z_v}{R^3} (\sin^2(\gamma) + \cos^2(\gamma)) \\ &\quad + \frac{z_{vvv}}{R} \\ (\mathbf{r}'(v) \times \mathbf{r}''(v)) \cdot \mathbf{r}'''(v) &= \frac{z_v}{R^3} + \frac{z_{vvv}}{R} \\ (\mathbf{r}'(v) \times \mathbf{r}''(v)) \cdot \mathbf{r}'''(v) &= \frac{1}{R^3} (z_v + R^2 z_{vvv}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Substituindo (4.11) e (4.15) em (4.14), obtemos

$$\tau = \frac{1}{R^3} (z_v + R^2 z_{vvv}) \frac{R^2}{(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)}$$

e, portanto,

$$\tau = \frac{(z_v + R^2 z_{vvv})}{R(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)}. \quad (4.16)$$

4.2 Curvatura da curva \overline{BC} e relação entre $\bar{\kappa}$ e κ

A curvatura de \overline{BC} é dada por

$$\bar{\kappa}(v) = \frac{|\bar{\mathbf{r}}'(v) \times \bar{\mathbf{r}}''(v)|}{|\bar{\mathbf{r}}'(v)|^3}, \quad (4.17)$$

onde

$$\bar{\mathbf{r}}'(v) \times \bar{\mathbf{r}}''(v) = \begin{vmatrix} 1 & z_v \\ 0 & z_{vv} \end{vmatrix}.$$

A partir da equação (4.1), calculamos os termos $\bar{\mathbf{r}}'(v)$ e $\bar{\mathbf{r}}''(v)$, respectivamente.

$$\bar{\mathbf{r}}'(v) = (1, z_v) \quad (4.18)$$

$$\bar{\mathbf{r}}''(v) = (0, z_{vv}). \quad (4.19)$$

Substituindo (4.18) e (4.19) em (4.17), temos

$$\begin{aligned} \bar{\kappa} &= \frac{|(1, z_v) \times (0, z_{vv})|}{|(1, z_v)|^3} \\ \bar{\kappa} &= \frac{|z_{vv}|}{\sqrt{(1 + z_v^2)^3}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{\bar{\kappa} = -\frac{z_{vv}}{(1 + z_v^2)^{3/2}}} \quad (4.20)$$

onde $z_{vv} < 0$, pois a curva \overline{BC} é côncava.

Em busca de uma relação entre as curvaturas $\bar{\kappa}$ e κ afim de que possa simplificar cálculos futuros, procedemos da seguinte maneira. Elevando ao quadrado as equações (4.13) e (4.20), obtemos respectivamente:

$$(1 + z_v^2)^3 = \frac{(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)}{R^2 \kappa^2} \quad \text{e} \quad (4.21)$$

$$(1 + z_v^2)^3 = \frac{z_{vv}^2}{\bar{\kappa}^2}. \quad (4.22)$$

Igualando as equações (4.21) e (4.22), temos

$$\begin{aligned} \frac{z_{vv}^2}{\bar{\kappa}^2} &= \frac{(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)}{R^2 \kappa^2} \\ R^2 \kappa^2 z_{vv}^2 &= \bar{\kappa}^2 R^2 z_{vv}^2 + \bar{\kappa}^2 z_v^2 + \bar{\kappa}^2 \\ \kappa^2 &= \bar{\kappa}^2 \frac{R^2 z_{vv}^2}{R^2 z_{vv}^2} + \bar{\kappa}^2 \frac{z_v^2}{R^2 z_{vv}^2} + \frac{\bar{\kappa}^2}{R^2 z_{vv}^2} \\ \kappa^2 &= \bar{\kappa}^2 + \frac{\bar{\kappa}^2}{R^2 z_{vv}^2} (z_v^2 + 1). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Substituindo (4.20) no segundo termo de (4.23), obtemos

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \bar{\kappa}^2 + \frac{z_{vv}^2}{(1 + z_v^2)^3} \frac{1}{R^2 z_{vv}^2} (1 + z_v^2) \\ \kappa^2 &= \bar{\kappa}^2 + \frac{1}{R^2 (1 + z_v^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Da equação (4.24) podemos notar que $\bar{\kappa} < \kappa$, pois a curvatura aumenta quando \overline{BC} é enrolada em torno do cilindro.

Substituindo as equações (4.13) e (4.20) em (3.20), temos

$$\cos(\phi) = -\frac{z_{vv}}{(1+z_v^2)^{3/2}} \frac{R(1+z_v^2)^{3/2}}{(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{1/2}}.$$

Portanto,

$$\boxed{\cos(\phi) = -\frac{Rz_{vv}}{(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{1/2}}.} \quad (4.25)$$

A partir da equação (4.25), é possível encontrar dois valores para ϕ . As soluções são $\phi = \phi_1$ e $\phi = \phi_2$ com $0 < \phi_1 \leq \frac{\pi}{2}$ e $\phi_2 = 2\pi - \phi_1$. Os valores correspondentes do $\text{sen}(\phi)$ são obtidos usando a relação fundamental trigonométrica, isto é, $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$. Calculando, temos

$$\begin{aligned} \text{sen}^2(\phi) &= 1 - \frac{R^2 z_{vv}^2}{(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)} \\ \text{sen}^2(\phi) &= \frac{R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1 - R^2 z_{vv}^2}{(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)} \\ \text{sen}^2(\phi) &= \frac{1 + z_v^2}{(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)} \\ \text{sen}(\phi) &= \pm \frac{\sqrt{1 + z_v^2}}{(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{1/2}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\text{sen}(\phi) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + z_v^2}}{(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{1/2}} & \text{para } \phi = \phi_1 \\ -\frac{\sqrt{1 + z_v^2}}{(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{1/2}} & \text{para } \phi = \phi_2. \end{cases}$$

Diferenciando $\cos(\phi)$ em relação a s e com o auxílio das equações (4.5) e (4.26), tem-se

$$\begin{aligned} -\text{sen}(\phi)\phi_s &= \frac{d \cos(\phi)}{ds} \\ &= \frac{d}{ds} R z_{vv} (R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{-1/2} \\ &= -R \frac{d}{ds} z_{vv} (R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{-1/2} \\ &= -R \left[(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{-1/2} \frac{dz_{vv}}{ds} + z_{vv} \frac{d}{ds} (R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{-1/2} \right] \\ &= -R \left[(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{-1/2} \frac{dz_{vv}}{dv} \frac{dv}{ds} + z_{vv} \frac{d}{ds} (R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{-1/2} \frac{dv}{ds} \right] \\ &= -R \left[\frac{(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{-1/2} z_{vvv}}{(1 + z_v^2)^{1/2}} - \frac{z_{vv} (R^2 z_{vv} z_{vvv} + z_v z_{vv})}{(1 + z_v^2)^{1/2} (R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{-R z_{vvv} (R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1) + R z_{vv} (R^2 z_{vv} z_{vvv} + z_v z_{vv})}{(1 + z_v^2)^{1/2} (R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Dividindo por $(-\text{sen}(\phi))$, temos

$$\begin{aligned}\phi_s &= \frac{(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{1/2}}{\underbrace{(1 + z_v^2)^{1/2}}_1} \left[\frac{-Rz_{vvv} (R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1) + Rz_{vv} (R^2 z_{vv} z_{vvv} + z_v z_{vv})}{(1 + z_v^2)^{1/2} (R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{3/2}} \right] \\ \phi_s &= \frac{-R^3 z_{vvv} z_{vv}^2 - Rz_{vvv} (z_v^2 + 1) + R^3 z_{vv} z_{vvv} + Rz_v z_{vv}^2}{(1 + z_v^2) (R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{\phi_s = \pm \frac{Rz_{vvv} (z_v^2 + 1) - Rz_v z_{vv}^2}{(1 + z_v^2) (R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)}}. \quad (4.27)$$

Substituindo as equações (4.13), (4.16), (4.26) e (4.27) na equação (3.34) para $\text{sen}(\phi) = \text{sen}(\phi_1)$, obtemos

$$\begin{aligned}\text{tg}(\alpha_1(s)) &= -\frac{\kappa(s)\text{sen}(\phi_1(s))}{\phi_s(s) + \tau(s)} \\ &= -\frac{\xi^{1/2}}{R(1 + z_v^2)^{3/2}} \frac{(1 + z_v^2)^{1/2}}{\xi^{1/2}} \frac{1}{\frac{Rz_{vvv} (z_v^2 + 1) - Rz_v z_{vv}^2}{(1 + z_v^2)\xi} + \frac{R^2 z_{vvv} + z_v}{R\xi}}\end{aligned}$$

onde $\xi = R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1$. Fazendo o mínimo múltiplo comum, temos

$$\text{tg}(\alpha_1(s)) = -\frac{1}{R(1 + z_v^2)} \left[\frac{1}{\frac{R(Rz_{vvv} (z_v^2 + 1) - Rz_v z_{vv}^2) + (1 + z_v^2) (R^2 z_{vvv} + z_v)}{R\xi(1 + z_v^2)}} \right].$$

Organizando os termos e após algumas simplificações, tem-se

$$\begin{aligned}\text{tg}(\alpha_1(s)) &= -\frac{1}{R(1 + z_v^2)} \frac{R(1 + z_v^2)\xi}{R(Rz_{vvv} (z_v^2 + 1) - Rz_v z_{vv}^2) + (1 + z_v^2) (R^2 z_{vvv} + z_v)} \\ \text{tg}(\alpha_1(s)) &= -\frac{\xi}{(1 + z_v^2) (2R^2 z_{vvv} + z_v) - R^2 z_v z_{vv}^2}.\end{aligned}$$

Explicitando ξ , obtemos

$$\boxed{\text{tg}(\alpha_1(s)) = -\frac{R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1}{(1 + z_v^2) (2R^2 z_{vvv} + z_v) - R^2 z_v z_{vv}^2}}. \quad (4.28)$$

Analogamente, para $\text{sen}(\phi) = \text{sen}(\phi_2)$, temos

$$\begin{aligned}\text{tg}(\alpha_2(s)) &= -\frac{\kappa(s)\text{sen}(\phi_2(s))}{\phi_s(s) + \tau(s)} \\ \text{tg}(\alpha_2(s)) &= -\frac{\xi^{1/2}}{R(1 + z_v^2)^{3/2}} \left(-\frac{(1 + z_v^2)^{1/2}}{\xi^{1/2}} \right) \frac{1}{-\frac{(Rz_{vvv} (z_v^2 + 1) - Rz_v z_{vv}^2)}{(1 + z_v^2)\xi} + \frac{R^2 z_{vvv} + z_v}{R\xi}}.\end{aligned}$$

Fazendo o mínimo múltiplo comum, temos

$$\operatorname{tg}(\alpha_2(s)) = \frac{1}{R(1+z_v^2)} \left[\frac{1}{\frac{-R(Rz_{vv}(z_v^2+1) - Rz_v z_{vv}^2) + (1+z_v^2)(R^2 z_{vv} + z_v)}{R\xi(1+z_v^2)}} \right].$$

Organizando os termos e após algumas simplificações, tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha_2(s)) &= \frac{1}{R(1+z_v^2)} \frac{R(1+z_v^2)\xi}{-R^2 z_{vv}(z_v^2+1) + R^2 z_v z_{vv}^2 + (1+z_v^2)R^2 z_{vv} + (1+z_v^2)z_v} \\ \operatorname{tg}(\alpha_2(s)) &= \frac{R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1}{Rz_v z_{vv}^2 + z_v + z_v^3} \\ \operatorname{tg}(\alpha_2(s)) &= \frac{R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1}{z_v(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha_2(s)) = \frac{1}{z_v}}. \quad (4.29)$$

Se considerarmos uma parametrização que é gráfico, então precisamos reescrever a equação para o ângulo θ .

Substituindo as equações (4.13) e (4.20) na equação (3.86), temos

$$\cos(\theta) = 1 - 2 \left[\left(\frac{z_{vv}^2}{(1+z_v^2)^3} \right) \left(\frac{R^2(1+z_v^2)^3}{R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1} \right) \right]. \quad (4.30)$$

Simplificando temos

$$\cos(\theta) = \frac{R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1 - 2R^2 z_{vv}^2}{R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1} \quad (4.31)$$

Portanto,

$$\boxed{\cos(\theta) = -\frac{R^2 z_{vv}^2 - z_v^2 - 1}{R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1}}. \quad (4.32)$$

Calcularemos o valor da tangente do ângulo $\alpha + \psi$ com o auxílio da relação trigonométrica

$$\operatorname{tg}(\alpha + \psi) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\psi)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\psi)}, \quad (4.33)$$

onde $\operatorname{tg}(\psi) = z_v$ e $\operatorname{tg}(\alpha)$ é dada pela equação (4.28). Logo, temos

$$\operatorname{tg}(\alpha + \psi) = \frac{z_v - \frac{R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1}{(2R^2 z_{vv} + z_v)(1+z_v^2) - R^2 z_v z_{vv}^2}}{1 + z_v \frac{(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)}{(2R^2 z_{vv} + z_v)(1+z_v^2) - R^2 z_v z_{vv}^2}} \quad (4.34)$$

Tomando o m.m.c no numerador e denominador e simplificando alguns termos, temos

$$\operatorname{tg}(\alpha + \psi) = \frac{z_v(2R^2 z_{vvv} + z_v)(1 + z_v^2) - R^2 z_v^2 z_{vv}^2 - R^2 z_{vv}^2 - z_v^2 - 1}{(2R^2 z_{vvv} + z_v)(1 + z_v^2) - R^2 z_v z_{vv}^2 + z_v(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)}. \quad (4.35)$$

Colocando alguns termos em evidência e após algumas simplificações, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \psi) &= \frac{(1 + z_v^2) [z_v(2R^2 z_{vvv} + z_v) - R^2 z_{vv}^2 - 1]}{(1 + z_v^2) [2(R^2 z_{vvv} + z_v)]} \\ \operatorname{tg}(\alpha + \psi) &= \frac{z_v(2R^2 z_{vvv} + 2z_v) - z_v^2 - R^2 z_{vv}^2 - 1}{2(R^2 z_{vvv} + z_v)} \\ \operatorname{tg}(\alpha + \psi) &= \frac{z_v(2R^2 z_{vvv} + 2z_v)}{2(R^2 z_{vvv} + z_v)} - \frac{R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1}{2(R^2 z_{vvv} + z_v)}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Portanto,

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha + \psi) = z_v - \frac{R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1}{2(R^2 z_{vvv} + z_v)}}. \quad (4.37)$$

De modo análogo a condição (3.47), exigimos que

$$\frac{d}{dv} \operatorname{tg}(\alpha + \psi) = \sec^2(\alpha + \psi) \frac{d}{dv}(\alpha + \psi) < 0.$$

Então diferenciando a equação (4.37) e definindo $\delta = \frac{d}{dv} \operatorname{tg}(\alpha + \psi)$, temos

$$\begin{aligned} \delta &= z_{vv} - \left[\frac{(2R^2 z_{vv} z_{vvv} + 2z_v z_{vv}) (2R^2 z_{vvv} + 2z_v) - (R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1) (2R^2 z_{vvv} + 2z_{vv})}{(2R^2 z_{vvv} + 2z_v)^2} \right] < 0 \\ \delta &= 4z_{vv}(R^2 z_{vvv} + z_v)^2 - 4z_{vv}(R^2 z_{vvv} + z_v)^2 + (R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)(2R^2 z_{vvv} + 2z_{vv}) < 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Logo,

$$\frac{d}{dv} \operatorname{tg}(\alpha + \psi) = \underbrace{(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)}_{\geq 0} (2R^2 z_{vvv} + 2z_{vv}) < 0 \quad (4.39)$$

Portanto, encontramos uma condição específica que a função $z(v)$ deve satisfazer para que o molde seja livre de singularidades.

$$2R^2 z_{vvv} + 2z_{vv} < 0 \quad (4.40)$$

4.3 Triedro de Frenet para a curva BC

Introduzimos a base ortonormal no ponto $\mathbf{r}(v)$ de BC com as seguintes componentes cartesianas:

$$\mathbf{e}_1(v) = (\cos(\gamma), \operatorname{sen}(\gamma), 0) \quad (4.41)$$

$$\mathbf{e}_2(v) = (-\operatorname{sen}(\gamma), \cos(\gamma), 0) \quad (4.42)$$

$$\mathbf{e}_3(v) = (0, 0, 1), \quad \text{lembrando que } \gamma = \frac{v}{R}. \quad (4.43)$$

Diferenciando (4.41), (4.42) e (4.43) em relação a v , onde representaremos a derivada por uma linha '. Assim, temos

$$\mathbf{e}'_1 = \left(-\frac{1}{R} \operatorname{sen}(\gamma), \frac{1}{R} \cos(\gamma), 0 \right) = \frac{1}{R} \mathbf{e}_2 \quad (4.44)$$

$$\mathbf{e}'_2 = \left(-\frac{1}{R} \cos(\gamma), -\frac{1}{R} \operatorname{sen}(\gamma), 0 \right) = -\frac{1}{R} \mathbf{e}_1 \quad (4.45)$$

$$\mathbf{e}'_3 = 0. \quad (4.46)$$

O vetor $\mathbf{r}(v)$ dado pela equação (4.2) pode ser reescrito em termos da base ortogonal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ como segue

$$\mathbf{r}(v) = R\mathbf{e}_1(v) + z(v)\mathbf{e}_3(v). \quad (4.47)$$

Diferenciando (4.47) em relação a s , temos

$$\mathbf{r}_s = R \frac{d\mathbf{e}_1}{dv} \frac{dv}{ds} + \frac{dz}{dv} \frac{dv}{ds} \mathbf{e}_3 + \frac{d\mathbf{e}_3}{dv} \frac{dv}{ds} z. \quad (4.48)$$

Substituindo as equações (4.5), (4.44), (4.45) e (4.46) em (4.48), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_s &= R \frac{1}{R} \mathbf{e}_2 (1 + z_v^2)^{-1/2} + z_v (1 + z_v^2)^{-1/2} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{r}_s &= \mathbf{e}_2 (1 + z_v^2)^{-1/2} + z_v (1 + z_v^2)^{-1/2} \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Calculando a segunda derivada de $\mathbf{r}(v)$. Tomando a equação (4.49), tem-se

$$\mathbf{r}_{ss} = (\eta^{-1/2})' v_s \mathbf{e}_2 + \eta^{-1/2} \mathbf{e}'_2 v_s + z_{vv} v_s \eta^{-1/2} \mathbf{e}_3 + z_v (\eta^{-1/2})' v_s \mathbf{e}_3 + z_v (\eta^{-1/2}) \mathbf{e}'_3 v_s.$$

onde $\eta = (1 + z_v^2)$. Calculando as derivadas e utilizando as equações (4.44), (4.45) e (4.46), chegamos a

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ss} &= -\frac{1}{2} \eta^{-3/2} 2z_v z_{vv} \eta^{-1/2} \mathbf{e}_2 + \eta^{-1/2} (-R)^{-1} \mathbf{e}_1 \eta^{-1/2} + z_{vv} \eta^{-1/2} \eta^{-1/2} \mathbf{e}_3 \\ &\quad - z_v \frac{1}{2} \eta^{-3/2} 2z_v z_{vv} \mathbf{e}_3 \eta^{-1/2}. \end{aligned}$$

Efetuada algumas simplificações, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ss} &= -z_v z_{vv} \eta^{-2} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{R} \eta^{-1} \mathbf{e}_1 + z_{vv} \eta^{-2} (1 + z_v^2 - z_v^2) \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{r}_{ss} &= -\frac{1}{R} \eta^{-1} \mathbf{e}_1 - z_v z_{vv} \eta^{-2} \mathbf{e}_2 + z_{vv} \eta^{-2} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{r}_{ss} &= -\frac{1}{R} (1 + z_v^2)^{-1} \mathbf{e}_1 - z_v z_{vv} (1 + z_v^2)^{-2} \mathbf{e}_2 + z_{vv} (1 + z_v^2)^{-2} \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Com as equações (4.49) e (4.50), podemos calcular o triedro de Frenet da curva BC cujas equações são dadas por

$$\mathbf{t} = \mathbf{r}_s \quad (4.51)$$

$$\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{r}_{ss}}{\kappa} \quad (4.52)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}. \quad (4.53)$$

Para calcular o vetor tangente unitário, basta substituir a equação (4.49) em (4.51), logo

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= (1 + z_v^2)^{-1/2} \mathbf{e}_2 + z_v (1 + z_v^2)^{-1/2} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t} &= (1 + z_v^2)^{-1/2} (\mathbf{e}_2 + z_v \mathbf{e}_3).\end{aligned}\quad (4.54)$$

O vetor normal é calculado substituindo a equação (4.50) em (4.53), obtendo-se

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= -\frac{1}{\kappa} \left(-\frac{1}{R} (1 + z_v^2)^{-1} \mathbf{e}_1 - z_v z_{vv} (1 + z_v^2)^{-2} \mathbf{e}_2 + z_{vv} (1 + z_v^2)^{-2} \mathbf{e}_3 \right) \\ \mathbf{n} &= \frac{(1 + z_v^2)^{-2}}{R\kappa} \left((1 + z_v^2) \mathbf{e}_1 + z_v z_{vv} R \mathbf{e}_2 - z_{vv} R \mathbf{e}_3 \right).\end{aligned}\quad (4.55)$$

Substituindo as equações (4.54) e (4.55) em (4.53), obtemos o vetor binormal

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & \eta^{-1/2} & z_v \eta^{-1/2} \\ \frac{\eta^{-1}}{R\kappa} & \frac{z_v z_{vv} \eta^{-2}}{\kappa} & -\frac{z_{vv} \eta^{-2}}{\kappa} \end{vmatrix}$$

efetuando o produto vetorial temos

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= -\frac{1}{\kappa} \left(\eta^{-1/2} \eta^{-2} z_{vv} + z_v^2 z_{vv} \eta^{-1/2} \eta^{-2} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\eta^{-3/2} z_v}{R\kappa} \right) \mathbf{e}_2 - \left(\frac{\eta^{-1} \eta^{-1/2}}{R\kappa} \right) \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} &= -\left(\frac{\eta^{-5/2} z_{vv} (1 + z_v^2)}{\kappa} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\eta^{-3/2} z_v}{R\kappa} \right) \mathbf{e}_2 - \left(\frac{\eta^{-3/2}}{r\kappa} \right) \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} &= \frac{\eta^{-3/2}}{R\kappa} (-R z_{vv} \mathbf{e}_1 + z_v \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \\ \mathbf{b} &= \frac{(1 + z_v^2)^{-3/2}}{R\kappa} (-R z_{vv} \mathbf{e}_1 + z_v \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3).\end{aligned}\quad (4.56)$$

4.4 Vetor normal da superfície desenvolvível

Nesta seção determinamos o vetor normal à superfície desenvolvível no caso particular em que a curva \overline{BC} é gráfico. Temos a equação

$$\mathbf{N} = \sin(\phi) \mathbf{n} - \cos(\phi) \mathbf{b}.\quad (4.57)$$

Substituindo as equações (4.13), (4.25), (4.26), (4.55) e (4.56) na equação acima, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \pm \frac{\eta^{1/2}}{\xi^{1/2}} \left(\frac{\eta^{-1} \mathbf{e}_1}{R\kappa} + \frac{z_v z_{vv} \eta^{-2} \mathbf{e}_2}{\kappa} - \frac{z_{vv} \eta^{-2} \mathbf{e}_3}{\kappa} \right) + \frac{R z_{vv} \eta^{-3/2}}{\xi^{1/2} R\kappa} (-R z_{vv} \mathbf{e}_1 + z_v \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \\ &= \pm \frac{\eta^{1/2}}{\xi^{1/2}} \left(\frac{R \eta^{3/2}}{\xi^{1/2}} \right) \left(\frac{\eta^{-1} \mathbf{e}_1}{R} + z_v z_{vv} \eta^{-2} \mathbf{e}_2 - z_{vv} \eta^{-2} \mathbf{e}_3 \right) \\ &+ \frac{R z_{vv}}{\xi^{1/2}} \left(\frac{R \eta^{3/2}}{\xi^{1/2}} \right) \left(\frac{\eta^{-3/2}}{R} \right) (-R z_{vv} \mathbf{e}_1 + z_v \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \\ &= \frac{1}{\xi} \left[\pm R \eta^2 \left(\frac{\eta^{-1} \mathbf{e}_1}{R} + z_v z_{vv} \eta^{-2} \mathbf{e}_2 - z_{vv} \eta^{-2} \mathbf{e}_3 \right) + R z_{vv} (-R z_{vv} \mathbf{e}_1 + z_v \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \right].\end{aligned}$$

Somando os termos componente a componente, temos

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\xi} \left[\left(-R^2 z_{vv}^2 \pm (1 + z_v^2) \right) \mathbf{e}_1 + (Rz_v z_{vv} \pm Rz_v z_{vv}) \mathbf{e}_2 - (Rz_{vv} \pm Rz_{vv}) \mathbf{e}_3 \right] \quad (4.58)$$

4.5 Determinação da geratriz \mathbf{d}

Da equação 4.57 temos $\mathbf{d} = \cos(\alpha) \mathbf{t} + \text{sen}(\alpha) \mathbf{t} \times \mathbf{N}$. Efetuando primeiramente o produto vetorial $\mathbf{t} \times \mathbf{N}$, temos

$$\mathbf{t} \times \mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & \text{sen}(\alpha) \eta^{-1/2} & z_v \text{sen}(\alpha) \eta^{-1/2} \\ \frac{1}{\xi} (-R^2 z_{vv}^2 \pm \eta) & \frac{1}{\xi} (Rz_v z_{vv} \pm Rz_v z_{vv}) & -\frac{1}{\xi} (Rz_{vv} \pm Rz_{vv}) \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{t} \times \mathbf{N} = \left[-\text{sen}(\alpha) \eta^{-1/2} \frac{1}{\xi} (Rz_{vv} \pm Rz_{vv}) - \text{sen}(\alpha) \eta^{-1/2} z_v \frac{1}{\xi} (Rz_v z_{vv} \pm Rz_v z_{vv}) \right] \mathbf{e}_1$$

$$+ \left[\text{sen}(\alpha) \eta^{-1/2} z_v \frac{1}{\xi} (-R^2 z_{vv}^2 \pm \eta) \right] \mathbf{e}_2 + \left[-\text{sen}(\alpha) \eta^{-1/2} \frac{1}{\xi} (R^2 z_{vv}^2 \pm \eta) \right] \mathbf{e}_3.$$

Calculando \mathbf{d} , temos

$$\mathbf{d} = -\frac{\text{sen}(\alpha) \eta^{-1/2}}{\xi} [Rz_{vv} \pm Rz_{vv} + z_v (Rz_v z_{vv} \pm Rz_v z_{vv})] \mathbf{e}_1$$

$$+ \left[\cos(\alpha) \eta^{-1/2} + \frac{\text{sen}(\alpha) \eta^{-1/2} z_v}{\xi} (-R^2 z_{vv}^2 \pm \eta) \right] \mathbf{e}_2$$

$$+ \left[\cos(\alpha) z_v \eta^{-1/2} - \frac{\text{sen}(\alpha) \eta^{-1/2}}{\xi} (-R^2 z_{vv}^2 \pm \eta) \right] \mathbf{e}_3. \quad (4.59)$$

Agrupando os termos temos

$$\mathbf{d} = -\frac{\text{sen}(\alpha) \eta^{-1/2}}{\xi} R (z_{vv} \pm z_{vv}) \eta \mathbf{e}_1 + \eta^{-1/2} \left[\cos(\alpha) - \frac{R^2 z_{vv}^2 \mp \eta}{\xi} z_v \text{sen}(\alpha) \right] \mathbf{e}_2$$

$$+ \eta^{-1/2} \left[z_v \cos(\alpha) + \frac{R^2 z_{vv}^2 \mp \eta}{\xi} \text{sen}(\alpha) \right] \mathbf{e}_3. \quad (4.60)$$

Explicitando η e ξ temos a equação para o gerador \mathbf{d} .

$$\mathbf{d} = -\frac{(Rz_{vv} \pm Rz_{vv}) (1 + z_v^2)^{1/2}}{R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1} \text{sen}(\alpha) \mathbf{e}_1$$

$$+ (1 + z_v^2)^{-1/2} \left[\cos(\alpha) - \frac{R^2 z_{vv}^2 \mp (1 + z_v^2)}{R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1} z_v \text{sen}(\alpha) \right] \mathbf{e}_2$$

$$+ (1 + z_v^2)^{-1/2} \left[z_v \cos(\alpha) + \frac{R^2 z_{vv}^2 \mp (1 + z_v^2)}{R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1} \text{sen}(\alpha) \right] \mathbf{e}_3. \quad (4.61)$$

Se tomarmos o sinal superior na equação (4.61) e colocando $\alpha = \alpha_1$ obtemos a equação da geratriz \mathbf{d}_1 . Primeiramente, dividimos a equação (4.61) por $\text{sen}(\alpha_1)$ obtendo

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{d}_1}{\text{sen}(\alpha_1)} &= -\frac{(Rz_{vv} + Rz_{vv})(1 + z_v^2)^{1/2}}{R^2z_{vv}^2 + z_v^2 + 1}\mathbf{e}_1 \\ &+ (1 + z_v^2)^{-1/2} \left[\frac{\cos(\alpha_1)}{\text{sen}(\alpha_1)} - \frac{R^2z_{vv}^2 - (1 + z_v^2)}{R^2z_{vv}^2 + z_v^2 + 1}z_v \right] \mathbf{e}_2 \\ &+ (1 + z_v^2)^{-1/2} \left[z_v \frac{\cos(\alpha_1)}{\text{sen}(\alpha_1)} + \frac{R^2z_{vv}^2 - (1 + z_v^2)}{R^2z_{vv}^2 + z_v^2 + 1} \right] \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Reescrevendo a equação (4.28), temos

$$\frac{\cos(\alpha_1)}{\text{sen}(\alpha_1)} = \frac{-(2R^2z_{vvv} + z_v)(1 + z_v^2) + R^2z_vz_{vv}^2}{R^2z_{vv}^2 + z_v^2 + 1}. \quad (4.63)$$

Substituindo a equação (4.63) na equação (4.62), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{d}_1}{\text{sen}(\alpha_1)} &= \frac{-2Rz_{vv}(1 + z_v^2)^{1/2}}{R^2z_{vv}^2 + z_v^2 + 1}\mathbf{e}_1 \\ &+ (1 + z_v^2)^{-1/2} \left[\frac{-(2R^2z_{vvv} + z_v)(1 + z_v^2) + R^2z_vz_{vv}^2 - R^2z_{vv}^2z_v + z_v + z_v^3}{R^2z_{vv}^2 + z_v^2 + 1} \right] \mathbf{e}_2 \\ &+ (1 + z_v^2)^{-1/2} \left[\frac{-(2R^2z_{vvv}z_v + z_v^2)(1 + z_v^2) + R^2z_v^2z_{vv}^2 + R^2z_{vv}^2 - (1 + z_v^2)}{R^2z_{vv}^2 + z_v^2 + 1} \right] \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Fazendo as distributivas e simplificando os termos simétricos, temos

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{d}_1}{\text{sen}(\alpha_1)} &= \frac{-2Rz_{vv}(1 + z_v^2)^{1/2}}{R^2z_{vv}^2 + z_v^2 + 1}\mathbf{e}_1 \\ &+ \frac{-2R^2z_{vvv}(1 + z_v^2)^{1/2}}{R^2z_{vv}^2 + z_v^2 + 1}\mathbf{e}_2 \\ &+ \frac{2(1 + z_v^2)^{1/2}}{R^2z_{vv}^2 + z_v^2 + 1} \left(-R^2z_vz_{vvv} + \frac{1}{2}(R^2z_{vv}^2 - z_v^2 - 1) \right) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Portanto, a direção da geratriz \mathbf{d}_1 é dada por:

$$\frac{\xi}{2\eta^{1/2}\text{sen}(\alpha_1)}\mathbf{d}_1 = \left[-Rz_{vv}\mathbf{e}_1 - R^2z_{vvv}\mathbf{e}_2 - R^2z_vz_{vvv}\mathbf{e}_3 + \frac{1}{2}(R^2z_{vv}^2 - z_v^2 - 1)\mathbf{e}_3 \right], \quad (4.65)$$

lembrando que $\xi = R^2z_{vv}^2 + z_v^2 + 1$ e $\eta = 1 + z_v^2$.

Agora tomamos o sinal inferior na equação (4.61) e colocamos $\alpha = \alpha_2$, assim obtendo a equação para a direção da geratriz \mathbf{d}_2 .

$$\mathbf{d}_2 = (1 + z_v^2)^{-1/2} [(\cos(\alpha_2) - z_v\text{sen}(\alpha_2))\mathbf{e}_2 + (z_v\cos(\alpha_2) + \text{sen}(\alpha_2))\mathbf{e}_3]. \quad (4.66)$$

Reescrevendo a equação (4.29), temos

$$\begin{aligned} \text{tg}(\alpha_2) &= \frac{1}{z_v} \\ z_v &= \frac{\cos(\alpha_2)}{\text{sen}(\alpha_2)}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Substituindo a equação (4.67) na equação (4.66), temos

$$\mathbf{d}_2 = \left(1 + \frac{\cos^2(\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_2)}\right)^{-1/2} \left[\left(\cos(\alpha_2) - \frac{\sin(2\alpha_2)}{2\sin(\alpha_2)}\right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\cos^2(\alpha_2)}{\sin(\alpha_2)} + \sin(\alpha_2)\right) \mathbf{e}_3 \right].$$

Simplificando, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2 &= \left(\frac{\sin^2(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_2)}\right)^{-1/2} \left(\frac{\cos^2(\alpha_2) + \sin^2(\alpha_2)}{\sin(\alpha_2)}\right) \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{d}_2 &= \left(\frac{1}{\sin^2(\alpha_2)}\right)^{-1/2} \frac{\mathbf{e}_3}{\sin(\alpha_2)}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Portanto,

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{e}_3. \quad (4.69)$$

A partir das equações (4.65) e (4.69) podemos ver que a direção da geratriz \mathbf{d}_1 descrita pelo par (α_1, ϕ_1) está contido no molde, enquanto \mathbf{d}_2 descrita pelo par (α_2, ϕ_2) está no cilindro circular.

5 Exemplo

Mostraremos como construir o molde a partir de uma parábola cuja equação é dada pela função

$$z(v) = \frac{(1-h)}{\pi^2 R^2} v^2 + h \quad (5.1)$$

e sua parametrização é

$$x = R \cos(v/R), \quad (5.2)$$

$$y = R \operatorname{sen}(v/R), \quad (5.3)$$

$$z = \frac{(1-h)}{(\pi R)^2} v^2 + h, \quad (5.4)$$

onde $v \in [0, 2\pi]$.

Calculando as derivadas primeira e segunda da equação (5.1), temos

$$z_v = 2 \left(\frac{1-h}{\pi^2 R^2} \right) v \quad (5.5)$$

e

$$z_{vv} = 2 \left(\frac{1-h}{\pi^2 R^2} \right). \quad (5.6)$$

Relembrando a equação (4.25)

$$\cos(\phi) = -\frac{R z_{vv}}{(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{1/2}}. \quad (5.7)$$

Calculando o denominador da equação (4.25), onde substituímos as equações (5.6) e (5.5), temos

$$\begin{aligned} (R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{1/2} &= \sqrt{R^2 4 \frac{(1-h)^2}{\pi^4 R^4} + \frac{4(1-h)^2 v^2}{\pi^4 R^4} + 1} \\ (R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{1/2} &= \sqrt{\frac{4(1-h)^2 R^2}{\pi^4 R^4} + \frac{4(1-h)^2 v^2}{\pi^4 R^4} + \frac{\pi^4 R^4}{\pi^4 R^4}} \\ (R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{1/2} &= \sqrt{\frac{4(1-h)^2 R^2 + 4(1-h)^2 v^2 + \pi^4 R^4}{\pi^4 R^4}} \\ (R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{1/2} &= \frac{\sqrt{4(1-h)^2 (R^2 + v^2) + \pi^4 R^4}}{\pi^2 R^2}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Substituindo as equações (5.6) e (5.8) na equação (4.25), obtemos

$$\begin{aligned} \cos(\phi) &= \frac{-2R \left(\frac{1-h}{\pi^2 R^2} \right) (\pi^2 R^2)}{\sqrt{4(1-h)^2 (R^2 + v^2) + \pi^4 R^4}} \\ \cos(\phi) &= \frac{-2R(1-h)}{\sqrt{4(1-h)^2 (R^2 + v^2) + \pi^4 R^4}}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Para calcularmos o valor de seno utilizamos a equação (4.26) juntamente com as equações (5.5) e (5.6), obtendo

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\phi) &= \frac{\sqrt{1 + \frac{4(1-h)^2 v^2}{\pi^4 R^4}}}{\sqrt{4(1-h)^2(R^2 + v^2) + \pi^4 R^4}} \pi^2 R^2 \\ \operatorname{sen}(\phi) &= \frac{\sqrt{\pi^4 R^4 + 4(1-h)^2 v^2}}{\sqrt{4(1-h)^2(R^2 + v^2) + \pi^4 R^4}} \\ \operatorname{sen}(\phi) &= \sqrt{\frac{\pi^4 R^4 + 4(1-h)^2 v^2}{4(1-h)^2(R^2 + v^2) + \pi^4 R^4}}.\end{aligned}\quad (5.10)$$

Em seguida, calculamos o valor da tangente através da equação (4.28). Substituindo as equações (5.5) e (5.6) na equação (4.28), temos

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha) &= \frac{(4(1-h)^2(R^2 + v^2) + \pi^4 R^4)}{\pi^4 R^4} \\ \operatorname{tg}(\alpha) &= \frac{\left(1 + \frac{4(1-h)^2 v^2}{\pi^4 R^4}\right) \left(\frac{2(1-h)v}{\pi^2 R^2}\right) - R^2 \left(\frac{2(1-h)v}{\pi^2 R^2}\right) \left(\frac{4(1-h)^2}{\pi^4 R^4}\right)}{(4(1-h)^2(R^2 + v^2) + \pi^4 R^4) \pi^2 R^2} \\ \operatorname{tg}(\alpha) &= \frac{(\pi^4 R^4 + 4(1-h)^2 v^2)(2(1-h)v) - 2R^2(1-h)v(4(1-h)^2)}{(4(1-h)^2(R^2 + v^2) + \pi^4 R^4) \pi^2 R^2} \\ \operatorname{tg}(\alpha) &= \frac{2\pi^4 R^4(1-h)v + 8(1-h)^3 v(v^2 - R^2)}{(4(1-h)^2(R^2 + v^2) + \pi^4 R^4) \pi^2 R^2} \\ \operatorname{tg}(\alpha) &= \frac{2(1-h)v(\pi^4 R^4 + 4(1-h)^2(v^2 - R^2))}{2(1-h)v(\pi^4 R^4 + 4(1-h)^2(v^2 - R^2))}.\end{aligned}\quad (5.11)$$

Para calcular o valor de $\cos(\alpha)$, utilizamos a relação

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)}.\quad (5.12)$$

Substituindo a equação (5.11) na equação (5.12), temos

$$\begin{aligned}\cos^2(\alpha) &= \frac{1}{1 + \frac{(4(1-h)^2(R^2 + v^2) + \pi^4 R^4)^2 \pi^4 R^4}{4(1-h)^2 v^2 (\pi^4 R^4 + 4(1-h)^2(v^2 - R^2))^2}} \\ \cos^2(\alpha) &= \frac{4(1-h)^2 v^2 (\pi^4 R^4 + 4(1-h)^2(v^2 - R^2))^2}{\epsilon} \\ \cos(\alpha) &= \pm \frac{2(1-h)v(\pi^4 R^4 + 4(1-h)^2(v^2 - R^2))}{\epsilon^{1/2}},\end{aligned}\quad (5.13)$$

onde $\epsilon = 4(1-h)^2 v^2 (\pi^4 R^4 + 4(1-h)^2(v^2 - R^2))^2 + (4(1-h)^2(v^2 + R^2) + \pi^4 R^4)^2 \pi^4 R^4$.

Para calcular o $\operatorname{sen}(\alpha)$, utilizamos a relação trigonométrica fundamental. Substituindo (5.13) na relação trigonométrica fundamental, temos

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{4(1-h)^2 v^2 (\pi^4 R^4 + 4(1-h)^2(v^2 - R^2))^2}{\epsilon}}.\quad (5.14)$$

Agora calcularemos os vetores tangente, normal e binormal à curva. Começaremos pelo vetor tangente, para isso, utilizamos a equação (4.54) que é dada por:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{1+z_v^2}} (\mathbf{e}_2 + z_v \mathbf{e}_3). \quad (5.15)$$

Substituindo na equação (4.54) as equações (4.42) e (4.43), temos

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{1+z_v^2}} (-\text{sen}(\gamma), \cos(\gamma), z_v). \quad (5.16)$$

O vetor normal é dado pela equação abaixo:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa R(1+z_v^2)^2} [(1+z_v^2)\mathbf{e}_1 + Rz_v z_{vv} \mathbf{e}_2 - Rz_{vv} \mathbf{e}_3] \quad (5.17)$$

Calculando separadamente cada componente do vetor normal com o auxílio das equações (4.41), (4.42) e (4.43), temos

$$n_1 = \frac{1}{R\kappa(1+z_v^2)} [(1+z_v^2)\cos(\gamma) - Rz_v z_{vv} \text{sen}(\gamma)], \quad (5.18)$$

$$n_2 = \frac{1}{R\kappa(1+z_v^2)^2} [(1+z_v^2)\text{sen}(\gamma) + Rz_v z_{vv} \cos(\gamma)], \quad (5.19)$$

$$n_3 = \frac{-z_{vv}}{\kappa(1+z_v^2)^2}. \quad (5.20)$$

Portanto, o vetor normal é dado por:

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3). \quad (5.21)$$

Analogamente, calculamos o vetor binormal que é dado por:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{R\kappa(1+z_v^2)^{3/2}} [-Rz_{vv} \mathbf{e}_1 + z_v \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3]. \quad (5.22)$$

Calculando separadamente cada componente do vetor binormal com o auxílio das equações (4.41), (4.42) e (4.43), temos

$$b_1 = \frac{1}{R\kappa(1+z_v^2)^{3/2}} [-Rz_{vv} \cos(\gamma) - z_v \text{sen}(\gamma)], \quad (5.23)$$

$$b_2 = \frac{1}{R\kappa(1+z_v^2)^{3/2}} [-Rz_{vv} \text{sen}(\gamma) + z_v \cos(\gamma)], \quad (5.24)$$

$$b_3 = -\frac{1}{R\kappa(1+z_v^2)^{3/2}}. \quad (5.25)$$

Portanto, o vetor binormal é dado por:

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3). \quad (5.26)$$

Com todos os vetores e as funções trigonométricas calculados podemos construir o molde. Utilizando o *Geogebra*, geramos o seguinte modelo:

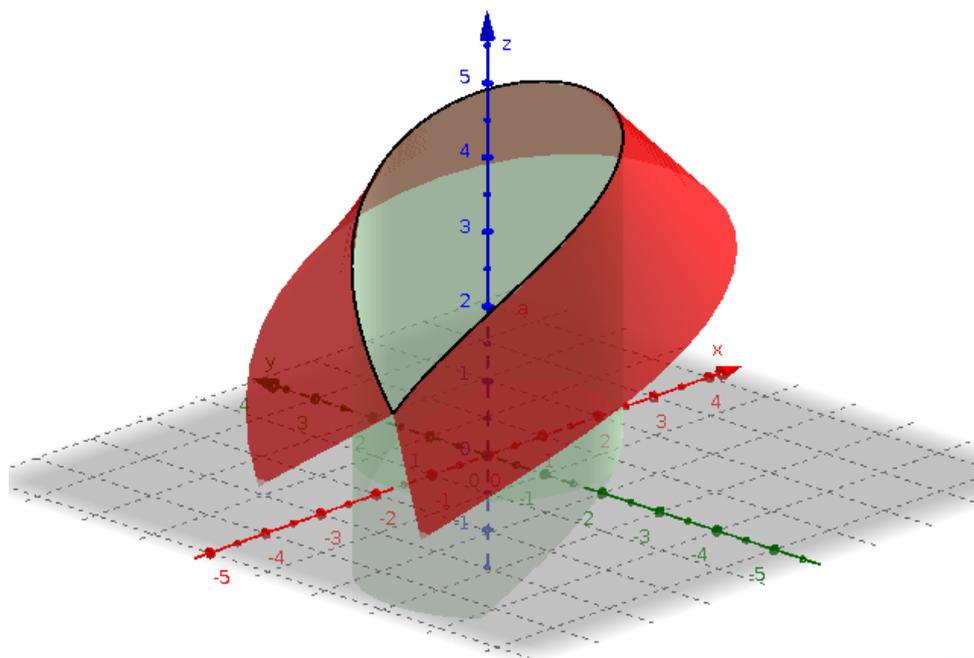


Figura 4 – Molde

6 Conclusão

Neste trabalho, apresentamos uma proposta para a construção do molde de uma máquina de empacotamento automático utilizando uma superfície desenvolvível. Percebemos que a utilização de superfícies desenvolvíveis na projeção de equipamentos industriais para a confecção de embalagens apresenta vantagens em relação a outros tipos de superfícies, já que podem ser desenroladas ou enroladas em um plano de forma isométrica sem que hajam rasgos ou rugas no material. Além disso, por apresentarem singularidades ao longo da linha de estrição é possível antecipar qualquer auto-intersecção de modo a não intervir no processo de fabricação da embalagem.

Outras curvas são possíveis para iniciar o processo, contanto que satisfaçam as condições descritas ao longo do trabalho, entretanto, o grau de dificuldade poderá aumentar consideravelmente mesmo que a curva parametrizada escolhida seja gráfico.

O estudo feito neste trabalho proporcionou-me a possibilidade de compreender melhor os conceitos de Geometria Diferencial envolvidos, bem como o instinto investigativo de diferentes abordagens como: analisar se a embalagem estudada é de fato a que apresenta a melhor forma, se durante a produção existe uma maneira de otimizar o processo e conseqüentemente minimizar os custos de produção visando o maior lucro entre outras possibilidades do ponto de vista econômico. Concluímos que o uso da Geometria Diferencial na indústria é de grande importância, pois através dela podemos determinar maneiras mais eficazes de projetar equipamentos.

A Apêndice

A.1 Curvas BC e \overline{BC}

Nesta apêndice, mostraremos que a parte do plano acima de \overline{BC} e o molde contendo BC são isométricos, ou seja, os coeficientes da primeira forma quadrática são iguais. Alguns destes resultados serão usados na seção (3.6)

A.1.1 Coeficientes da primeira forma quadrática da superfície acima de \overline{BC}

Primeiramente, calcularemos os coeficientes da para a parte do plano acima da curva \overline{BC} . Os coeficientes são definidos como:

$$\overline{E}(s, u) = \langle \overline{\boldsymbol{\rho}}_s, \overline{\boldsymbol{\rho}}_s \rangle(s, u) \quad (\text{A.1})$$

$$\overline{F}(s, u) = \langle \overline{\boldsymbol{\rho}}_s, \overline{\boldsymbol{\rho}}_u \rangle(s, u) \quad (\text{A.2})$$

$$\overline{G}(s, u) = \langle \overline{\boldsymbol{\rho}}_u, \overline{\boldsymbol{\rho}}_u \rangle(s, u). \quad (\text{A.3})$$

Derivando a equação (3.6) em relação a s e u , temos

$$\overline{\boldsymbol{\rho}}_s(s, u) = \overline{\mathbf{r}}_s(s) + u\overline{\mathbf{d}}_s(s) \quad (\text{A.4})$$

$$\overline{\boldsymbol{\rho}}_u(s, u) = \overline{\mathbf{d}}_s(s). \quad (\text{A.5})$$

Substituindo a equação (A.4) na equação (A.1), temos

$$\begin{aligned} \overline{E} &= \langle \overline{\mathbf{r}}_s + u\overline{\mathbf{d}}_s, \overline{\mathbf{r}}_s + u\overline{\mathbf{d}}_s \rangle \\ \overline{E} &= \langle \overline{\mathbf{r}}_s, \overline{\mathbf{r}}_s \rangle + 2u\langle \overline{\mathbf{r}}_s, \overline{\mathbf{d}}_s \rangle + u^2\langle \overline{\mathbf{d}}_s, \overline{\mathbf{d}}_s \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Substituindo as equações (3.1), (3.18) e (3.22) em (A.6), obtemos

$$\overline{E} = \langle \overline{\mathbf{t}}, \overline{\mathbf{t}} \rangle + 2usen(\alpha)(\overline{\kappa} - \alpha_s) + u^2(\overline{\kappa} - \alpha_s)^2. \quad (\text{A.7})$$

Lembrando que a curva está parametrizada por comprimento de arco, então

$$\langle \overline{\mathbf{t}}, \overline{\mathbf{t}} \rangle = 1.$$

Usando este fato na equação (A.7), temos

$$\boxed{\overline{E} = 1 + 2usen(\alpha)(\overline{\kappa} - \alpha_s) + u^2(\overline{\kappa} - \alpha_s)^2}. \quad (\text{A.8})$$

Segundo coeficiente da curva \overline{BC} . Substituindo as equações (A.4) e (A.5) na equação (A.2), temos

$$\begin{aligned}\overline{F} &= \langle \overline{\mathbf{r}}_s + u\overline{\mathbf{d}}_s, \overline{\mathbf{d}} \rangle \\ \overline{F} &= \langle \overline{\mathbf{r}}_s, \overline{\mathbf{d}} \rangle + u\langle \overline{\mathbf{d}}_s, \overline{\mathbf{d}} \rangle \\ \overline{F} &= \langle \overline{\mathbf{r}}_s, \overline{\mathbf{d}} \rangle + u\underbrace{\langle \overline{\mathbf{d}}_s, \overline{\mathbf{d}} \rangle}_{=0} \\ \overline{F} &= \langle \overline{\mathbf{r}}_s, \overline{\mathbf{d}} \rangle.\end{aligned}\tag{A.9}$$

Substituindo a equação (3.1) na equação (A.9), temos

$$\overline{F} = \langle \overline{\mathbf{t}}, \overline{\mathbf{d}} \rangle.\tag{A.10}$$

Substituindo a equação (3.4) na (A.10), encontramos

$$\begin{aligned}\overline{F} &= \langle \overline{\mathbf{t}}, \cos(\alpha)\overline{\mathbf{t}} + \sin(\alpha)\overline{\mathbf{n}} \rangle \\ \overline{F} &= \cos(\alpha)\underbrace{\langle \overline{\mathbf{t}}, \overline{\mathbf{t}} \rangle}_{=1} + \sin(\alpha)\underbrace{\langle \overline{\mathbf{t}}, \overline{\mathbf{n}} \rangle}_{=0}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{\overline{F} = \cos(\alpha)}.\tag{A.11}$$

Terceiro coeficiente da curva \overline{BC} . Substituindo a equação (A.5) na (A.3), temos

$$\overline{G} = \langle \overline{\mathbf{d}}, \overline{\mathbf{d}} \rangle.\tag{A.12}$$

Substituindo a equação (3.4) na (A.12), obtemos

$$\begin{aligned}\overline{G} &= \langle (\cos(\alpha)\overline{\mathbf{t}} + \sin(\alpha)\overline{\mathbf{n}}), (\cos(\alpha)\overline{\mathbf{t}} + \sin(\alpha)\overline{\mathbf{n}}) \rangle \\ \overline{G} &= \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{\overline{G} = 1}.\tag{A.13}$$

A.1.2 Coeficientes da primeira forma quadrática do molde

Os coeficientes são definidos como:

$$E(s, u) = \langle \boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_s \rangle(s, u)\tag{A.14}$$

$$F(s, u) = \langle \boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_u \rangle(s, u)\tag{A.15}$$

$$G(s, u) = \langle \boldsymbol{\rho}_u, \boldsymbol{\rho}_u \rangle(s, u).\tag{A.16}$$

Derivando a equação (3.7) em relação a s e u , encontramos

$$\rho_s(s, u) = \mathbf{r}_s + u\mathbf{d} \quad (\text{A.17})$$

$$\rho_u(s, u) = \mathbf{d}. \quad (\text{A.18})$$

Primeiro coeficiente. Substituindo a equação (A.17) na (A.14), temos

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{r}_s + u\mathbf{d}_s, \mathbf{r}_s + u\mathbf{d}_s \rangle \\ E &= \langle \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s \rangle + 2u\langle \mathbf{t}, \mathbf{d}_s \rangle + u^2\langle \mathbf{d}_s, \mathbf{d}_s \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Substituindo as equações (3.2), (3.19) e (3.27) na equação (A.19), temos

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + 2u(-\alpha_s \sin(\alpha) + \kappa \sin(\alpha) \cos(\phi)) + u^2(\sin^2(\alpha) \cos^2(\phi) \kappa^2 + \cos^2(\alpha) \kappa^2 \\ &\quad - 2\alpha_s \kappa \cos(\phi) + \alpha_s^2 + \sin^2(\alpha) (\phi_s + \tau)^2 + \sin(2\alpha) \sin(\phi) \kappa (\phi_s + \tau)). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Lembrando que a curva está parametrizada pelo comprimento de arco, então

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 1.$$

Usando este fato na equação (A.20), temos

$$\begin{aligned} E &= 1 + 2u(-\alpha_s \sin(\alpha) + \kappa \sin(\alpha) \cos(\phi)) + u^2(\sin^2(\alpha) \cos^2(\phi) \kappa^2 + \cos^2(\alpha) \kappa^2 \\ &\quad - 2\alpha_s \kappa \cos(\phi) + \alpha_s^2 + \sin^2(\alpha) (\phi_s + \tau)^2 + \sin(2\alpha) \sin(\phi) \kappa (\phi_s + \tau)). \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Fazendo as distributivas na equação (A.21), obtemos

$$\begin{aligned} E &= 1 + 2u\kappa \cos(\phi) \sin(\alpha) - 2u\alpha_s \sin(\alpha) + u^2 \sin^2(\alpha) \cos^2(\phi) \kappa^2 + u^2 \cos^2(\alpha) \kappa^2 \\ &\quad - 2u^2 \alpha_s \kappa \cos(\phi) + u^2 \alpha_s^2 + u^2 \sin^2(\alpha) (\phi_s + \tau)^2 \\ &\quad + 2u^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \sin(\phi) \kappa (\phi_s + \tau). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Substituindo as equações (3.30) e (3.35) na equação (A.22), temos

$$\begin{aligned} E &= 1 + 2u\bar{\kappa} \sin(\alpha) - 2u\alpha_s \sin(\alpha) + u^2 \bar{\kappa}^2 \sin^2(\alpha) + u^2 \kappa^2 \cos^2(\alpha) - \\ &\quad 2u^2 \alpha_s \bar{\kappa} + u^2 \alpha_s^2 + u^2 \kappa^2 \sin^2(\alpha) \sin^2(\phi) \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} + \\ &\quad 2u^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \sin(\phi) \kappa \left(-\kappa \sin(\phi) \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Simplificando alguns termos, obtemos

$$\begin{aligned} E &= 1 + 2u\bar{\kappa} \sin(\alpha) - 2u\alpha_s \sin(\alpha) + u^2 \bar{\kappa}^2 \sin^2(\alpha) + u^2 \kappa^2 \cos^2(\alpha) - \\ &\quad 2u^2 \alpha_s \bar{\kappa} + u^2 \alpha_s^2 + u^2 \kappa^2 \sin^2(\phi) \cos^2(\alpha) - 2u^2 \kappa^2 \sin^2(\phi) \cos^2(\alpha). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Agrupando os termos, encontramos

$$\begin{aligned}
 E &= 1 + 2u\bar{\kappa}\text{sen}(\alpha) - 2u\alpha_s\text{sen}(\alpha) + u^2\bar{\kappa}^2\text{sen}^2(\alpha) + \\
 &\quad u^2\kappa^2\cos^2(\alpha)\underbrace{\left(1 - \text{sen}^2(\phi)\right)}_{=\cos^2(\phi)} - 2u^2\alpha_s\bar{\kappa} + u^2\alpha_s^2 \\
 E &= 1 + 2u\bar{\kappa}\text{sen}(\alpha) - 2u\alpha_s\text{sen}(\alpha) + u^2\bar{\kappa}^2\text{sen}^2(\alpha) + \\
 &\quad u^2\cos^2(\alpha)\underbrace{\kappa^2\cos^2(\phi)}_{=\bar{\kappa}^2} - 2u^2\alpha_s\bar{\kappa} + u^2\alpha_s^2.
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

Após algumas simplificações e utilizando a relação trigonométrica fundamental, temos

$$E = 1 + 2u\bar{\kappa}\text{sen}(\alpha) - 2u\alpha_s\text{sen}(\alpha) + u^2\bar{\kappa}^2 - 2u^2\alpha_s\bar{\kappa} + u^2\alpha_s^2. \tag{A.26}$$

Portanto,

$$\boxed{E = 1 + 2u\text{sen}(\alpha)(\bar{\kappa} - \alpha_s) + u^2(\bar{\kappa} - \alpha_s)^2.} \tag{A.27}$$

Segundo coeficiente da curva BC . Substituindo as equações (A.17) e (A.18) na equação (A.15), temos

$$\begin{aligned}
 F &= \langle \mathbf{r}_s + u\mathbf{d}_s, \mathbf{d} \rangle \\
 F &= \langle \mathbf{r}_s, \mathbf{d} \rangle + u\langle \mathbf{d}_s, \mathbf{d} \rangle \\
 F &= \langle \mathbf{r}_s, \mathbf{d} \rangle + u\underbrace{\langle \mathbf{d}_s, \mathbf{d} \rangle}_{=0} \\
 F &= \langle \mathbf{r}_s, \mathbf{d} \rangle.
 \end{aligned} \tag{A.28}$$

Substituindo a equação (3.2) na equação (A.28), temos

$$F = \langle \mathbf{t}, \mathbf{d} \rangle. \tag{A.29}$$

Substituindo a equação (3.5) na (A.29), encontramos

$$\begin{aligned}
 F &= \langle \mathbf{t}, \cos(\alpha)\mathbf{t} + \text{sen}(\alpha)(\cos(\phi)\mathbf{n} + \text{sen}(\phi)\mathbf{b}) \rangle \\
 F &= \cos(\alpha)\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{=1} + \text{sen}(\alpha)\cos(\phi)\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle}_{=0} + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\phi)\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle}_{=0}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{F = \cos(\alpha).} \tag{A.30}$$

Terceiro coeficiente da curva BC . Substituindo a equação (A.18) na equação (A.16), temos

$$G = \langle \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle. \tag{A.31}$$

Substituindo a equação (3.5) na equação (A.31), obtemos

$$G = \langle \cos(\alpha) \mathbf{t} + \sin(\alpha) (\cos(\phi) \mathbf{n} + \sin(\phi) \mathbf{b}), \\ \cos(\alpha) \mathbf{t} + \sin(\alpha) (\cos(\phi) \mathbf{n} + \sin(\phi) \mathbf{b}) \rangle.$$

Termos cruzados resultam em zero, logo

$$\begin{aligned} G &= \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \cos^2(\phi) + \sin^2(\alpha) \sin^2(\phi) \\ G &= \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \underbrace{(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi))}_{=1} \\ G &= \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha). \end{aligned} \tag{A.32}$$

Portanto,

$$\boxed{G = 1.} \tag{A.33}$$

Após todos os coeficientes determinados, notamos que de fato, eles são iguais para ambas as curvas, ou seja,

$$\bar{E} = E, \quad \bar{F} = F \quad \text{e} \quad \bar{G} = G.$$

Portanto as superfícies são isométricas.

Referências

- BOERSMA, J.; MOLENAAR, J. Geometry of the shoulder of a packaging machinel. *Siam*, v. 37, n. 3, p. 406–422, 1995. Citado na página 6.
- CARMO, M. P. do. *Geometria Diferencial de curvas e superfícies*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. v. 5. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 7.
- DELGADO, J.; FRENSEL, K. *Notas de Geometria Diferencial I*. Rio de Janeiro: UFF, 2010. Citado na página 7.
- FORSYTH, A. R. *Lectures on Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Cambridge: Cambridge University Press, 1912. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 21.
- KREYSZIG, E. *Differential Geometry*. New York: Dover, 1991. Citado na página 6.
- MOT, E. The shoulderproblem of forming, filling and closing machines for pouches. *Applied Science*, v. 27, n. 1, p. 1–13, 1973. Citado na página 6.
- OPREA, J. *Differential Geometry and Its Applications*. Washington DC: The Mathematical Association of America, 2007. v. 2. Citado na página 6.
- STRUIK, D. J. *Lectures on Classical Differential Geometry*. New York: Dover, 1988. Citado na página 6.
- TENENBLAT, K. *Introdução á Geometria Diferencial*. São Paulo: Blucher, 2008. v. 2. Citado 3 vezes nas páginas 6, 7 e 12.