

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA
CURSO DE MATEMÁTICA APLICADA

Arthur Mendes Alves

Precificação de Opções: Um modelo em tempo-discreto

Rio Grande
2014

Arthur Mendes Alves

Precificação de Opções: Um modelo em tempo-discreto

Monografia apresentada ao Curso de Matemática Aplicada da FURG, como requisito para a obtenção parcial do grau de BACHAREL em Matemática Aplicada.

Orientador: Adriano De Cezaro

Doutor em Matemática - FURG

Co-orientador: Fabiana Travessini De Cezaro

Doutora em Matemática - FURG

Rio Grande

2014

Alves, Arthur

Precificação de Opções: Um modelo em tempo-discreto / Arthur

Alves - 2014

68.p

1.Teoria da Probabilidade 2.Mercado de Opções 3.Mercados Completos. I.Título.

CDU xxx.xx

Arthur Mendes Alves

Precificação de Opções: Um modelo em tempo-discreto

Monografia apresentada ao Curso de Matemática Aplicada da FURG, como requisito para a obtenção parcial do grau de BACHAREL em Matemática Aplicada.

Aprovado em dezembro de 2014

BANCA EXAMINADORA

Adriano De Cezaro

Doutor em Matemática - FURG

Catia Maria dos Santos Machado

Doutora em Engenharia da Produção - FURG

Paul Gerhard Kinas

PhD em Estatística - FURG

Dentre a maior riqueza, a família, dedico este trabalho a duas mulheres excepcionais que tanto me ajudaram a manter minha determinação e hoje as tenho guardadas em minha memória, Solange e Neuza.

Agradecimentos

A meus pais Sandro e Vilma, e meus irmãos Leonardo e Alexandre pelo encorajamento, apoio e valorização do meu potencial.

Ao professor Adriano De Cezaro e a professora Fabiana Travessini De Cezaro pela orientação, amizade, oportunidades oferecidas e principalmente, pela paciência, sem a qual este trabalho não se realizaria.

Aos professores do IMEF pelos seus ensinamentos e aos funcionários do curso, que durante esses anos, contribuíram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional.

Resumo

Ao longo deste trabalho será desenvolvido um modelo que descreve uma forma de atribuir um valor justo a uma classe de contratos financeiros, cuja principal finalidade é reduzir a incerteza sobre investimentos de alto risco no mercado de capitais. Nosso tema dissertará sobre o mercado de derivativos financeiros em opções de compra e venda do tipo Européias. Para a modelagem, suporemos que as ações seguem um processo estocástico (contínuo), enquanto daremos atenção substancial a estrutura binomial (discreta) do processo. A essência da precificação justa de opções nessa estrutura probabilística é verificar a existência e a unicidade de uma medida de probabilidade martingale que seja equivalente a medida de probabilidade frequencial proposta pelo processo binomial. Esta característica é basicamente o que constitui o modelo em tempo-discreto de precificação de opções aqui adotado, conhecido como modelo de Cox-Ross-Rubinstein (CRR). Por fim, estudaremos o comportamento assintótico dos parâmetros livres do modelo CRR que expressam a tendência a subida e descida das ações. Provaremos que, para uma escolha apropriada dos parâmetros em questão e sobre certas hipóteses econômicas o modelo CRR converge, em probabilidade, para a famosa fórmula de Black-Scholes. O principal argumento na convergência é garantir que, no limite em termos de probabilidade, a distribuição binomial converge para a distribuição normal. Como consequência, o modelo CRR pode ser usado como uma aproximação calculável (discreta) do modelo de Black-Scholes. Concluímos este trabalho apresentando algumas simulações numéricas que comprovam a convergência do modelo CRR para a fórmula de Black-Scholes.

Palavras-chaves: modelo CRR, processo binomial, martingale, precificação de opções

“Porque a todos é concedido ver, mas a poucos é dado perceber. Todos vêem o que tu aparentas ser, poucos percebem aquilo que tu és.”.

Nicolau Maquiavel (O Príncipe)

Sumário

Introdução	8
1 Preliminares	9
1.1 Considerações da teoria de probabilidade	9
1.2 Considerações de economia e finanças	20
2 Mercado de Opções: um passeio pela história	26
2.1 A origem dos primeiros contratos de opções	26
2.2 Surgem novas ideias em finanças quantitativas	27
2.3 As contribuições de Cox-Ross-Rubinstein	29
2.4 Resultados modernos e tendências para pesquisas em opções	30
3 Processos estocásticos em tempo-discreto	31
3.1 Informação e Filtrações	31
3.2 Uma visão geral sobre Martingales	32
3.3 Transformada Martingale	35
4 O modelo proposto por Cox-Ross-Rubinstein	37
4.1 A construção do modelo	37
4.2 Precificação neutra ao risco em um modelo CRR	39
5 A fórmula de Black-Scholes como aproximação do modelo binomial	44
5.1 A extensão do modelo CRR para múltiplos períodos de negociação	44
5.2 Parâmetros de modelos binomiais e suas propriedades assintóticas	45
6 Simulação computacional da aproximação binomial	51

7	Conclusões	54
7.1	Considerações finais	55
7.2	Trabalhos futuros	55
A	Teorema Central do Limite	56
B	Implementação algorítmica da simulação computacional	62
	Referências Bibliográficas	67

Introdução

A atmosfera do mercado financeiro é marcada pelo risco e a incerteza do retorno de investimentos. Com finalidade de proteger investidores imersos neste cenário instável, ao longo dos anos aprimorou-se a ideia de um instrumento financeiro que hoje é conhecido como derivativo.

Uma opção é um derivativo que confere ao detentor, o direito, mas não a obrigação de comprar ou vender uma quantidade predeterminada de um ativo-objeto. As opções podem ser do tipo Americana ou Européia (as mais tradicionais e utilizadas no Brasil), a primeira pode ser exercida até a data do vencimento da opção (data de exercício), a segunda apenas na data de exercício da opção. A negociação desse tipo de contrato financeiro motiva o desenvolvimento extensivo de diversas pesquisas de aplicação da matemática.

Em 1973 com a criação da *Chicago Board Options Exchange (CBOE)*, começou a se popularizar negociações com opções sobre ações. Desde então o seu crescimento tem sido satisfatoriamente animador. A revista *Risk* (12/97) estimou que o arrecadamento bruto do mercado de derivativos global foi de \$35 trilhões em 1996. Como contraste, a revista *Financial Times* de 7 de Outubro de 2002 informou que o volume arrecadado com taxas de juros e derivativos foi de \$83 trilhões [13].

Nesta monografia, nossa contribuição esta pautada na análise e desenvolvimento do modelo de Cox-Ross-Rubinstein de precificação de opções que foi precursor de uma família de modelos em tempo-discreto quando ainda surgia a conceituada área de finanças quantitativas. O trabalho está dividido em um capítulo preliminar, cinco capítulos de desenvolvimento e para concluir dois apêndices, dispostos da seguinte forma:

O capítulo preliminar auxiliará no rigor teórico e na compreensão do modelo de estudo, para isso será explorado conceitos da teoria da probabilidade com ênfase em elementos da teoria da medida. Para a contextualização e o uso de argumentos econômicos durante o trabalho, apresentamos uma seção dedicada a tópicos selecionados de finanças.

No capítulo 2, o leitor é incentivado a conhecer o surgimento e a evolução de

modelos de precificação de opções, a sua importância em cada momento da história assim como os seus principais contribuidores.

No capítulo 3, é apresentado um recurso de grande valor para a área de probabilidade e do cálculo estocástico. Os martingales são processos estocásticos com propriedades essenciais para a precificação justa de opções. Ainda é explorado um caso especial de martingale que faz a conexão entre o cálculo estocástico discreto (análogo às diferenças finitas) e o cálculo estocástico contínuo, as transformadas martingale.

No capítulo 4, é reservado para a construção de um modelo binomial assim como a sua respectiva estrutura probabilística. Em seguida a partir dos trabalhos de John C. Cox, Stephen Ross e Mark Rubinstein, utilizamos uma condição de mudança de medidas, da medida frequencial do modelo binomial para uma medida martingale, verificando dessa forma que o modelo CRR é neutro ao risco na precificação de opções (dentro das hipóteses do contexto em questão).

No capítulo 5, é apresentado a aproximação de uma sequência de modelos em tempo-discreto para um modelo em tempo-contínuo de precificação de opções (com as devidas adaptações). As propriedades assintóticas dos parâmetros livres do modelo CRR nos levam a uma conceituada fórmula de precificação de opções, conhecida como fórmula de Black-Scholes. Em especial, teremos a convergência da distribuição binomial para a distribuição normal.

No capítulo 6, é apresentado uma verificação prática e visual da aproximação binomial abordada no Capítulo 5.

Nas conclusões são destacadas a importância das hipóteses adotadas, suas limitações do ponto de vista prático (em um breve comentário) e a possibilidade de outras convergências de distribuições a partir de escolhas específicas dos parâmetros livres do modelo CRR. O capítulo é concluído com propostas de extensão deste trabalho com o uso selecionado da análise numérica aplicado a contratos mais complexos de opções.

O apêndice A é uma complementação das demonstrações desenvolvidas no Capítulo 5 com a demonstração do teorema central do limite de Lindeberg e uma aplicação para convergência da distribuição binomial para distribuição normal.

O apêndice B é voltado para a implementação algorítmica do resultados do Capítulo 6 através do uso de recursos computacionais residentes do software MATLAB.

1 Preliminares

Neste capítulo reuniremos as principais características de um contrato de opções, as classes de participantes que atuam no mercado de capitais e a descrição das hipóteses estudadas no modelo do Capítulo 5. Destacaremos, em particular, a importância econômica dos conceitos de arbitragem. Do ponto de vista da teoria de probabilidade vamos assumir que o leitor esteja familiarizado com o conteúdo de um curso introdutório de probabilidade e estatística, e assim omitiremos algumas provas.

1.1 Considerações da teoria de probabilidade

O tratamento que daremos a seguir sobre probabilidade seguirá dos conceitos fundamentais da teoria da medida. Embora não faça parte dos nossos objetivos aprofundar nossos estudos sobre a teoria da medida, alguns de seus resultados serão imprescindíveis para a precificação neutra ao risco e, conseqüentemente, para atribuir o preço justo de uma opção. Além disso, acreditamos que esta seja uma forma mais elegante de apresentar a teoria de probabilidade num sentido mais generalizado.

Definição 1.1.1. Uma coleção $\mathcal{A}_0$ de subconjuntos de um conjunto Ω é chamado de uma álgebra em Ω se:

- (i) $\Omega \in \mathcal{A}_0$,
- (ii) $A \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow A^c = \Omega - A \in \mathcal{A}_0$,
- (iii) $A, B \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_0$.

Usando a Definição 1.1.1 e indução matemática, é possível provar que uma álgebra em Ω é finitamente fechada na complementação e união de uma família de subconjuntos de Ω . Para mais detalhes veja [11].

Definição 1.1.2. Uma álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de um conjunto Ω é chamado ζ -álgebra¹

¹Na literatura, a notação mais usual para esse termo é σ -álgebra, porém, faremos essa troca para não entrarmos em conflito de definição com o parâmetro do mercado, a volatilidade σ .

em Ω se para qualquer sequência $A_n \in \mathcal{A}$, $(n \in \mathbb{N})$, satisfaça

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}. \quad (1.1)$$

O par $(\Omega, \mathcal{A})$ é chamado espaço mensurável.

Observação 1.1.1. Em algumas situações vamos utilizar a ζ -álgebra gerada por intervalos da reta, ou seja, a menor ζ -álgebra que contém todos os intervalos que é conhecida na literatura por ζ -álgebra de Borel ($\mathcal{B}$) ou $\zeta(X)$ (chamada ζ -álgebra gerada por X) [11].

Definição 1.1.3. Chamamos de semi-anel em Ω a uma coleção $\mathcal{S}$ de subconjuntos de Ω quando:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{S}$,
- (ii) se S_1 e $S_2 \in \mathcal{S}$ então $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{S}$,
- (iii) se $S_0 \subseteq S$ esta em $\mathcal{S}$ então existem $S_j \in \mathcal{S}$ disjuntos tais que $S - S_0 = \sum_{j=1}^m S_j$, $m < +\infty$.

Chamamos de *medida finitamente aditiva* a qualquer função ν definida num semi-anel $\mathcal{S}$, tal que $\nu(\emptyset) = 0$ e

$$\nu(S) = \sum_{j=1}^m \nu(S_j) \text{ quando } S = \sum_{j=1}^m S_j; \ S_j, S \in \mathcal{S}, \ m < +\infty.$$

De forma semelhante, ν é ζ -aditiva quando:

$$\nu(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(S_n) \text{ sempre que } S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n; \ S_n, S \in \mathcal{S}.$$

Definição 1.1.4. Seja $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e uma medida ζ -aditiva

$$\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty).$$

O trio $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ é chamado espaço de medida.

Definição 1.1.5. Uma medida $\mathbb{P}$ em um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{A})$ é chamada medida de probabilidade se

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

O trio $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ é chamado de espaço de probabilidade, o conjunto Ω é conhecido como espaço amostral e $\forall A \in \mathcal{A}$ os seguintes axiomas são verificados:

- (i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- (ii) $\mathbb{P}(A) \geq 0$ para todo A ,
- (iii) Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ são disjuntos em $\mathcal{A}$, $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ (aditividade finita),
- (iii*) Se $A_1, A_2, \dots$ são disjuntos, $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(A_i)$ (aditividade enumerável),
- (iv) Se $B \subseteq A$ e $\mathbb{P}(A) = 0$, então $\mathbb{P}(B) = 0$.

Definição 1.1.6. Seja $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Para $A \subset \mathbb{R}$ defina $f^{-1}(A) := \{w \in \Omega : f(w) \in A\}$. Chamamos f $(\mathcal{A})$ -mensurável se

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \text{ para todo } B \in \mathcal{B}.$$

Definição 1.1.7. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Uma variável aleatória X é uma função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (neste espaço de probabilidade em especial, $(\mathcal{F})$ -mensurável), tal que $X^{-1}(B) = \{w \in \Omega : X(w) \in B\} \in \mathcal{F}$ para todo boreliano $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Uma representação naturalmente conhecida de uma variável aleatória X é a sua função de distribuição, definida por:

$$F_X(x) := \mathbb{P}(\{w : X(w) \leq x\}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definição 1.1.8. (i) A variável aleatória X é discreta se toma um número finito ou enumerável de valores, isto é, se existe $\{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ tal que $X(w) \in \{x_1, x_2, \dots\} \forall w \in \Omega$ e satisfaz

$$F_X(x) = \sum_{i: x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i: x_i \leq x} p(x_i),$$

onde $p(x_i)$ é chamada função de probabilidade (ou de massa) de X .

(ii) A variável aleatória X é contínua se existe uma função $f \geq 0$ tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, dizemos que f é função de densidade de X .

Definição 1.1.9. Variáveis aleatórias $X_1, X_2, \dots$ são ditas independentes sempre que para $A_i \in \mathcal{B}$ com $i = 1, \dots, n$ tivermos

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n \{X_i \in A_i\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\{X_i \in A_i\}).$$

Definição 1.1.10. A esperança $\mathbb{E}$ de uma variável aleatória X em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é definida por

$$\mathbb{E}(X) := \int_{\Omega} X d\mathbb{P} \text{ ou } \int_{\Omega} X(w) d\mathbb{P}(w).$$

Como consequência imediata da esperança temos a variância,

$$\text{Var}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Definição 1.1.11. Se $\mathbb{E}(X)$ é finita, ou seja $\mathbb{E}|X| < \infty$, dizemos que a variável aleatória X é integrável.

Proposição 1.1.1. Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ são independentes e $\mathbb{E}|X_i| < \infty, i = 1, \dots, n$, então

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i).$$

Demonstração. Disponível em [11, página 130, Proposição 3.5]. $\square$

Definição 1.1.12. Uma medida $\mathbb{P}$ em subconjuntos de Borel da reta real (podemos ainda generalizar para borelianos de espaços euclidianos de ordem mais elevada, $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$) é absolutamente contínua em relação a uma medida de Lebesgue $\mathbb{Q}$ (veja mais informações sobre medida de Lebesgue em [7]) se para todo conjunto mensurável A , $\mathbb{Q}(A) = 0$ implica que $\mathbb{P}(A) = 0$. Usaremos a notação $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ para dizer que $\mathbb{P}$ é absolutamente contínua em relação a $\mathbb{Q}$. Ainda, se $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$, nós chamamos $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ de medidas equivalentes.

Teorema 1.1.1. (*Radon-Nikodým*). Dado um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$, se uma medida ζ -aditiva $\mathbb{Q}$ em $(\Omega, \mathcal{F})$ é absolutamente contínua em relação a uma outra medida ζ -aditiva $\mathbb{P}$ em $(\Omega, \mathcal{F})$, então existe uma função $(\mathcal{F})$ -mensurável $f : X \rightarrow [0, \infty)$ tal que, para qualquer subconjunto mensurável $A \subset X$ temos:

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A f d\mathbb{P}.$$

A função mensurável f é chamada derivada de Radon-Nikodým e é denotada por $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

Demonstração. A demonstração do Teorema de Radon-Nikodým foge do escopo deste trabalho. O leitor poderá encontrar os detalhes em [7, página 265, Teorema 14.10]. $\square$

Para ilustramos um pouco da importância do Teorema de Radon-Nikodým, se $\mathbb{Q}$ escolhido é uma medida de probabilidade nos borelianos da reta ($\mathbb{R}$), suponhamos com uma distribuição normal padronizada $\mathbb{Q}[X \leq x] = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ e $\mathbb{P}$ os próprios

comprimentos da reta $(\mathbb{R})$, daí a derivada de Radon-Nikodým é expressa pela seguinte função densidade de probabilidade:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Um segundo exemplo interessante de destacarmos, agora em equivalência de medidas, é a mudança de variáveis do cálculo. O seguinte teorema pode ser visto em [7, página 205, Teorema 11.25]:

Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow (-\infty, \infty)$ é $(\mathcal{F})$ -mensurável e $f \geq 0$, ou se f é integrável relativamente a $\mathcal{F}$, então para quase todo $r > 0$ a função $\theta \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ é $(\mathcal{F})$ -mensurável em $(-\pi, \pi)$, respectivamente, é integrável, e vale

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx = \int_0^{+\infty} r \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta \right) dr$$

(Substituições simbólicas: $x = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, $dx = r d\theta dr$), que é a mudança em coordenadas polares no $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.1.13. Sejam X e Y variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. A esperança condicional de X dado que $Y = y$, é a esperança da distribuição condicional de X dado que $Y = y$, se esta esperança existir. Ou seja,

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int x dF_X(x|Y = y).$$

A seguir serão apresentadas algumas propriedades úteis da esperança condicional, cujas provas estão disponíveis em [11, página 115, Propriedades 3.3].

Proposição 1.1.2. 1. *Propriedade básica.* $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X)$.

2. *Se $X = c$, para alguma constante c , então $\mathbb{E}(X|Y) = c$.*

3. *Se $X_1 \leq X_2$ então $\mathbb{E}(X_1|Y) \leq \mathbb{E}(X_2|Y)$.*

4. *Linearidade.* $\mathbb{E}(aX_1 + bX_2|Y) = a\mathbb{E}(X_1|Y) + b\mathbb{E}(X_2|Y)$.

5. *Desigualdade de Jensen.* Seja φ uma função convexa. Então $\varphi\{\mathbb{E}(X|Y)\} \leq \mathbb{E}(\varphi\{X\}|Y)$.

6. *Teorema da Convergência Monótona.* Se $X_n \geq 0$ e $(X_n)_{n \geq 1}$ cresce para X ($X_n \uparrow X$), então

$$\mathbb{E}(X_n|Y) \uparrow \mathbb{E}(X|Y).$$

7. *Teorema da Convergência Dominada.* Se $X_n \rightarrow X$ e se existe X_0 integrável tal que $|X_n| \leq X_0$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n|Y) = \mathbb{E}(X|Y).$$

Proposição 1.1.3. Se X é uma variável aleatória integrável em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $\mathcal{G}$ é uma ζ -álgebra em Ω tal que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, então existe uma variável aleatória integrável $(\mathcal{G})$ -mensurável em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, tal que

$$\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) . d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}$$

para todo $A \in \mathcal{G}$. Além do mais, se Y é qualquer variável aleatória integrável $(\mathcal{G})$ -mensurável satisfazendo

$$\int_A Y d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}$$

para todo $A \in \mathcal{G}$, então $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ quase certamente em $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.

Demonstração. Disponível em [9, página 187, Proposição 8.7]. □

Definição 1.1.14. Sejam $X_1, \dots, X_n, X$ variáveis aleatórias, nós dizemos que X_n converge para X em probabilidade se para todo $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Notação: $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Definição 1.1.15. Sejam $X_1, \dots, X_n, X$ variáveis aleatórias, nós dizemos que X_n converge para X quase certamente se $\mathbb{P}(X_n \rightarrow X \text{ quando } n \rightarrow \infty) = 1$, isto é, se o evento $A_0 = \{w : X_n(w) \rightarrow X(w)\}$ é de probabilidade 1. Podemos notar que a convergência quase certa é uma convergência pontual.

Observação 1.1.2. Se uma propriedade é mantida em toda parte de uma determinada álgebra exceto em um conjunto de medida de Lebesgue nula, então nós dizemos que esta propriedade se mantém em *quase toda parte* (ponto de vista da teoria da medida). Se uma propriedade é mantida em toda parte de uma determinada álgebra exceto em um conjunto de probabilidade zero, então nós dizemos que esta propriedade se mantém *quase certamente* (ou com probabilidade 1, ponto de vista da teoria da probabilidade). Veja mais informações sobre medida de Lebesgue e propriedades quase toda parte e quase certamente em [11, 7].

Definição 1.1.16. Sejam $X_1, \dots, X_n, X$ variáveis aleatórias com, respectivas funções de distribuição, $F_1, \dots, F_n, F$. X_n converge em distribuição para X , quando $n \rightarrow \infty$, se $F_n(x) \rightarrow F(x)$ para todo x ponto de continuidade de F . Notação: $X_n \xrightarrow{D} X$ ou $F_n \xrightarrow{D} F$.

Definição 1.1.17. Se X é uma variável aleatória com função de distribuição F , sua função característica ϕ (ou ϕ_X caso seja necessário enfatizar X) é

$$\phi(t) := \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

A seguir serão apresentadas algumas propriedades úteis de função característica, cujas provas estão disponíveis em [11, página 224].

Proposição 1.1.4. 1. A função característica é limitada por 1: $|\varphi_X(t)| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$.

2. A função característica assume o valor 1 no ponto 0: $\varphi_X(0) = 1$.

3. $\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(-t)$, onde $\bar{c}$ é o complexo conjugado de c (se $c = x + iy$, o seu complexo conjugado é $\bar{c} = x - iy$).

4. φ_X é uniformemente contínua na reta.

5. Se X e Y são independentes, então $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

6. Se $Y = aX + b$, então $\varphi_Y(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$.

7. Se $\mathbb{E}|X|^n < \infty$, então φ_X possui n derivadas contínuas e

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \int (ix)^k e^{itX} dF_X(x), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Teorema 1.1.2. (Teorema da continuidade de Paul Lévy) Sejam $F_1, F_2, \dots$ funções de distribuição e $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, respectivamente, suas funções características. Se φ_n converge pontualmente para um limite φ e se φ é contínua no ponto zero, então

(a) existe uma função de distribuição F tal que F_n converge fracamente para F e

(b) φ é a função característica de F .

Demonstração. A demonstração deste resultado foge aos objetivos deste trabalho. O leitor interessado pode consultar [11, página 237, Teorema 6.2]. $\square$

Observação 1.1.3. Se uma sequência de variáveis converge em distribuição, $X_n \xrightarrow{D} X$, dizemos que as respectivas funções de distribuição, F_{X_n} , convergem fracamente para F_X .

O próximo resultado desempenha um papel fundamental em nosso trabalho, assim apresentaremos a demonstração do mesmo, que foi retirada de [11, página 234, Teorema 6.1].

Teorema 1.1.3. (*Teorema de Helly-Bray*) *Sejam $F, F_1, F_2, \dots$ funções de distribuição. Se F_n converge fracamente para F , então*

$$\int g(x) dF_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int g(x) dF(x)$$

para toda função g contínua e limitada ($g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).

Demonstração. Para $-\infty < a < b < \infty$,

$$\begin{aligned} \left| \int g dF_n - \int g dF \right| &\leq \left| \int g dF_n - \int_a^b g dF_n \right| + \left| \int_a^b g dF_n - \int_a^b g dF \right| + \\ &\quad + \left| \int_a^b g dF - \int g dF \right| \stackrel{\text{def}}{=} I + II + III. \end{aligned}$$

Seja $c = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| < \infty$ (por hipótese), e seja $\epsilon > 0$. Como

$$\begin{aligned} III &= \left| \int_{-\infty}^a g dF + \int_b^{\infty} g dF \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^a c dF + \int_b^{\infty} c dF \\ &= c(F(a) + 1 - F(b)), \end{aligned}$$

podemos escolher a e b pontos de continuidade de F tais que

$$III \leq c(F(a) + 1 - F(b)) < \epsilon,$$

pois $F(a) + 1 - F(b) \rightarrow 0$ quando $a \rightarrow -\infty$ e $b \rightarrow +\infty$, e basta escolher a suficientemente pequeno e b suficientemente grande (os pontos de continuidade são densos [10]). Para esses valores de a e b , temos

$$I \leq \int_{-\infty}^a c dF_n + \int_b^{\infty} c dF_n = c(F_n(a) + 1 - F_n(b)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c(F(a) + 1 - F(b)),$$

logo $I + III < 2\epsilon$ para n suficientemente grande. Ao verificarmos II vemos que g é uniformemente contínua em $[a, b]$ pois é contínua em um compacto, logo podemos escolher $x_0, x_1, \dots, x_N$ tais que (i) $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, (ii) os x_i sejam pontos de continuidade de F , e (iii) $|g(x) - g(x_i)| < \epsilon$ para todo $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, N-1$.

Então:

$$\begin{aligned}
 m_{ni} &\stackrel{\text{def}}{=} (g(x_i) - \epsilon) \{F_n(x_{i+1}) - F_n(x_i)\} \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) dF_n(x) \leq \\
 &\leq (g(x_i) + \epsilon) \{F_n(x_{i+1}) - F_n(x_i)\} \stackrel{\text{def}}{=} M_{ni}, \\
 m_i &\stackrel{\text{def}}{=} (g(x_i) - \epsilon) \{F(x_{i+1}) - F(x_i)\} \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) dF(x) \leq \\
 &\leq (g(x_i) + \epsilon) \{F(x_{i+1}) - F(x_i)\} \stackrel{\text{def}}{=} M_i.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$m_{ni} - M_i \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} g dF_n - \int_{x_i}^{x_{i+1}} g dF \leq M_{ni} - m_i,$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Somando, temos

$$\sum_{i=0}^{N-1} (m_{ni} - M_i) \leq \int_a^b g dF_n - \int_a^b g dF \leq \sum_{i=0}^{N-1} (M_{ni} - m_i).$$

Quando $n \rightarrow \infty$, temos $m_{ni} \rightarrow m_i$ e $M_{ni} \rightarrow M_i$, porque os x_i são pontos de continuidade de F e F_n converge fracamente a F . Logo,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{N-1} (m_{ni} - M_i) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} (m_i - M_i) = -2\epsilon (F(b) - F(a)) \geq -2\epsilon, \\
 \sum_{i=0}^{N-1} (M_{ni} - m_i) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} (M_i - m_i) = 2\epsilon (F(b) - F(a)) \leq 2\epsilon.
 \end{aligned}$$

Portanto, para todo n suficientemente grande,

$$-3\epsilon < \int_a^b g dF_n - \int_a^b g dF < 3\epsilon.$$

Logo, $|\int g dF_n - \int g dF| < 5\epsilon$ para todo n suficientemente grande, para todo ϵ , isto é, $\int g dF_n \rightarrow \int g dF$. $\square$

Observação 1.1.4. Se $X_n \xrightarrow{D} X$, então decorre do teorema acima que para toda g contínua e limitada: $\mathbb{E}g(X_n) \rightarrow \mathbb{E}g(X)$.

Corolário 1.1.1. (a) *Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias. Se $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow \varphi(t) \forall t \in \mathbb{R}$, e se φ é contínua no ponto zero, então φ é função característica de alguma variável aleatória, digamos $\varphi = \varphi_X$, e $X_n \xrightarrow{D} X$,*

(b) *Se $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}} \forall t \in \mathbb{R}$, então $X_n \xrightarrow{D} N(0, 1)$.*

Demonstração. (a) De fato estamos reescrevendo aqui o teorema da continuidade de Paul Lévy pois dado as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \dots, X_n$ com suas respectivas funções de distribuição, $F_1, F_2, \dots, F_n$. Se $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow \varphi_X(t) \forall t \in \mathbb{R}$ e $\varphi_X(t)$ é contínua no ponto zero, então existe uma F tal que $F_n \rightarrow F$ fracamente (o que é equivalente a dizer que $X_n \xrightarrow{D} X$) e φ_X é a função característica de F .

(b) Como $\varphi_{X_n}(t)$ converge para a função característica $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ contínua em $t = 0$, pelo item (a) tudo o que precisamos fazer é provar que a função característica da distribuição normal padrão é dada por $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Seja $X \sim N(0, 1)$. Então

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \int e^{itx} dF_X(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - x^2/2} dx \\ &= (\text{completando o quadrado}) = \\ &= e^{-t^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-(x-it)^2/2} dx = e^{-t^2/2},\end{aligned}$$

onde verificamos a última equação da seguinte maneira:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-it)^2/2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-(x-it)^2/2} dx = (\text{fazendo } z = x - it) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n-it}^{n-it} e^{-z^2/2} dz.$$

Podemos agora definir os seguintes intervalos de integração (para n fixo e $t > 0$): $I_1 = [-n - it, n - it]$, $I_2 = [n - it, n]$, $I_3 = [-n, n]$, $I_4 = [-n - it, -n]$. Como a função $f(z) = e^{-z^2/2}$ é analítica no plano complexo $\mathbb{C}$, o Teorema de Cauchy [1] diz que a integral de f sobre qualquer curva fechada dá zero. Logo para $t > 0$,

$$\int_{I_1} e^{-z^2/2} dz + \int_{I_2} e^{-z^2/2} dz - \int_{I_3} e^{-z^2/2} dz - \int_{I_4} e^{-z^2/2} dz = 0,$$

isto é,

$$\int_{-n-it}^{n-it} e^{-z^2/2} dz = - \int_{I_2} e^{-z^2/2} dz + \int_{-n}^n e^{-z^2/2} dz + \int_{I_4} e^{-z^2/2} dz.$$

Como

$$\int_{-n}^n e^{-t^2/2} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi},$$

basta que

$$\int_{I_2} e^{-z^2/2} dz \text{ e } \int_{I_4} e^{-z^2/2} dz$$

tendam a zero quando $n \rightarrow \infty$. Para $t < 0$, o método é análogo, a única diferença é que os sentidos de I_2 e I_4 se invertem. Aliás, é suficiente notar que X simétrica

$\Rightarrow \varphi_X(t) = \varphi_X(-t)$. Para $t = 0$ temos o caso trivial.

Provaremos que

$$\int_{I_2} e^{-z^2/2} dz \rightarrow 0;$$

para o intervalo I_4 a prova é análoga. Como o comprimento do intervalo I_2 é t , basta provarmos que

$$\max_{z \in I_2} |e^{-z^2/2}| \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Para $z = n - is$, onde $0 \leq s \leq t$, temos

$$z^2 = n^2 - s^2 - 2nsi, \quad e^{-z^2/2} = e^{(s^2-n^2)/2} e^{nsi}.$$

Como $|e^{it}| = 1 \quad \forall t$, temos $|e^{-z^2/2}| = e^{(s^2-n^2)/2}$. Portanto,

$$\max_{z \in I_2} |e^{-z^2/2}| = e^{(t^2-n^2)/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

Teorema 1.1.4 (Teorema Central do Limite de Lindeberg). *Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias independentes tais que $\mathbb{E}(X_n) = \mu_n$ e $\text{Var}(X_n) = \sigma_n^2$, onde $\sigma_n^2 < \infty$ e pelo menos um $\sigma_n^2 > 0$. Sejam $F_n = F_{X_n}$,*

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

e

$$s_n = \sqrt{\text{Var}(S_n)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}.$$

Então para que

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{s_n} \xrightarrow{D} N(0, 1) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

é suficiente que a seguinte condição, chamada condição de Lindeberg, seja satisfeita:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x - \mu_k| > \epsilon s_n} (x - \mu_k)^2 dF_k(x) = 0.$$

Em outras palavras, se a condição de Lindeberg é satisfeita, vale a convergência normal.

Convidamos ainda o leitor a ver a demonstração do Teorema Central do Limite de Lindeberg no Apêndice A, pois esse resultado será essencial para capítulo 5.

Para concluir a seção observamos que o tratamento aqui expresso por variáveis aleatórias poderia ser generalizado (de maneira não tão intuitiva, diga-se de passagem) por vetores aleatórios, aos interessados ver [11, 13].

1.2 Considerações de economia e finanças

Definição 1.2.1. Um derivativo é um contrato financeiro cujo valor na data de expiração T é determinado exatamente pelo preço de um ativo-objeto (também conhecido como subjacente) no tempo T (dentro de um intervalo de tempo $[0, T]$).

Neste trabalho, nos deteremos aos derivativos que são opções e eventualmente adotaremos ações como ativo-objeto. Interessados em modelos dos demais derivativos podem consultar em [6, 14].

Uma opção é um instrumento financeiro que confere ao investidor o direito mas não a obrigação de fazer a transação de uma quantidade a um preço específico de um determinado ativo-objeto. Esse direito pode ser de compra (Call) ou venda (Put). Existem diversos estilos de opções, dentre eles:

- Opção Européia - uma opção que pode somente ser exercida na data de expiração.
- Opção Americana - uma opção que pode ser exercida em qualquer momento da negociação, antes ou na data de expiração.
- Opção Bermuda - uma opção que pode ser exercida somente em datas específicas durante o período de contrato.
- Opção Asiática - uma opção cujo o pagamento é determinado pela média do preço do subjacente durante algum período de tempo preestabelecido.
- Opção Barreira - qualquer opção que tenha como principal característica que o preço do subjacente deve passar uma certa “barreira” (limite) antes que o instrumento possa ser exercido.
- Opção Binária - uma opção “tudo ou nada” que paga a quantia total se o subjacente satisfaz uma condição previamente definida na expiração ou, caso o contrário, expira sem valor.
- Opção Exótica - qualquer opção dentre uma ampla categoria de opções que pode incluir estruturas financeiras complexas.
- Opção Vanilla - qualquer opção que não é exótica.

Nos próximos capítulos dedicaremos nossa atenção a opções Européias do tipo Vanilla.

Definição 1.2.2. Uma opção de compra (Call) $C(S(t), t)$ do tipo européia sobre um ativo $S(t)$ é um documento que dá o direito, mas não a obrigação, ao seu detentor de comprar uma unidade do ativo-objeto pelo preço de strike (ou exercício) K na data de vencimento T que é o tempo de expiração da opção. A opção de compra dá ao seu detentor um benefício,

$$\max(S(T) - K, 0) \quad (1.2)$$

Definição 1.2.3. Uma opção de venda (Put) $P(S(t), t)$ do tipo européia sobre um ativo $S(t)$ é um documento que dá o direito, mas não a obrigação, ao seu detentor de vender uma unidade do ativo-objeto pelo preço de strike (ou exercício) K na data de vencimento T que é o tempo de expiração da opção. A opção de venda dá ao seu detentor um benefício,

$$\max(K - S(T), 0) \quad (1.3)$$

Observação 1.2.1. Na bolsa de valores brasileira as opções de compra de ações têm o estilo americano, e as opções de venda são negociadas no estilo europeu.

O comprador (titular) de um ativo-objeto tem uma posição de compra no contrato ou *long position* e o vendedor (lançador) tem uma posição de venda ou *short position*. O investidor que opera um determinado ativo-objeto no modo long position tem a esperança de que o preço do ativo tenha uma alta, pois ele possui o ativo, e com isso espera que valorize. Por outro lado, quem opera no modo short position espera que o mercado tenha uma queda, pois ele tem a obrigação de devolver o ativo-objeto ao titular, caso ele escolha exercer o seu direito de compra. A seguir, estão representadas graficamente as expectativas do titular do contrato, long call (compra de uma opção de compra) e long put (compra de uma opção de venda), e as expectativas do lançador do contrato, short call (venda de uma opção de compra) e short put (venda de uma opção de venda), a partir do lucro das opções em função do preço do ativo-objeto na maturidade do contrato:

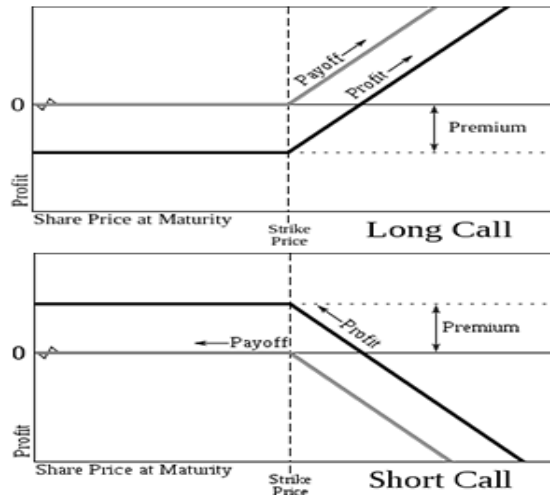


Figura 1.1: Comportamento de uma opção de compra - payoff
(benefício ou retorno) $C = \max(S(T) - K, 0)$

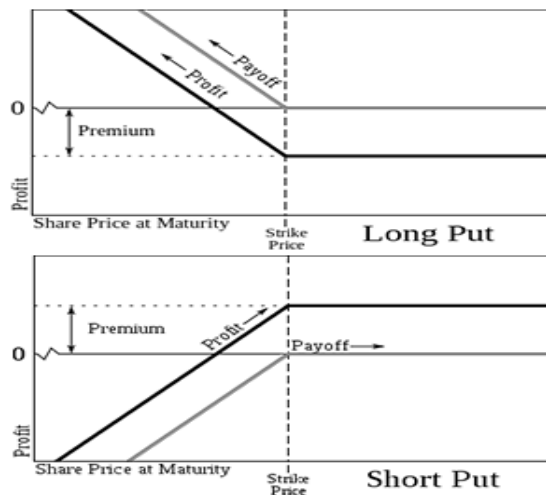


Figura 1.2: Comportamento de uma opção de venda - payoff
(benefício ou retorno) $P = \max(K - S(T), 0)$

Podemos classificar os negociantes de derivativos em três classes distintas:

- Hedgers - eles usam o mercado para se protegerem contra as oscilações dos preços dos ativos, câmbio, taxa de juros etc. Hedging é uma tentativa de reduzir a exposição ao risco que uma companhia já enfrenta.
- Especuladores - eles são atraídos aos mercados pelos investidores ou hedgers que não desejam carregar custos e preferem transferir riscos, criando assim condições mais atraentes de preços. A sua principal preocupação é aumentar capital, não receita de dividendos. Tanto pode comprar e vender no mesmo dia, como especular com empreendimentos de curto prazo. Estes agentes têm um papel fundamental para o funcionamento do mecanismo destes mercados, pois lhes confere liquidez.

- Arbitradores - eles procuram tirar proveito de variações na diferença de preço entre dois ativos ou entre dois mercados, ou das expectativas futuras de mudanças nessas diferenças.

Ao discutirmos a precificação de opções para um caso idealizado, certas hipóteses devem ser feitas sobre o mercado financeiro. De um modo geral, nosso modelo é regido da seguinte forma:

- Não há custos ou taxas de transações.
- Não há restrições para vendas a descoberto.
- Não há diferença entre o preço de oferta de um ativo para o preço de demanda do mesmo, *bid-ask spread*.
- As transações de compra e venda realizadas pelos investidores não tem nenhum efeito sobre o mercado, *price taker*.

Observação 1.2.2. É importante frisarmos que as preferências e gostos individuais dos participantes do mercado não são levadas em consideração, tudo que assumimos é a hipótese fraca da qual estes participantes optam por escolhas de maior retorno, lucratividade, e com isso um crescimento no consumo sem acréscimos de custos sempre será aceito.

A essência do sentido técnico da arbitragem é a possibilidade de garantir um lucro sem exposição ao risco. Caso contrário, oportunidades de obtenção de lucro a baixo risco conduziriam o mercado a desordem, conseqüentemente teríamos um modelo desordenado. Para ilustrarmos o assunto acima:

Exemplo 1.2.1. Considere um investidor que atua no mercado de modo que três ativos financeiros são negociados: títulos B (como poupança, ativos de baixo risco), ações S e opções de compra (Call) do tipo europeu C com preço de exercício $K = 1$ sobre a ação. O investidor pode investir hoje, tempo $t = 0$, nos três ativos financeiros e deixar seu investimento aplicado até o tempo $t = T$ para com isso obter o retorno desejado. Assumiremos que os preços ($R\$$) correntes dos ativos financeiros são dados por,

$$B(0) = 1, S(0) = 1, C(0) = 0, 2$$

e que em $t = T$ podem haver dois cenários: uma alta com preços ($R\$$)

$$B(T, u) = 1, 25, S(T, u) = 1, 75, C(T, u) = 0, 75,$$

e uma queda com preços ($R\$$)

$$B(T, d) = 1,25, S(T, d) = 0,75, C(T, d) = 0.$$

Nosso investidor tem um capital inicial de $R\$25,00$, e se divide conforme a tabela 1.1 abaixo:

Ativo financeiro	Quantidade	Valor total em $R\$$
Título	10	10,00
Ação	10	10,00
Call	25	5,00

Tabela 1.1: Portfólio original

No tempo $t = T$ o portfólio original apresentará um retorno:

Cenário	Título	Ação	Call	Total
Alta	12,50	17,50	18,75	48,75
Queda	12,50	7,50	0	20,00

Tabela 1.2: Retorno do portfólio original

Agora vamos considerar o seguinte portfólio reestruturado:

Ativo financeiro	Quantidade	Valor total em $R\$$
Título	11,8	11,80
Ação	7	7,00
Call	29	5,80

Tabela 1.3: Portfólio reestruturado

Este novo portfólio exige um investimento de apenas $R\$24,60$, nos poupando $R\$0,40$ em relação ao portfólio original com o mesmo retorno conforme a tabela 1.4.

Logo a situação de mercado acima caracteriza uma possibilidade de arbitragem. Podemos observar ainda que o arbitrador pode realizar essa operação em uma escala tão grande quanto o possível. Desta forma o mercado não pode alcançar um equilíbrio.

Cenário	Título	Ação	Call	Total
Alta	14,75	12,25	21,75	48,75
Queda	14,75	5,25	0	20,00

Tabela 1.4: Retorno do portfólio reestruturado

Outra relação importante para nossos propósitos é a paridade call-put, uma relação entre o ativo-objeto e as respectivas opções de compra C (call) e venda P (put):

Proposição 1.2.1. *A paridade entre os preços do subjacente S e as opções de compra e venda do tipo europeia sobre determinadas ações que não pagam dividendos é dada por:*

$$S + P(S, t) - C(S, t) = Ke^{-r(T-t)} \quad (1.4)$$

Demonstração. Consideremos um portfólio que consiste de uma ação, um short position em uma opção de compra (call); descrevemos o valor deste portfólio por $V(t)$. Então:

$$V(t) = S(t) + P(t) - C(t)$$

para todo $t \in [0, T]$. Na expiração, temos:

$$V(T) = S(T) + (S(T) - K)^- - (S(T) - K)^+ = S(T) + K - S(T) = K.$$

Onde,

$$(S(T) - K)^- := \max\{K - S(T), 0\} \text{ e } (S(T) - K)^+ := \max\{S(T) - K, 0\}.$$

Este portfólio desta forma garante um pagamento K no tempo de exercício T . Para assegurarmos que não haverá oportunidades de arbitragem, o valor do portfólio em qualquer tempo t deve corresponder ao valor do pagamento K descontado de uma taxa de juros r livre de risco em T , isto é, $V(t) = Ke^{-r(T-t)}$. $\square$

2 Mercado de Opções: um passeio pela história

Neste capítulo apresentaremos um pouco da importância e evolução dos modelos de precificação de opções que conhecemos hoje. Para entendermos melhor como cada hipótese foi sendo incorporada ao longo da história, dando origem a diferentes modelos, vamos acompanhar os principais acontecimentos no mercado financeiro sobre contratos de investimentos futuros, desde o seu possível criador, Tales de Mileto, até nomes que impulsionaram buscas por fundamentos mais teóricos tais como: Bachelier, Samuelson, Fischer Black, Robert C. Merton, John C. Cox entre outros expoentes da área de Finanças Quantitativas.

2.1 A origem dos primeiros contratos de opções

A primeira menção a conceitos robustos de opções pode ser encontrado no livro de Aristóteles, *A política*, publicado em 332 a.C. Inconformado com as críticas atribuídas ao seu colega filósofo Tales de Mileto, Aristóteles destacou em sua obra a engenhosidade de Tales que utilizou sua habilidade como astrônomo para prever certas condições meteorológicas, afim de predizer o acontecimento de uma grande colheita de oliva.

Na época Tales não tinha dinheiro suficiente para comprar prensas de extração de azeite, então ele investiu todo seu dinheiro em um acordo na forma de um contrato que lhe garantia o uso de todas as prensas da região na próxima temporada. Quando chegou a período de colheita de oliva a demanda por prensas subiu a níveis jamais vistos. Assim, Tales foi capaz de vender o seu direito de uso das prensas por um ótimo negócio, ainda melhor do que se ele tivesse comprado as prensas. Talvez sem saber Tales havia criado o primeiro contrato de opção.

As opções voltaram a aparecer durante um grande evento no mercado financeiro que ficou conhecido como *Tulipa Mania* em 1636. As tulipas foram importadas da Turquia para a Europa em 1500. No início do século 17, as tulipas tornaram-se destaque

internacional por sua beleza e forma e como a demanda por bulbos alcançou altos níveis, produtores e negociantes começaram a trabalhar com contratos de bulbos de tulipas. O comprador de um contrato de tulipas era legalmente obrigado a comprar os bulbos em um prazo predefinido. Hoje em dia este fato é conhecido em finanças como *contratos de futuros* [14]. Em 24 de fevereiro de 1637 o parlamento holandês anunciou que todos os contratos de futuros escritos depois do dia 30 de novembro seriam interpretados como opções, ou seja, caso o preço atual do mercado de bulbos caísse os compradores poderiam optar por pagar uma multa e renunciar o seu recebimento, em vez de pagar o preço total do contrato. Diversas pessoas especularam que o preço dos bulbos continuariam a crescer, inclusive muitas delas hipotecaram suas casas e seus negócios afim de alavancar seus lucros.

Pouco tempo depois a *bolha* estourou abatendo principalmente a economia holandesa, e mediante a esse desastre financeiro muitos culpavam as opções por suas perdas.

2.2 Surgem novas ideias em finanças quantitativas

O início do século 20 trouxe diversos nomes inspiradores para a teoria de finanças, em especial para o seu aspecto quantitativo que ainda estava dando seus primeiros passos. Louis Bachelier, hoje também conhecido como o pai dos métodos matemáticos em finanças afirmou em sua tese de doutorado, *Théorie de la Speculation* [21], que a evolução das flutuações nos preços das ações negociadas na bolsa de Paris tratava-se na verdade de um processo aleatório dado pela solução da equação diferencial estocástica [12],

$$dS_t = \mu(t) dt + \sigma(t) dW_t, \quad (2.1)$$

onde μ é a tendência (drift) de S_t , anualizada, e σ é o termo que representa a volatilidade da ação. O termo $\{W(t, w), t \geq 0\}$, ou $\{W_t, t \geq 0\}$, representa um processo estocástico que satisfaz a condição de média zero e variância Δ_t (tal que Δ_t pode ser visto como a variação do preço da ação entre os instantes t e $t + \Delta_t$). Ao revisar os estudos de Bachelier, o economista Paul Samuelson encontrou um equívoco econômico notável. A hipótese que sugere que a evolução das ações segue um *Movimento Browniano Aritmético* (2.1), implica que o preço das ações podem ser negativos ferindo o seguinte princípio:

Definição 2.2.1. (Princípio de Responsabilidade Limitada) O acionista pode perder no

máximo o montante que investiu inicialmente $S(t=0) = S_0 > 0$.

Com isso Samuelson propôs que o preço das ações deveriam seguir um *Movimento Browniano Geométrico* (2.2), que é solução da equação diferencial estocástica,

$$dS_t = \mu(t) S_t dt + \sigma(t) S_t dW_t, \quad S(t=0) = S_0 > 0. \quad (2.2)$$

O ano de 1973 foi o divisor de águas as finanças quantitativas. O primeiro destaque foi a criação do *Chicago Board of Options Exchange*, contribuindo definitivamente para a padronização dos contratos de opção de compra e, pela primeira vez na história, as opções se tornaram acessíveis a população de uma maneira geral. Com o estabelecimento da *Options Clearing Corporation (OCC)* como regulador dos contratos negociados, uma estrutura eficiente foi posta em prática restando apenas um obstáculo para uma aceitação generalizada de opção: um modelo de precificação bem definido de opções, pois ainda não havia métodos aceitos, tornando a precificação arbitrária.

O segundo destaque, ainda em 1973, deve-se aos economistas Fischer Black e Myron Scholes com a publicação do artigo *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* [18] e ao economista Robert C. Merton com a publicação do artigo *Theory of Rational Option Pricing* [19], proporcionando uma análise teórica de contratos de opção pelos quais os autores receberam o prêmio Nobel de Economia de 1997, [14]. O *Modelo de Black-Scholes* (as vezes apresentado como *Black-Scholes-Merton*) calcula o valor justo de mercado de uma opção do tipo européia para um determinado ativo-objeto, sobre a hipótese de que exista um mercado perfeito com as seguintes características:

- O preço de uma ação segue um Movimento Browniano Geométrico com tendência (drift) μ e volatilidade σ constante.
- Não há custos ou taxas nas transações. Todos os títulos são perfeitamente divisíveis.
- Não há pagamento de dividendos durante a vida do derivativo.
- Não há oportunidades de arbitragem sem risco.
- O comércio de títulos é dada de forma contínua.
- Não há restrições para a venda a descoberto.
- A taxa de juros livre de risco r é constante e igual para todos os vencimentos.

Sob as hipóteses acima, Black e Scholes provaram que o preço justo de uma opção deveria seguir a dinâmica dada pela equação diferencial parcial

$$\frac{\partial C(t, S)}{\partial t} + rS \frac{\partial C(t, S)}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C(t, S)}{\partial S^2} = rC(t, S), \quad (2.3)$$

onde t pertence ao período de negociação $[0, T]$, C é o preço de uma opção de compra do tipo europeia, S é o título de renda variável de alto risco (ação), σ é a volatilidade do título (ação) e r é a taxa de juros livre de risco. Usando a rica teoria de EDP's, Black e Scholes mostraram que a solução da EDP (2.3) é dada por

$$C(t, S) = SN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2), \quad (2.4)$$

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (2.5)$$

$$d_2 = \frac{\log(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (2.6)$$

onde K é o preço de strike da opção, $S > 0$ e $t \in [0, T]$. Detalhes desta dedução podem ser vistos em [16]

Neste trabalho, nos ateremos a uma abordagem ligeiramente diferente, onde o mercado não segue um modelo contínuo, mas sim um modelo discreto. Provaremos que, a abordagem discreta converge fracamente para a fórmula de Black e Scholes no Capítulo 5.

2.3 As contribuições de Cox-Ross-Rubinstein

A fórmula de Black e Scholes fez muito sucesso no mercado financeiro, bem como, foi extensivamente estudada. Este estima o valor de uma opção sobre o tempo de forma contínua. De algumas notas de aula de John C. Cox, Stephen Ross e Mark Rubinstein, surgiu o modelo CRR que ao contrário do modelo de Black-Scholes, estima o valor de uma opção sobre o tempo de forma discreta, seguindo a estrutura de uma árvore binomial. O modelo CRR foi publicado no artigo *Option Pricing: A simplified approach* [17].

Embora os modelos binomiais sejam computacionalmente mais lentos que a fórmula de Black-Scholes, estes modelos são particularmente mais precisos para opções de longo prazo sobre subjacentes com pagamento de dividendos. Por estes motivos, várias versões do modelo binomial são amplamente usadas por profissionais do mercado de opções.

2.4 Resultados modernos e tendências para pesquisas em opções

O ano de 1997 foi o ano da consagração máxima para a bela fórmula de Black-Scholes, proporcionando aos seus criadores o prêmio Nobel de Economia. Esta foi uma época que todas as negociações financeiras se resumiam a uma única fórmula fechada e simples, mas poucos se questionaram sobre quais circunstâncias a fórmula de Black-Scholes continuava válida. A verdade é que esta fórmula é uma aproximação útil mas possui algumas limitações, tais como:

- Superestimar movimentos extremos do ativo-objeto.
- A hipótese do instante, tal que a negociação a baixo custo produz risco de liquidez, o que torna difícil a operação de hedge.

Após a crise financeira ocorrida 1987 conhecida como *Black Monday*, analistas encontraram um certo padrão no mercado financeiro que explicava o caráter irrealista da fórmula de Black-Scholes. Ao contrário do que se acreditava, a volatilidade atrelada as oscilações dos ativos que fora considerada como constante na equação de Black-Scholes possuía uma dinâmica. Para explicar tal dinâmica, diversos modelos surgiram. Alguns exemplos são os modelos que consideram a volatilidade como uma função do preço do ativo-objeto e do tempo (*Modelos de Volatilidade local*), *Modelos de Volatilidade Estocástica* e *Modelos de Volatilidade Smile*. As principais linhas de pesquisa em Finanças Quantitativas trabalham com modelos similares, com focos específicos em conexão com diversas áreas da matemática como Otimização, Teoria do Controle e Programação Dinâmica, Problemas Inversos, Equações Diferenciais Estocásticas, entre outras. Para maiores detalhes, veja [22].

3 Processos estocásticos em tempo-discreto

Neste capítulo trabalharemos com a ideia de *fair game*, definiremos o que são martingales e como podemos explorar a suas características em um modelo justo de precificação de opções. O capítulo é concluído com a adaptação dos martingales que pertence a uma abordagem probabilística que é análoga ao caso discreto do cálculo estocástico.

3.1 Informação e Filtrações

O conhecimento de determinadas informações afetam diretamente nossas escolhas no dia-a-dia. No ambiente corporativo e financeiro não é diferente. A tomada de decisões é extremamente sensível ao menor sinal de mudança do mercado. Logo, o uso e a manipulação de informações (disponíveis de forma legal) é um alvo constante de analistas e demais agentes econômicos.

Neste trabalho nos restringiremos a situação mais simples, tal que com o passar do tempo novas informações se tornam disponíveis a todos os agentes, atualizando suas informações continuamente. Podemos expressar em linguagem matemática este fluxo de informações com um conceito conhecido como *filtração*. Um exemplo natural da modelagem do fluxo de informações pode ser representada pelas ζ -álgebras; logo uma sequência de ζ -álgebras $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$, que é crescente:

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

indica a informação disponível no mercado, por $\mathcal{F}_n$, no tempo n . Daqui em diante, $\mathcal{F}_0$ representará a informação inicial (se não houver nenhuma, tomaremos $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, a ζ -álgebra trivial). Além disso,

$$\mathcal{F}_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n = \zeta \left(\bigcup_n \mathcal{F}_n \right),$$

representará todas as informações que nós ainda iremos ter acesso (a “ ζ -álgebra do apocalipse”). Eventualmente utilizaremos a notação $\mathcal{F}$ ao invés de $\mathcal{F}_\infty$. Uma família $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ é chamada de *filtração*; um espaço de probabilidade que inclui uma filtração, $(\Omega, \mathbb{F}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, é chamado de *base estocástica* ou *espaço filtrado*.

3.2 Uma visão geral sobre Martingales

O espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e a esperança condicional $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$, nos dão o instrumental necessário para lidar com situações estáticas envolvendo aleatoriedade. Contudo, em situações dinâmicas, tais como a evolução no tempo, é importante redefinirmos essa estrutura.

Um processo estocástico $X = \{X_n : n \in I\}$ é uma família de variáveis aleatórias, definidas em um espaço de probabilidade comum, indexado pelo conjunto I . Para o nossos propósitos, I representará o tempo tal que $I = \{0, 1, 2, \dots, T\}$ será o nosso horizonte finito de negociações e $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ será o nosso horizonte “infinito hipotético” de negociação. O processo estocástico $X = (X_n)_{n=0}^\infty$ é *adaptado* a filtração $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ se X_n é $(\mathcal{F}_n)$ -mensurável $\forall n$. Então se X é adaptado, nós teremos conhecimento do valor de X_n no tempo n . Se

$$\mathcal{F}_n = \zeta(X_0, X_1, \dots, X_n)$$

dizemos que $(\mathcal{F}_n)$ é a filtração natural de X . Na notação que utilizamos para uma variável aleatória X sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $X(w)$ é o valor que X assume para o evento $w \in \Omega$. Para o processo estocástico $X = (X_n)$, $X_n(w)$ torna-se o valor que X assume para o evento $w \in \Omega$ no tempo n , também denotado por $X(n, w)$.

Agora façamos uma breve pausa para discutirmos o que são *fair games*? Como o próprio nome sugere, tratam-se de jogos que oferecem as mesmas condições para cada um de seus participantes. Embora a ideia seja subjetiva (podemos encontrar diferentes definições do termo justo), vamos apresentar a seguir um bom exemplo de um fair game.

Considere um jogo de azar realizado entre dois jogadores, Antônio e Carlos. Se o jogo é favorável ao Antônio, então a soma das suas vitórias, $\mathbb{E}(V_A)$, será no mínimo tanto quanto a de Carlos; isto é, $\mathbb{E}(V_A) \geq \mathbb{E}(V_C)$. Por vitórias nós queremos dizer ganhos líquidos, e assim nós subtraímos qualquer perda e tratamos uma perda como uma vitória de quantidade negativa. Se o jogo é favorável ao Carlos, então $\mathbb{E}(V_C) \geq \mathbb{E}(V_A)$. Parece razoável dizer que o jogo é justo se é favorável a ambos os jogadores. Por essa linha de raciocínio podemos concluir que

$$\mathbb{E}(V_A) = \mathbb{E}(V_C).$$

Se as apostas feitas por Antônio e Carlos são S_A e S_C , respectivamente, então a receita total (Rt) do jogo será $S_A + S_C$. Se a saída total (St), que é a soma de todos os ganhos

líquidos dos jogadores é também $S_A + S_C$, nós dizemos que o jogo é um jogo de soma zero. Com isso,

$$\mathbb{E}(V_A) + \mathbb{E}(V_C) = Rt - St = 0.$$

Logo

$$\mathbb{E}(V_A) = \mathbb{E}(V_C) = 0.$$

A recíproca é verdadeira. Podemos resumir os fatos acima da seguinte forma:

Proposição 3.2.1. *Um jogo de soma zero é um fair game se e somente se o ganho esperado de cada jogador é zero.*

A essa altura estamos prontos para estudar um dos principais tipos de processos estocásticos: os martingales. Estes processos se caracterizam por modelar fair games em apostas - situações onde há muita aleatoriedade, mas há uma tendência de estabilidade, na qual as possíveis influências tendem a se cancelar em média.

Definição 3.2.1. Um processo $X = (X_n)$ é chamado martingale relativo a $(\{\mathcal{F}_n\}, \mathbb{P})$ se

- (i) X é adaptado a $\{\mathcal{F}_n\}$,
- (ii) $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ para todo n ,
- (iii) $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$, $\mathbb{P}$ - quase certamente ($n \geq 1$).

Ainda, X é um supermartingale se no lugar de (iii)

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1}, \mathbb{P} - \text{quase certamente } (n \geq 1).$$

X é um submartingale se no lugar de (iii)

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \geq X_{n-1}, \mathbb{P} - \text{quase certamente } (n \geq 1).$$

Exemplo 3.2.1. Suponha que (X_n) seja uma quantia acumulada por um apostador após n lançamentos de uma moeda não-viciada, onde o apostador ganha um R\$1,00 se a moeda sai cara e perde R\$1,00 se a moeda sai coroa. A quantia condicional esperada do apostador depois do próximo teste, dado a história, é igual a quantia presente. Esta sequência é um martingale.

Exemplo 3.2.2 (Martingale de De Moivre). Agora suponha que o jogo com uma moeda viciada, com probabilidade p de apresentar cara e probabilidade $q = 1 - p$ de apresentar coroa. Seja

$$X_{n+1} = X_n \pm 1$$

com “+” no caso de cara e “-” no caso de coroa. Seja

$$Y_n = (q/p)^{X_n}.$$

Então $(Y_n)_{n=0}^\infty$ é um martingale com relação a $(X_n)_{n=0}^\infty$. Pois,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{n+1} | X_1, \dots, X_n) &= p (q/p)^{X_{n+1}} + q (q/p)^{X_{n-1}} \\ &= p (q/p) (q/p)^{X_n} + q (p/q) (q/p)^{X_n} \\ &= q (q/p)^{X_n} + p (q/p)^{X_n} = (q/p)^{X_n} = Y_n. \end{aligned}$$

Proposição 3.2.2. Se $(X_n)_{n=0}^\infty$ é um martingale em $(\Omega, \mathbb{F}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, então

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_m)$$

para todo n e m .

Demonstração. Pela Proposição 1.1.2,

$$\mathbb{E}(X_n) = \int_{\Omega} X_n d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) d\mathbb{P} = \int_{\Omega} X_{n+1} d\mathbb{P} = \mathbb{E}(X_{n+1}).$$

Por isso $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_{n+2}) = \dots = \mathbb{E}(X_m)$ para todo m e n . O mesmo poderia ser feito para valores de m menores que n . $\square$

A importância dos martingales para a precificação de opções fica evidente quando o comparamos com um processo que não é martingale. Mesmo que o valor deste processo (X_n) qualquer satisfaça a condição

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}).$$

O conhecimento do resultado a priori pode ser capaz de reduzir a incerteza dos resultados futuros. Assim, o valor esperado do próximo resultado dá conhecimento do resultado presente e todos os resultados a priori podem ser maiores que o resultado atual se uma estratégia vitoriosa é usada. Martingales excluem a possibilidade de uma estratégia vitoriosa baseada na história dos jogos (eventos, ou informações de um modo geral).

3.3 Transformada Martingale

Imagine agora uma série de investimentos especulativos em tempo discreto. Não há nenhuma ação no tempo $n = 0$; há diversas ações ou tomadas de decisão no tempo $n = 1, 2, 3, \dots$, e

$$\Delta X_n := X_n - X_{n-1}$$

representam os nossos ganhos líquidos por aplicação no tempo n .

Chamamos um processo $C = (C_n)_{n=1}^\infty$ de preditivo se C_n é $(\mathcal{F}_{n-1})$ -mensurável para todo $n \geq 1$. Pense em C_n como a aplicação do investimento no tempo n (podemos ver que C_0 não é definido, pois não há aplicação no tempo 0). A preditividade diz que você deve decidir quanto aplicar no tempo n baseado na história (informação disponível) anterior a n . Os retornos no tempo n são $C_n \Delta X_n = C_n (X_n - X_{n-1})$. Assim o total dos retornos é dado por

$$Y_n = \sum_{k=1}^n C_k \Delta X_k = \sum_{k=1}^n C_k (X_k - X_{k-1}).$$

Também usaremos as notações

$$Y = C \bullet X, \quad \Delta Y_n = C_n \Delta X_n$$

(($C \bullet X$)₀ = 0 pois $\sum_{k=1}^0$ é vazio), e chamamos $C \bullet X$ de transformada martingale de X por C .

Teorema 3.3.1. (i) *Se C é um processo preditivo não-negativo limitado e X é um supermartingale, então $C \bullet X$ é um supermartingale nulo em zero.*

(ii) *Se C é limitado e preditivo e X é um martingale, então $C \bullet X$ é martingale nulo em zero.*

Demonstração. $Y = C \bullet X$ é integrável, pois C é limitado e X é integrável. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n - Y_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(C_n (X_n - X_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= C_n \mathbb{E}((X_n - X_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

no caso (i), pois $C \geq 0$ e X é um supermartingale,

$$= 0$$

no caso (ii), pelo fato de X ser um martingale. □

Lema 3.3.1. *Uma sequência adaptada de variáveis aleatórias reais integráveis (X_n) é um martingale se e somente se para alguma sequência preditiva limitada (C_n) ,*

$$\mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n C_k \Delta X_k \right) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Demonstração. Se (X_n) é um martingale, Y definido por $Y_0 = 0$,

$$Y_n = \sum_{k=1}^n C_k \Delta X_k \quad (n \geq 1)$$

é a transformada martingale $C \bullet X$, logo é um martingale. Agora $\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(C_1 \mathbb{E}(X_1 - X_0)) = 0$ e nós podemos ver que por indução que

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \mathbb{E}(C_{n+1}(X_{n+1} - X_n)) + \mathbb{E}(Y_n) = 0.$$

Reciprocamente, se a condição do lema é satisfeita, escolha um j fixo, e para qualquer conjunto A $(\mathcal{F}_j)$ -mensurável defina $C_n = 0$ para $n \neq j+1$ e $C_{j+1} = 1_A$. Então (C_n) é preditivo e como por hipótese $\mathbb{E}(\sum_{k=1}^n C_k \Delta X_k) = 0$,

$$\mathbb{E}(1_A(X_{j+1} - X_j)) = 0.$$

Desde que isto seja verdade para todo conjunto $A \in \mathcal{F}_j$, a definição de esperança condicional implica que

$$\mathbb{E}(X_{j+1} | \mathcal{F}_j) = X_j.$$

Desde que isto seja verdade para todo j , (X_n) é um martingale. □

Embora não faça parte dos nossos objetivos discutir mais detalhes sobre transformadas martingales, é importante que o leitor tenha em mente a imagem desse tópico como um análogo discreto do cálculo estocástico. As transformadas martingales dominam a teoria matemática de finanças em tempo-discreto, tal como as integrais estocásticas dominam a teoria matemática de finanças em tempo-contínuo. Dessa forma temos aqui o caso do cálculo das diferenças finitas e a passagem do caso discreto para o caso contínuo é escrita como

$$\Delta Y_n = C_n \Delta X_n \rightarrow dY_t = C_t dX_t,$$

onde os termos do lado direito dY , dX são os diferenciais estocásticos. Para mais detalhes sobre o cálculo estocástico, veja [12].

4 O modelo proposto por Cox-Ross-Rubinstein

Começamos o capítulo caracterizando um modelo de probabilidade para um portfólio formado por um título de renda fixa e uma ação que descreve um processo binomial. Com isso veremos que a estrutura de um modelo CRR nos leva a uma medida martingale equivalente a medida frequencial do processo binomial, o que consequentemente resultará em um modelo de precificação livre de arbitragem.

4.1 A construção do modelo

A partir de agora vamos trabalhar com um modelo do mercado financeiro cujo período de negociação é dado por $t = 0, 1, \dots, T$ e que consiste de dois subjacentes básicos. O primeiro trata-se de um ativo de baixo risco, um título de renda fixa B que produz uma taxa de juros livre de risco $r > 0$ em cada intervalo de tempo $[t, t + 1]$, isto é,

$$B(t + 1) = (1 + r) B(t), \quad B(0) = 1.$$

Como este título está nitidamente em uma progressão geométrica com razão $(1 + r)$, temos que a contribuição para o processo de precificação é $B(t) = (1 + r)^t, t = 0, 1, \dots, T$.

O segundo trata-se de um ativo de maior risco agregado ao investimento, uma ação S cuja a contribuição para o processo de precificação é,

$$S(t + 1) = \begin{cases} (1 + u) S(t) & \text{com probabilidade } p, \\ (1 + d) S(t) & \text{com probabilidade } 1 - p, \end{cases} \quad \text{com } -1 < d < u, S_0 \in \mathbb{R}_0^+.$$

onde u representa o índice de tendência a subida (upper) e d representa o índice de tendência a decida (down).

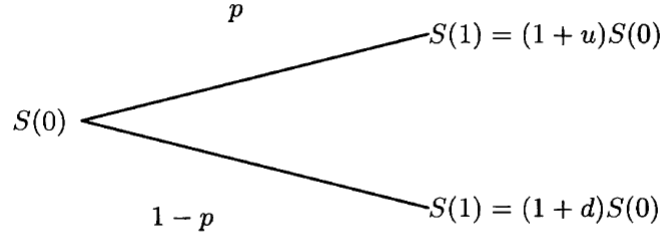


Figura 4.1: Diagrama de um processo binomial de um período de negociação

Definimos os retornos esperados da ação como,

$$Z(t+1) := \frac{S(t+1)}{S(t)} - 1, \quad t = 0, 1, \dots, T-1.$$

Estamos interessados em estabelecer um modelo probabilístico considerando o processo de retornos $Z(t)$, $t = 1, \dots, T$ como variáveis aleatórias definidas nos espaços de probabilidade $(\tilde{\Omega}_t, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{\mathbb{P}}_t)$ com

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_t &= \tilde{\Omega} = \{d, u\}, \\ \tilde{\mathcal{F}}_t &= \tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{P}}(\tilde{\Omega}) = \{\emptyset, \{d\}, \{u\}, \tilde{\Omega}\}, \\ \tilde{\mathbb{P}}_t &= \tilde{\mathbb{P}} \text{ com } \tilde{\mathbb{P}}(\{u\}) = p, \tilde{\mathbb{P}}(\{d\}) = 1 - p, \quad p \in (0, 1). \end{aligned}$$

Nestes espaços de probabilidade podemos definir

$$Z(t, u) = u \text{ e } Z(t, d) = d, \text{ onde } t = 1, 2, \dots, T.$$

Observação 4.1.1. A escolha que adotamos para o processo de retornos $Z(t)$ segue das ideias de Samuelson (Capítulo 2). Ele percebeu que ao invés de olharmos para a dinâmica do preço absoluto de $S(t)$, seria mais interessante focarmos na variação relativa dos preços, $\Delta S(t)/S(t)$ (onde $\Delta S(t) := S(t+1) - S(t)$), que traz mais informação.

Para exemplificarmos isso, considere uma variação de R\$1,00 sobre um título de R\$20,00. Certamente que a mesma variação de R\$1,00 sobre um título de R\$200,00 é muito menos significativo.

Desde que sejamos capazes de escrever o preço da ação como

$$S(t) = S(0) \prod_{\tau=1}^t (1 + Z(\tau)), \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

as definições anteriores sugerem que usemos como modelo probabilístico do subjacente referente ao mercado financeiro o *espaço produto* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ [8], isto é,

$$\Omega = \tilde{\Omega}_1 \times \cdots \times \tilde{\Omega}_T = \tilde{\Omega}^T = \{d, u\}^T,$$

com cada $w \in \Omega$ representando os sucessivos valores de $Z(t)$. Assim cada $w \in \Omega$ é uma T-upla $w = (\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_T)$ e $\tilde{w}_t \in \tilde{\Omega} = \{d, u\}$. Para a ζ -álgebra nós usamos $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e a medida de probabilidade é dada por

$$\mathbb{P}(\{w\}) = \tilde{\mathbb{P}}_1(\{\tilde{w}_1\}) \times \cdots \times \tilde{\mathbb{P}}_T(\{\tilde{w}_T\}) = \tilde{\mathbb{P}}(\{\tilde{w}_1\}) \times \cdots \times \tilde{\mathbb{P}}(\{\tilde{w}_T\}).$$

Agora já podemos redefinir (com um certo abuso de notação) as variáveis aleatórias $Z(t), t = 1, \dots, T$ em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ por

$$Z(t, w) = Z(t, \tilde{w}_t).$$

A definição acima por espaço produto expressa a realização de t ensaios independentes de um experimento básico, caracterizando um experimento composto. Logo podemos notar que as funções mensuráveis $Z(t), t = 1, \dots, T$ tem a mesma distribuição para cada t , pois trata-se de uma sequência de repetições do mesmo experimento. Como as $Z(t)$ dependem de ensaios independentes, elas são independentes com

$$\mathbb{P}(Z(t) = u) = p = 1 - \mathbb{P}(Z(t) = d).$$

Para modelar o fluxo de informação do mercado nós usamos as filtrações básicas

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \quad (\zeta - \text{álgebra trivial}),$$

$$\mathcal{F}_t = \zeta(Z(1), \dots, Z(t)) = \zeta(S(1), \dots, S(t)),$$

$$\mathcal{F}_T = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) \quad (\text{classe de todos os subconjuntos de } \Omega).$$

Observação 4.1.2. Esta construção enfatiza que processos binomiais de múltiplos períodos de negociação podem ser vistos como uma sequência de processos binomiais de um único período de negociação, em outras palavras podemos relacionar o espaço produto com processos estocásticos.

4.2 Precificação neutra ao risco em um modelo CRR

Agora vamos apresentar o modelo de mercado CRR, assim como as devidas garantias para um processo de precificação de opções, ou seja, mostraremos que o modelo CRR é completo e livre de arbitragem.

Definição 4.2.1. Um numéraire é um processo de precificação $(X(t))_{t=0}^T$, que é estritamente positivo para todo $t \in \{0, 1, \dots, T\}$.

Os resultados apresentados a seguir são de grande importância para a validação do nosso modelo, destacando a existência e unicidade de uma medida martingale em relação a estrutura probabilística previamente apresentada. As respectivas demonstrações seguem argumentos econômicos robustos e extensos. Embora fundamentais, fogem do escopo deste trabalho.

Teorema 4.2.1. *O mercado $\mathcal{M}$ é livre de arbitragem se e somente se existe uma medida de probabilidade $\mathbb{P}^*$ equivalente à $\mathbb{P}$ (medida frequencial da estrutura probabilística do mercado), tal que o processo de precificação descontado $\tilde{S}$ (preço da ação vezes um fator de desconto predefinido) é um $(\mathbb{P}^*)$ -martingale.*

Teorema 4.2.2. *O processo de precificação de qualquer derivativo X cujos retornos podem ser replicados por um portfólio de ativos financeiros é dado pela Fórmula de Precificação Neutra ao Risco*

$$\pi_X(t) = \beta(t)^{-1} \mathbb{E}^*(X \cdot \beta(T) | \mathcal{F}_t) \quad \forall t = 0, 1, \dots, T, \quad (4.1)$$

onde $\mathbb{E}^*$ é o operador esperança com relação a uma medida $(\mathbb{P}^*)$ -martingale equivalente.

Teorema 4.2.3. *Um mercado $\mathcal{M}$ livre de arbitragem é completo se e somente se há uma única medida de probabilidade $(\mathbb{P}^*)$ equivalente à $(\mathbb{P})$ tal que os preços dos ativos financeiros descontados são martingales.*

Como consequência dos Teoremas 4.2.1 e 4.2.3,

Teorema 4.2.4 (Teorema Fundamental da Precificação de Ativos). *Em um mercado $\mathcal{M}$ completo e livre de arbitragem, há uma única medida $(\mathbb{P}^*)$ -martingale equivalente.*

Essencialmente, um modelo CRR é um processo que depende de um portfólio (B, S) semelhante ao desenvolvido na seção anterior porém com fatores de alta e queda do mercado apropriados (definidos na Proposição 5.2.1). O Teorema Fundamental da Precificação de Ativos 4.2.4 indica que devemos entender a estrutura de uma medida martingale equivalente no modelo CRR. Portanto de agora em diante usaremos a contribuição do processo de precificação $B(t)$ como um numéraire. Nossa primeira tarefa será

encontrar uma medida martingale equivalente $\mathbb{Q}$ tal que $Z(1), \dots, Z(T)$ permaneçam independentes e identicamente distribuídas, isto é, uma medida de probabilidade $\mathbb{Q}$ definida na medida produto por uma medida $\tilde{\mathbb{Q}}$ em $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ tal que $\tilde{\mathbb{Q}}(\{u\}) = q$ e $\tilde{\mathbb{Q}}(\{d\}) = 1 - q$.

Proposição 4.2.1. 1. Uma medida martingale $\mathbb{Q}$ para o preço da ação descontada $\tilde{S}$ existe se e somente se

$$d < r < u. \quad (4.2)$$

2. Se a equação (4.2) é válida, então há uma única medida caracterizada por

$$q = \frac{r - d}{u - d}. \quad (4.3)$$

Demonstração. Desde que $S(t) = \tilde{S}(t)B(t) = \tilde{S}(t)(1+r)^t$, nós temos $Z(t+1) = \frac{S(t+1)}{S(t)} - 1 = \left(\frac{\tilde{S}(t+1)}{\tilde{S}(t)}\right)(1+r) - 1$. Então, o preço descontado $\left(\tilde{S}(t)\right)$ será um $\mathbb{Q}$ -martingale se e somente se para $t = 0, 1, \dots, T-1$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}(t+1) | \mathcal{F}_t] = \tilde{S}(t) \Leftrightarrow \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{\tilde{S}(t+1)}{\tilde{S}(t)}\right) | \mathcal{F}_t\right] = 1 \Leftrightarrow \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z(t+1) | \mathcal{F}_t] = r.$$

Mas como vimos na seção anterior $Z(1), \dots, Z(T)$ são independentes entre si e por isso $Z(t+1)$ é independente de $\mathcal{F}_t = \zeta(Z(1), \dots, Z(T))$. Logo

$$r = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z(t+1) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z(t+1)] = u \cdot \tilde{\mathbb{Q}}(Z(t+1) = u) + d \cdot \tilde{\mathbb{Q}}(Z(t+1) = d) = uq + d(1 - q)$$

que é a média ponderada de u e d ; a relação de igualdade acima é satisfeita se e somente se $r \in [d, u]$. Como $\mathbb{Q}$ é equivalente a $\mathbb{P}$ (medida frequencial do processo) e $\mathbb{P}$ é estritamente positiva, $r = d, u$ são descartados. Para provar a unicidade e encontrar o valor de q basta observarmos que sobre (4.2)

$$uq + d(1 - q) = r$$

tem solução única, o que conclui a demonstração. $\square$

Corolário 4.2.1. O modelo Cox-Ross-Rubinstein é completo e livre de arbitragem.

Demonstração. Por (5.2.1) existe uma medida martingale equivalente. Agora, do Teorema 4.2.1 segue que o modelo é livre de arbitragem.

Pelo Teorema 4.2.3 e da unicidade da Fórmula de Precificação Neutra ao Risco (4.1) sobre (4.2), obtemos que o modelo CRR é completo. $\square$

Proposição 4.2.2. *O processo de precificação neutro ao risco de um derivativo X em um modelo CRR é dado por*

$$\pi_X(t) = B(t) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\left(\frac{X}{B(T)} \right) | \mathcal{F}_t \right) \quad \forall t = 0, 1, \dots, T,$$

onde $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ é o operador esperança com relação a medida martingale equivalente única $\mathbb{Q}$ caracterizada por $q = \frac{(r-d)}{(u-d)}$.

Demonstração. Segue diretamente da Fórmula de Precificação Neutra ao Risco (4.1), pois o modelo CRR é completo e livre de arbitragem. $\square$

Para simplificar nossas operações apresentamos um formato compactado para precificação de uma opção do tipo européia $X = f(S_T)$ para todas as funções limitadas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F_\tau(x, p) := \sum_{j=0}^{\tau} \binom{\tau}{j} p^j (1-p)^{\tau-j} f(x(1+u)^j (1+d)^{\tau-j})$$

Podemos observar que $j, \tau - j$ é o número de vezes que $Z(i)$ toma os dois possíveis valores d, u , e é válido notarmos que $F_\tau(x, p)$ é uma estimativa adequada ao processo de precificação binomial. Veja mais detalhes do desenvolvimento binomial em [17].

Corolário 4.2.2. *Considere uma opção do tipo européia com data de expiração T dado por $X = f(S_T)$. O processo de precificação livre de arbitragem $\pi_X(t), t = 0, 1, \dots, T$ da opção é dada por (assuma $\tau = T - t$, também conhecido como tempo ao vencimento)*

$$\pi_X(t) = (1+r)^{-\tau} F_\tau(S_t, q). \quad (4.4)$$

Demonstração. Lembre que

$$S(t) = S(0) \prod_{\tau=1}^t (1 + Z(\tau)), \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

e pela Proposição (5.2.2) o preço $\pi_X(t)$ da opção $X = f(S_T)$ no tempo t é

$$\begin{aligned} \pi_X(t) &= (1+r)^{-(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [f(S(T)) | \mathcal{F}_t] \\ &= (1+r)^{-(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[f \left(S(t) \prod_{i=t+1}^T (1 + Z(i)) \right) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= (1+r)^{-(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[f \left(S(t) \prod_{i=t+1}^T (1 + Z(i)) \right) \right] \\ &= (1+r)^{-\tau} F_\tau(S(t), q). \end{aligned}$$

□

Nós usamos a regra da propriedade de independência de esperanças condicionais na penúltima igualdade acima. Ela é aplicável pois $S(t)$ é $(\mathcal{F}_t)$ -mensurável e $Z(t+1), \dots, Z(T)$ são independentes de $\mathcal{F}_t$. Uma consequência imediata é o processo de precificação para opção de compra do tipo européia, isto é, $X = f(S_T)$ com $f(x) = (x - K)^+$.

Corolário 4.2.3. *Considere uma opção de compra do tipo européia com data de expiração T e com preço de exercício K sobre uma ação S . O processo de precificação livre de arbitragem $\pi_C(t), t = 0, 1, \dots, T$ da opção é dada por (novamente assuma $\tau = T - t$, o tempo ao vencimento)*

$$\pi_C(t) = (1+r)^{-\tau} \sum_{j=0}^{\tau} \binom{\tau}{j} q^j (1-q)^{\tau-j} \left(S(t) (1+u)^j (1+d)^{\tau-j} - K \right)^+.$$

Para obtermos a opção de venda do tipo européia, usamos o mesmo argumento ou a relação de Paridade Call-Put (1.4).

5 A fórmula de Black-Scholes como aproximação do modelo binomial

O grande destaque deste capítulo está na convergência em distribuições de probabilidade. Para isso vamos adaptar um modelo de precificação em tempo-contínuo para o nosso modelo CRR em tempo-discreto, e em seguida verificar o resultado assintótico dos parâmetros adotados.

5.1 A extensão do modelo CRR para múltiplos períodos de negociação

Já sabemos as características probabilísticas de um processo binomial de um modelo de precificação de derivativos em tempo-discreto. Agora vamos analisar novamente um ativo de baixo risco, um título de renda fixa B e um ativo de alto risco, uma ação S porém observando-os em um intervalo contínuo de tempo $[0, T]$. Para transferirmos uma estrutura de tempo-contínuo para dentro de uma estrutura binomial faremos os seguintes ajustes:

Primeiro, para cada termo n -ésimo de uma sequência de modelos CRR observamos que há um número predeterminado k_n de datas de negociação. Vamos definir $\Delta_n := \frac{T}{k_n}$ e dividir $[0, T]$ em k_n subintervalos de comprimento Δ_n , $I_j = [j\Delta_n, (j+1)\Delta_n]$, $j = 0, \dots, k_n - 1$. Fixaremos r_n como as taxas de juros de baixo risco sobre cada intervalo I_j , e por isso a contribuição do título de renda fixa para o processo de precificação é dado por

$$B(t_n, j) = (1 + r_n)^j, \quad j = 0, \dots, k_n.$$

Em tempo-contínuo a contribuição do título de renda fixa para o processo de precificação dado uma taxa a vista $r \geq 0$ é $B(t) = e^{rt}$. Afim de fazermos uma aproximação em tempo-discreto, vamos escolher r_n tal que

$$1 + r_n = e^{r\Delta_n}. \quad (5.1)$$

Em seguida modelamos os retornos $S(t_{n,j+1})/S(t_{n,j})$ da ação por uma família de variáveis aleatórias $Z_{n,i}$; $i = 1, \dots, k_n$; $n = 1, 2, \dots$ tomando os valores $\{d_n, u_n\}$ com

$$\mathbb{P}(Z_{n,i} = u_n) = p_n = 1 - \mathbb{P}(Z_{n,i} = d_n)$$

para algum $p_n \in (0, 1)$, que relaciona a tendência μ (*drift*) e a volatilidade $\sigma > 0$ da ação. Desta forma a contribuição da ação para o processo de precificação é

$$S_n(t_n, j) = S_n(0) \prod_{i=1}^j (1 + Z_{n,i}), \quad j = 0, 1, \dots, k_n.$$

Chamamos uma sequência finita $Z_n = (Z_{n,i})_{i=1}^{k_n}$ de árvore ou malha. É importante destacarmos que para cada n nós conseguimos diferentes contribuições da ação para os processos de precificação discreto $S_n(t)$ e que em geral estes processos não coincidem em uma unidade de tempo comum. Por fim, como é do nosso interesse modelos do mercado financeiro livres de arbitragem e que possuam probabilidades neutras ao risco, pela Proposição (5.2.1) são satisfeitas as relações abaixo

- $d_n < r_n < u_n$
- $p_n^* = (r_n - d_n) / (u_n - d_n)$.

Portanto os únicos parâmetros que podem ser escolhidos livremente no modelo são os fatores u_n e d_n .

5.2 Parâmetros de modelos binomiais e suas propriedades assintóticas

Assumindo a taxa de juros livre de risco r dada, por (6.1), os graus de liberdade restantes são obtidos a partir das escolhas de u_n e d_n . Usaremos as seguintes escolhas:

$$1 + u_n = e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}}, \quad 1 + d_n = (1 + u_n)^{-1} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}.$$

Logo as probabilidades neutras ao risco são dadas por

$$p_n^* = \frac{r_n - d_n}{u_n - d_n} = \frac{e^{r\Delta_n} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}}. \quad (5.2)$$

Agora podemos precificar as opções em cada modelo CRR usando o operador esperança com relação a medida martingale equivalente caracterizada pelas probabilidades

p_n^* . Em particular vamos calcular o preço $\pi_C(t)$ no tempo t de uma opção de compra do tipo européia sobre uma ação S com preço de strike K e data de expiração T pela fórmula do Corolário (5.2.3). Definindo

$$a_n = \min\{j \in \mathbb{N}_0 | S(0) (1 + u_n)^j (1 + d_n)^{k_n - j} > K\}, \quad (5.3)$$

podemos reescrever a fórmula do Corolário (5.2.3) para $t = 0$ no n -ésimo modelo CRR como

$$\begin{aligned} \pi_C(0) &= (1 + r_n)^{-k_n} \sum_{j=a_n}^{k_n} \binom{k_n}{j} p_n^{*j} (1 - p_n^*)^{k_n - j} \left(S(0) (1 + u_n)^j (1 + d_n)^{k_n - j} - K \right) \\ &= S(0) \left[\sum_{j=a_n}^{k_n} \binom{k_n}{j} \left(\frac{p_n^* (1 + u_n)}{1 + r_n} \right)^j \left(\frac{(1 - p_n^*) (1 + d_n)}{1 + r_n} \right)^{k_n - j} \right] \\ &\quad - (1 + r_n)^{-k_n} K \left[\sum_{j=a_n}^{k_n} \binom{k_n}{j} p_n^{*j} (1 - p_n^*)^{k_n - j} \right]. \end{aligned}$$

Denotando a função de distribuição cumulativa binomial com parâmetros (n, p) por $B^{n,p}(\cdot)$, vemos que a expressão do segundo parênteses é

$$\tilde{B}^{k_n, p_n^*}(a_n) = 1 - B^{k_n, p_n^*}(a_n).$$

Lema 5.2.1. *Sejam p_n^* medidas de probabilidade. Se o fator $u_n = e^{\sigma\sqrt{\Delta n}} - 1$ e $r_n = e^{r\Delta n} - 1$, $n = 1, 2, \dots$, então*

$$\hat{p}_n = \frac{p_n^* (1 + u_n)}{1 + r_n}$$

também são medidas de probabilidade.

Demonstração. Vamos explorar as propriedades de $\hat{p}_n$ e verificar que de fato tratam-se de medidas de probabilidade. Primeiro note que pela definição $\Delta n = \frac{T}{k_n}$, no limite $n \rightarrow \infty$ os comprimentos Δn tendem a zero.

$$\begin{aligned} \hat{p}_n &= \frac{p_n^* (1 + u_n)}{1 + r_n} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta n}} (e^{r\Delta n} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta n}})}{e^{\sigma\Delta n} (e^{\sigma\sqrt{\Delta n}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta n}})} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta n} + r\Delta n} - 1}{e^{\sigma\sqrt{\Delta n} + r\Delta n} - e^{r\Delta n - \sigma\sqrt{\Delta n}}} = \\ &= \frac{e^{-\sigma\sqrt{\Delta n}} (e^{\sigma\sqrt{\Delta n}} (-1 + e^{\sigma\sqrt{\Delta n} + r\Delta n}))}{e^{-\sigma\sqrt{\Delta n}} (e^{r\Delta n} (-1 + e^{2\sigma\sqrt{\Delta n}}))} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta n} - r\Delta n} (-1 + e^{\sigma\sqrt{\Delta n} + r\Delta n})}{-1 + e^{2\sigma\sqrt{\Delta n}}} = \end{aligned}$$

(tomando o limite $n \rightarrow \infty$, conseqüentemente $\Delta n \rightarrow 0$, temos uma indeterminação do

tipo $\frac{0}{0}$, então aplicamos a regra de L'Hospital)

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \hat{p}_n &= \frac{1}{2} \left(\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{2\sigma e^{2\sigma\sqrt{\Delta n}} - \sigma e^{\sigma\sqrt{\Delta n} - r\Delta n} + 2e^{2\sigma\sqrt{\Delta n}} r\sqrt{\Delta n}}{\sigma e^{2\sigma\sqrt{\Delta n}} - r\sqrt{\Delta n} + r\sqrt{\Delta n} e^{2\sigma\sqrt{\Delta n}}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\not{\sigma}}{\not{\sigma}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

Usando a notação que nós temos do n -ésimo modelo CRR para precificação de uma opção de compra do tipo europeu no tempo $t = 0$:

$$\pi_C^{(n)}(0) = S_n(0) \tilde{B}^{k_n, \hat{p}_n}(a_n) - K(1 + r_n)^{-k_n} \tilde{B}^{k_n, p_n^*}(a_n). \quad (5.4)$$

É bom ressaltarmos que os subjacentes $S_n(t)$ são dependentes de n , mas $S_n(0) = S(0)$ para todo n .

Proposição 5.2.1. *A relação limite abaixo é satisfeita:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_C^{(n)}(0) = \pi_C^{BS}(0)$$

com $\pi_C^{BS}(0)$ dado pela fórmula de Black-Scholes (onde $S = S(0)$)

$$\pi_C^{BS}(0) = SN(d_1(S, T)) - Ke^{-rT}N(d_2(S, T)). \quad (5.5)$$

As funções $d_1(s, t)$ e $d_2(s, t)$ são,

$$\begin{aligned} d_1(s, t) &= \frac{\log(s/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}, \\ d_2(s, t) &= d_1(s, t) - \sigma\sqrt{t} = \frac{\log(s/K) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \end{aligned}$$

e $N(\cdot)$ é a função de distribuição cumulativa normal padrão.

Demonstração. Desde que $S_n(0) = S$, basta mostrarmos que

- i $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{B}^{k_n, \hat{p}_n}(a_n) = N(d_1(S, T)),$
- ii $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{B}^{k_n, p_n^*}(a_n) = N(d_2(S, T)).$

Para mostrar (i) podemos interpretar

$$\tilde{B}^{k_n, \hat{p}_n}(a_n) = \mathbb{P}(a_n \leq Y_n \leq k_n)$$

com (Y_n) uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição binomial com parâmetros $(k_n, \hat{p}_n)$. A ideia agora é normalizarmos Y_n ,

$$\tilde{Y}_n = \frac{Y_n - \mathbb{E}(Y_n)}{\sqrt{\text{Var}(Y_n)}} = \frac{Y_n - k_n \hat{p}_n}{\sqrt{k_n \hat{p}_n (1 - \hat{p}_n)}} = \frac{\sum_{j=1}^{k_n} (B_{j,n} - \hat{p}_n)}{\sqrt{k_n \hat{p}_n (1 - \hat{p}_n)}},$$

onde $B_{j,n}, j = 1, \dots, k_n; n = 1, 2, \dots$ são variáveis aleatórias independentes de Bernoulli com parâmetro $\hat{p}_n$. Agora usando o teorema central do limite (Corolário A.0.1 do Apêndice A - Teorema Central do Limite) nós sabemos que para $\alpha_n \rightarrow \alpha$ e $\beta_n \rightarrow \beta$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\alpha_n \leq \tilde{Y}_n \leq \beta_n) = N(\beta) - N(\alpha).$$

Por definição

$$\mathbb{P}(a_n \leq Y_n \leq k_n) = \mathbb{P}(\alpha_n \leq \tilde{Y}_n \leq \beta_n)$$

com

$$\alpha_n = \frac{a_n - k_n \hat{p}_n}{\sqrt{k_n \hat{p}_n (1 - \hat{p}_n)}} \text{ e } \beta_n = \frac{k_n (1 - \hat{p}_n)}{\sqrt{k_n \hat{p}_n (1 - \hat{p}_n)}}.$$

Pelo o que vimos no Lema 6.2.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{p}_n = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n (1 - 2\hat{p}_n) \sqrt{\Delta_n} = -T \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right)$$

Definindo a_n , dado (5.3), como

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\log(K/S) + k_n \sigma \sqrt{\Delta_n}}{2\sigma \sqrt{\Delta_n}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\log(K/S) + k_n \sigma \sqrt{\Delta_n}}{2\sigma \sqrt{\Delta_n}} - k_n \hat{p}_n}{\sqrt{k_n \hat{p}_n (1 - \hat{p}_n)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(K/S) + \sigma k_n \sqrt{\Delta_n} (1 - 2\hat{p}_n)}{2\sigma \sqrt{k_n \Delta_n \hat{p}_n (1 - \hat{p}_n)}} \\ &= \frac{\log(K/S) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma \sqrt{T}} = -d_1(S, T). \end{aligned}$$

Podemos ainda ver que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k_n \hat{p}_n^{-1} (1 - \hat{p}_n)} = +\infty.$$

Então $N(\beta_n) \rightarrow 1, N(\alpha_n) \rightarrow N(-d_1) = 1 - N(d_1)$, o que completa a prova de (i).

Para provar (ii) podemos fazer uma argumentação análoga e chegarmos a

parâmetros α_n^* e β_n^* com $\hat{p}_n$ substituído por p_n^* . Usando as relações de limite de maneira análoga a anterior,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n^* = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k_n (1 - 2p_n^*) \sqrt{\Delta_n} = T \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma} \right).$$

Daí é fácil ver que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^* &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(K/S) + \sigma k_n \sqrt{\Delta_n} (1 - 2p_n^*)}{2\sigma \sqrt{k_n \Delta_n p_n^* (1 - p_n^*)}} \\ &= \frac{\log(K/S) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma \sqrt{T}} = -d_2(S, T), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^* &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k_n (p_n^*)^{-1} (1 - p_n^*)} = +\infty. \end{aligned}$$

Desta forma concluímos a prova de (ii). $\square$

Podemos dizer informalmente que a adaptação do modelo CRR para uma estrutura em tempo-contínuo nada mais é que um modelo de Black-Scholes discreto. Fazendo uma breve menção ao modelo de Black-Scholes contínuo, a contribuição do processo de precificação da ação $S(t)$ nesse caso tem caráter estocástico e é modelado por um movimento browniano geométrico [12]. Os caminhos amostrais deste processo estocástico são quase todos contínuos e a lei de probabilidade de $S(t)$ em qualquer tempo t é lognormal. Em particular, no tempo T a distribuição de $\log\{S(T)/S(0)\}$ é $N(T\mu, T\sigma^2)$, onde μ é a tendência (drift) e σ é a volatilidade da ação. Pela forma que construímos nossa sequência de modelos CRR,

$$\log \frac{S_n(T)}{S(0)} = \sum_{i=1}^{k_n} \log(1 + Z_{n,i}),$$

onde $\log(Z_{n,i})$ representa variáveis aleatórias de Bernoulli com

$$\mathbb{P} \left(\log(1 + Z_{n,i}) = \sigma \sqrt{\Delta_n} \right) = p_n = 1 - \mathbb{P} \left(\log(1 + Z_{n,i}) = -\sigma \sqrt{\Delta_n} \right)$$

Pelo teorema central do limite, $\log \frac{S_n(T)}{S(0)}$ devidamente normalizada converge em distribuição para variáveis aleatórias com distribuição normal padrão. Usando raciocínios similares podemos ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{S_n(T)}{S(0)} \approx N \left(T \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right), T\sigma^2 \right),$$

isto é, $\log \frac{S_n(T)}{S(0)}$ é no limite normalmente distribuída. Pela nomenclatura de convergência fraca de medidas, dizemos que as medidas de probabilidade $\mathbb{P}^n$ induzidas pelas distribuições de $\log S_n(T)/S(0)$ convergem para a medida de probabilidade $\mathbb{Q}$ induzida por $N \left(T \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right), T\sigma^2 \right)$.

Proposição 5.2.2. *Seja X um derivativo da forma $X = h(S(T))$ com h uma função real uniformemente contínua limitada. Denotando por π_X^n e π_X os preços de X no tempo $t = 0$ do n -ésimo modelo de Black-Scholes discreto e do modelo de Black-Scholes contínuo, respectivamente. Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_X^n = \pi_X.$$

Demonstração. Se reescrevermos a fórmula de precificação de derivativo de opções usando o operador esperança em relação a medidas de probabilidade neutras ao risco, temos

$$\begin{aligned} \pi_X^n &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^n} (h(S_n(T))) = \int h d\mathbb{P}^n, \text{ respectivamente} \\ \pi_X &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} (h(S(T))) = \int h d\mathbb{Q} \end{aligned}$$

(desde que a ζ -álgebra seja a trivial em $t = 0$, podemos usar a esperança ao invés da esperança condicional). O resultado agora se resume ao Teorema de Helly-Bray (Teorema 1.1.4) sobre as funções de distribuição correspondentes as medidas $\mathbb{P}^n$ e $\mathbb{Q}$. $\square$

6 Simulação computacional da aproximação binomial

Neste capítulo veremos a representação gráfica da convergência do modelo CRR desenvolvida no Capítulo 5. A seguir, considere como caso 1 a negociação de uma opção de compra do tipo europeia com preço de exercício igual a R\$30,00. Na figura 6.1, o preço corrente da ação no início do contrato é R\$25,00 (OTM¹) com volatilidade de 25%. Na figura 6.2, o preço corrente da ação no início do contrato é R\$30,00 (ATM²) com volatilidade de 25%.

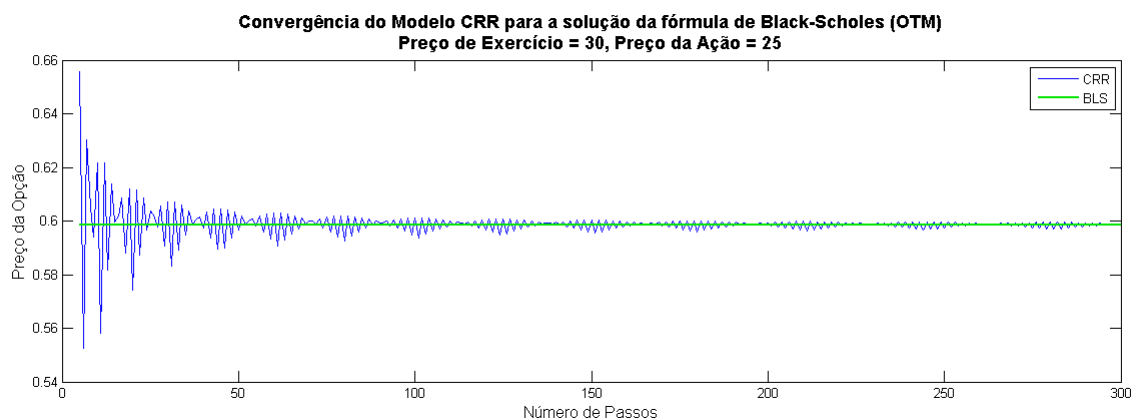


Figura 6.1: aproximação binomial para uma ação OTM

¹Uma opção *Out of The Money* pode ser uma opção de compra cujo preço de exercício (strike) encontra-se acima da cotação do ativo-objeto ou uma opção de venda cujo preço de exercício (strike) encontra-se abaixo do valor da cotação do ativo-objeto

²Uma opção (compra ou venda) é *At The Money* quando o preço de exercício (strike) encontra-se muito próximo do valor da cotação do ativo-objeto

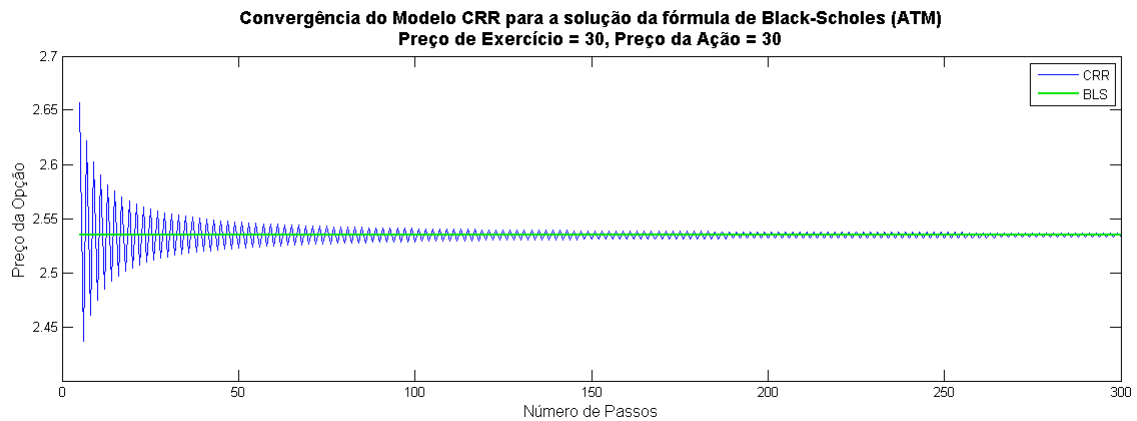


Figura 6.2: aproximação binomial para uma ação ATM

Como caso 2, considere a negociação de uma opção de compra do tipo européia com preço de exercício igual a R\$30,00. Na figura 6.3, o preço corrente da ação no início do contrato é R\$25,00 (OTM) com volatilidade de 75%. Na figura 6.4, o preço corrente da ação no início do contrato é R\$30,00 (ATM) com volatilidade de 75%.

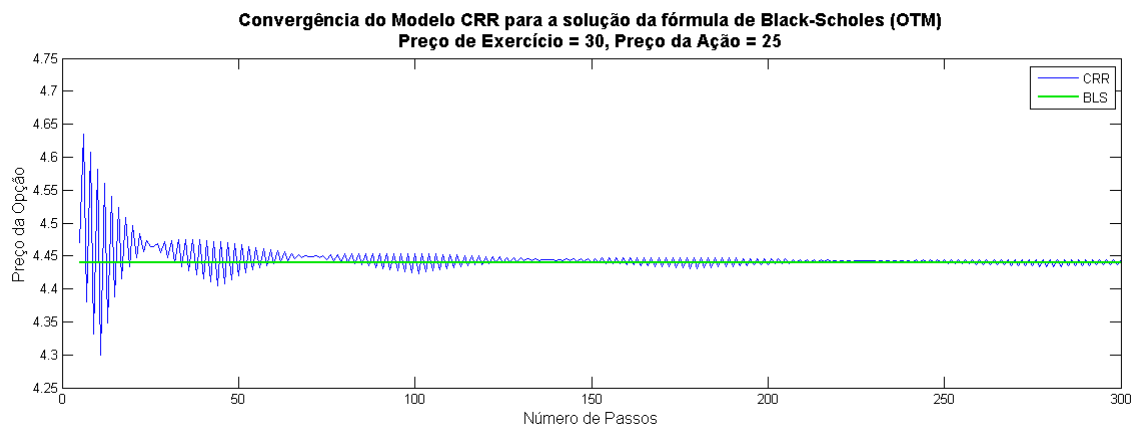


Figura 6.3: aproximação binomial para uma ação OTM

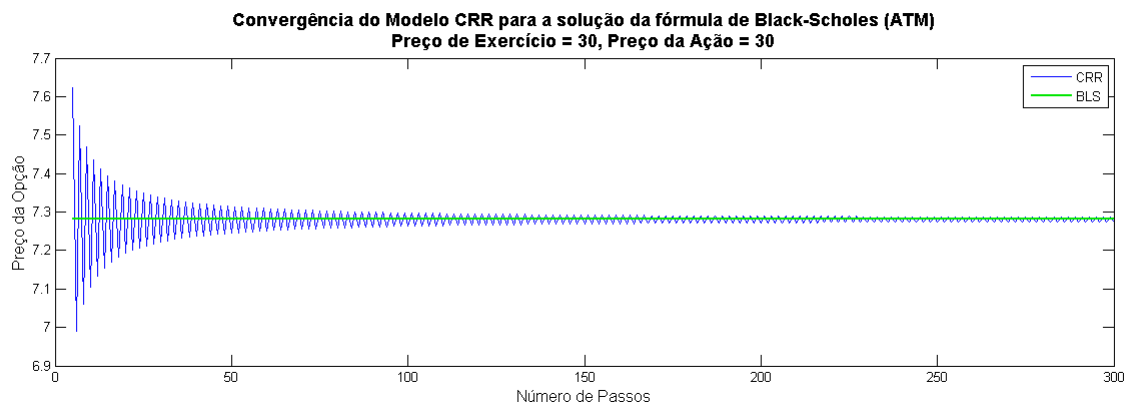


Figura 6.4: aproximação binomial para uma ação ATM

Na situação OTM é perceptível a diferença causada por mudanças bruscas do mercado, enquanto que a situação ATM parece ter boa absorção das variações de volatilidade. É válido notar também que a situação OTM tem como característica padrões periódicos, enquanto que a situação ATM parece ser reversível a média. Estes fatos despertam interesse do ponto de vista da análise numérica e áreas afins, o que motiva uma extensão futura para este trabalho.

7 Conclusões

Neste trabalho foi desenvolvido uma base teórica de probabilidade fortemente influenciada pelos fundamentos da teoria da medida, com a finalidade de assegurar a boa definição de uma estrutura probabilística dinâmica, processos estocásticos (ao menos no sentido discreto, assim como o seu respectivo espaço filtrado), e as relações entre medidas em um espaço mensurável de forma a evidenciar a diferença entre um modelo binomial genérico e o modelo CRR na precificação justa de derivativos. Por fim, embora implícito, foram apresentados casos particulares de convergência de medida (em especial a convergência de funções de distribuição de probabilidade).

A princípio foram exploradas as noções básicas sobre processos estocásticos, com um destaque aos martingales. Com a característica de não predictibilidade (as informações a priori “carregadas” pelas filtrações do processo estocástico não reduzem a incerteza sobre eventos futuros), os martingales fazem parte do elemento principal da precificação justa de derivativos, a aversão ao risco.

A existência e unicidade de medidas martingales equivalentes nem sempre podem ser verificadas, pois há certas limitações no uso da hipótese do mercado ser completo (de fato, em mercados regidos por modelos de tempo-contínuo não é possível replicar todo o conjunto de derivativos).

O modelo de precificação almejado pela proposta do trabalho, modelo CRR, segue diretamente dos resultados anteriores aplicados a uma estrutura probabilística formada por um ativo de alto risco (ação) e um de baixo risco (título de renda fixa). Ainda, a condição do modelo CRR nos ensina como fazer a equivalência de medidas.

A aproximação binomial para a fórmula de Black-Scholes tem várias interpretações interessantes. A fórmula de Black-Scholes em sua demonstração original foi obtida através da solução de uma equação diferencial parcial (meio determinístico) e nós vimos que é possível chegar na mesma fórmula através de um modelo probabilístico (meio não-determinístico), unindo duas das principais características da matemática. Outro ponto importante é que temos nessa situação uma aplicação real do teorema central do limite com a convergência fraca da distribuição binomial para a distribuição normal.

7.1 Considerações finais

No decorrer deste trabalho vimos a importância entre uma medida martingale e uma medida frequencial na precificação de opções por condições de equivalência. As propriedades dos martingales representam um processo justo de precificação binomial em um modelo CRR. Transformadas martingales nós dizem como passar do caso discreto para o caso contínuo no cálculo estocástico.

Finalmente, nós podemos observar que, dado a hipótese do mercado ser completo (todo derivativo pode ser replicado por um portfólio), diferentes escolhas dos fatores de subida e descida do mercado conduzem a novas convergências (no sentido fraco) em distribuição. Por isso é razoável dizer que outras formas de precificação de opções podem ser encontradas, por exemplo, *Processos de Precificação de Opções com Saltos* [13] (distribuição de Poisson).

7.2 Trabalhos futuros

Devido as propriedades computacionais dos modelos em tempo-discreto de precificação de opções, muitas pesquisas relativas a análise numérica estão presentes nos mais diversos segmentos financeiros do mercado de capitais. Isso nos motiva a darmos continuidade a este trabalho da seguinte forma:

- Estudo aprofundado em métodos computacionais como *Simulação de Monte Carlo* e *Métodos das Diferenças Finitas* direcionados a finanças quantitativas, implementação computacional de modelos binomiais (assim como as suas variações em modelos em tempo-discreto) e análise dos resultados obtidos sobre dados reais do mercados financeiro.
- Compreensão da estrutura de mercados incompletos e aplicações a cenários complexos de precificação de opções.
- Pesquisa direcionada a modelos de precificação de opções com volatilidade dinâmica.

A Teorema Central do Limite

No Capítulo 2 enunciamos importantes resultados da teoria de probabilidade deixando em aberto um importante resultado da matemática não-determinística. Neste apêndice apresentaremos uma demonstração do teorema central do limite proposto por Jarl Waldemar Lindeberg, que generaliza a validade da convergência normal.

Outras demonstrações do teorema central do limite, assim como a sua extensão para o caso multivariado (vetores aleatórios) podem ser encontradas em [11].

Teorema A.0.1 (Teorema Central do Limite de Lindeberg). *Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias independentes tais que $\mathbb{E}(X_n) = \mu_n$ e $\text{Var}(X_n) = \sigma_n^2$, onde $\sigma_n^2 < \infty$ e pelo menos um $\sigma_n^2 > 0$. Sejam $F_n = F_{X_n}$,*

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

e

$$s_n = \sqrt{\text{Var}(S_n)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}.$$

Então para que

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{s_n} \xrightarrow{D} N(0, 1) \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

é suficiente que a seguinte condição, chamada condição de Lindeberg, seja satisfeita:

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x - \mu_k| > \epsilon s_n} (x - \mu_k)^2 dF_k(x) = 0.$$

Em outras palavras, se a condição de Lindeberg é satisfeita, vale a convergência normal.

Observação A.0.1. A notação $\int_{|x - \mu_k| > \epsilon s_n}$ significa que a integração é feita em $\{x : |x - \mu_k| > \epsilon s_n\} = (-\infty, \mu_k - \epsilon s_n) \cup (\mu_k + \epsilon s_n, +\infty)$. Se X_k for discreta, com função de probabilidade $p_k(x_i)$, então

$$\int_{|x - \mu_k| > \epsilon s_n} (x - \mu_k)^2 dF_k(x) = \sum_{i: |x_i - \mu_k| > \epsilon s_n} (x_i - \mu_k)^2 p_k(x_i).$$

Se X_k tiver densidade $f_k(x)$, então

$$\int_{|x - \mu_k| > \epsilon s_n} (x - \mu_k)^2 dF_k(x) = \int_{-\infty}^{\mu_k - \epsilon s_n} (x - \mu_k)^2 f_k(x) dx + \int_{\mu_k + \epsilon s_n}^{+\infty} (x - \mu_k)^2 f_k(x) dx.$$

Notemos também que

$$\sigma_k^2 = \int (x - \mu_k)^2 dF_k(x) = \int_{|x - \mu_k| > \epsilon s_n} (x - \mu_k)^2 dF_k(x) + \int_{|x - \mu_k| \leq \epsilon s_n} (x - \mu_k)^2 dF_k(x),$$

com isso a condição de Lindeberg pode ser reformulada, usando o fato de que $s_n^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$ e tomando o limite em ambos os lados da igualdade acima:

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x - \mu_k| \leq \epsilon s_n} (x - \mu_k)^2 dF_k(x) \rightarrow 1 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Um fato decorrente da condição de Lindeberg é que as parcelas $\frac{X_k - \mu_k}{s_n}$ da soma $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{s_n}$ são uniformemente pequenas para n grande. Daí a condição de Lindeberg implica,

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Observe que para todo k ,

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} &= \frac{1}{s_n^2} \int_{|x - \mu_k| \leq \epsilon s_n} (x - \mu_k)^2 dF_k(x) + \frac{1}{s_n^2} \int_{|x - \mu_k| > \epsilon s_n} (x - \mu_k)^2 dF_k(x) \\ &\leq \frac{1}{s_n^2} \int_{|x - \mu_k| \leq \epsilon s_n} \epsilon^2 s_n^2 dF_k(x) + \frac{1}{s_n^2} \sum_{j=1}^n \int_{|x - \mu_k| > \epsilon s_n} (x - \mu_j)^2 dF_j(x) \\ &\leq \frac{1}{s_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon^2 s_n^2 dF_k(x) + \frac{1}{s_n^2} \sum_{j=1}^n \int_{|x - \mu_k| > \epsilon s_n} (x - \mu_j)^2 dF_j(x). \end{aligned}$$

Integrando a primeira a direita da desigualdade temos

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} \leq \epsilon^2 + \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x - \mu_k| > \epsilon s_n} (x - \mu_k)^2 dF_k(x),$$

que converge para ϵ^2 , pela condição de Lindeberg. Como vale para todo $\epsilon > 0$, $\max(\sigma_k^2/s_n^2) \rightarrow 0$. Intuitivamente, a situação que estamos lidando pode ser expressa como: a soma de um grande número de pequenas quantidades independentes e de média zero tem aproximadamente a distribuição normal.

Demonstração. Pelo Corolário 1.1.1, basta mostrarmos que as funções características das somas parciais padronizadas convergem para a função característica de $N(0, 1)$. Portanto, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{(S_n - \mathbb{E}(S_n))/s_n}(t) =$$

(por independência)

$$= \prod_{k=1}^n \mathbb{E} \left(e^{it(X_k - \mu_k)/s_n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-t^2/2}. \quad (\text{A.1})$$

Agora, vamos fixar $t \in \mathbb{R}$. Expandindo duas versões fórmula de Taylor (uma com a ordem do erro mais elevada) aplicada a função $g(e^{itx})$:

$$e^{itx} = 1 + itx + \theta_1(x) \frac{t^2 x^2}{2}, \text{ onde } |\theta_1(x)| \leq 1,$$

$$e^{itx} = 1 + itx - \frac{t^2 x^2}{2} + \theta_2(x) \frac{t^3 x^3}{6}, \text{ onde } |\theta_2(x)| \leq 1.$$

Seja $\epsilon > 0$. Usando a primeira fórmula para $|x| > \epsilon$ e a segunda para $|x| \leq \epsilon$, podemos escrever e^{itx} da seguinte forma geral:

$$e^{itx} = 1 + itx - \frac{t^2 x^2}{2} + r_\epsilon(x),$$

onde $r_\epsilon(x) = \begin{cases} \{1 + \theta_1\} \frac{t^2 x^2}{2}, & \text{se } |x| > \epsilon \\ \theta_2(x) \frac{t^3 x^3}{6}, & \text{se } |x| \leq \epsilon. \end{cases}$ Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left\{ it \left(\frac{X_k - \mu_k}{s_n} \right) \right\} &= \int \exp \left\{ it \left(\frac{x - \mu_k}{s_n} \right) \right\} dF_k(x) = \\ &= \int \left\{ 1 + it \left(\frac{x - \mu_k}{s_n} \right) - \frac{t^2}{2} \left(\frac{x - \mu_k}{s_n} \right)^2 + r_\epsilon \left(\frac{x - \mu_k}{s_n} \right) \right\} dF_k = \\ &= (\text{por linearidade}) = \\ &= 1 + it \mathbb{E} \left(\frac{X_k - \mu_k}{s_n} \right) - \frac{t^2}{2} \mathbb{E} \left(\frac{X_k - \mu_k}{s_n} \right)^2 + \\ &+ \frac{t^2}{2} \int_{|x - \mu_k| > \epsilon s_n} \left\{ 1 + \theta_1 \left(\frac{x - \mu_k}{s_n} \right) \right\} \left(\frac{x - \mu_k}{s_n} \right)^2 dF_k(x) + \\ &+ \frac{t^3}{6} \int_{|x - \mu_k| \leq \epsilon s_n} \theta_2 \left(\frac{x - \mu_k}{s_n} \right) \left(\frac{x - \mu_k}{s_n} \right)^3 dF_k(x). \end{aligned}$$

Como $\mathbb{E}(X_k) = \mu_k$ e $\text{Var}(X_k) = \sigma_k^2$, temos

$$\mathbb{E} \exp \left\{ it \left(\frac{x - \mu_k}{s_n} \right) \right\} = 1 - \frac{t^2 \sigma_k^2}{2 s_n^2} + e_{n,k},$$

onde o resto $e_{n,k}$ satisfaz (lembrando que $|\theta_1(x)| \leq 1$ e $|\theta_2(x)| \leq 1$)

$$\begin{aligned} |e_{n,k}| &\leq t^2 \int_{|x - \mu_k| > \epsilon s_n} \left(\frac{x - \mu_k}{s_n} \right)^2 dF_k(x) + \\ &+ \frac{|t|^3}{6} \int_{|x - \mu_k| \leq \epsilon s_n} \epsilon \left(\frac{x - \mu_k}{s_n} \right)^2 dF_k(x) \leq \\ &\leq \frac{t^2}{s_n^2} \int_{|x - \mu_k| > \epsilon s_n} (x - \mu_k)^2 dF_k(x) + \frac{\epsilon |t|^3}{6 s_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_k)^2 dF_k(x). \end{aligned}$$

Temos, então

$$\sum_{k=1}^n |e_{n,k}| \leq \frac{t^2}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x - \mu_k| > \epsilon s_n} (x - \mu_k)^2 dF_k(x) + \frac{\epsilon |t|^3}{6}.$$

Pela condição de Lindeberg, a primeira parcela do termo a direita tende a zero quando $n \rightarrow \infty$. Logo, para n suficientemente grande,

$$\sum_{k=1}^n |e_{n,k}| \leq \frac{\epsilon |t|^3}{3}.$$

Vamos, então, escolher uma sequência de ϵ 's que converge para zero. Para $\epsilon = \frac{1}{m}$, existe n_m tal que para $n \geq n_m$,

$$\sum_{k=1}^n |e_{n,k}| \leq \frac{\epsilon |t|^3}{3m},$$

onde os restos $e_{n,k}$ são os determinados pela fórmula baseada em $\epsilon = \frac{1}{m}$. Portanto, existe uma sequência $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ de inteiros positivos tal que

$$\sum_{k=1}^n |e_{n,k}| \leq \frac{\epsilon |t|^3}{3m},$$

para $n_m \leq n < n_{m+1}$, onde para estes valores de n os restos $e_{n,k}$ são baseados em $\epsilon = \frac{1}{m}$ com uma dependência implícita do índice m . Temos, então,

$$\sum_{k=1}^n |e_{n,k}| \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (\text{A.2})$$

Substituindo em (A.1), vemos que

$$\varphi(S_n - \mathbb{E}(S_n)) / s_n(t) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{t^2 \sigma_k^2}{2s_n^2 + e_{n,k}} \right),$$

com os $e_{n,k}$ satisfazendo (A.2). Para provar que o termo a direita converge para $e^{-t^2/2}$, usaremos o seguinte lema sobre números complexos.

Lema A.0.1. *Sejam $c_{n,k}$ números complexos tais que $\sum_{k=1}^n c_{n,k} \rightarrow c$ quando $n \rightarrow \infty$. Se*

$$\max_{1 \leq k \leq n} |c_{n,k}| \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

e

$$\sum_{k=1}^n |c_{n,k}| \leq M < \infty,$$

onde M é uma constante que não depende de n , então

$$\prod_{k=1}^n (1 + c_{n,k}) \rightarrow e^c \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Por $\max_{1 \leq k \leq n} |c_{n,k}| \rightarrow 0$, existe um n_0 tal que se $n \geq n_0$, então $|c_{n,k}| \leq \frac{1}{2}$ para todo k , de modo que $1 + c_{n,k} \neq 0$. Nos consideraremos, a seguir, somente grandes

valores de n e denotaremos por $\log(1 + c_{n,k})$ a representação do logaritmo com um angulo entre $(-\pi, \pi]$. Assim

$$\log(1 + c_{n,k}) = c_{n,k} + \Lambda |c_{n,k}|^2,$$

onde Λ é um número complexo dependendo de várias viáveis mas limitada por um mesmo valor absoluto (constante) com nenhuma dependência. Daí segue que

$$\begin{aligned} |\log(1 + c_{n,k}) - c_{n,k}| &= \left| \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} c_{n,k}^m \right| \leq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|c_{n,k}|^m}{m} \\ &\leq \frac{|c_{n,k}|^2}{2} \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-2} = |c_{n,k}|^2 \leq 1, \end{aligned}$$

de modo que o valor absoluto mencionado anteriormente pode ser 1. Por isso

$$\sum_{k=1}^n \log(1 + c_{n,k}) = \sum_{k=1}^n c_{n,k} + \Lambda \sum_{k=1}^n |c_{n,k}|^2$$

(observe que Λ agora não é o mesmo de antes, mas ainda assim é limitado por 1). Segue das hipóteses que

$$\sum_{k=1}^n |c_{n,k}|^2 \leq \max_{1 \leq k \leq n} |c_{n,k}| \sum_{k=1}^n |c_{n,k}| \leq M \max_{1 \leq k \leq n} |c_{n,k}| \rightarrow 0;$$

e consequentemente,

$$\sum_{k=1}^n \log(1 + c_{n,k}) \rightarrow c,$$

que é o equivalente ao resultado

$$\prod_{k=1}^n (1 + c_{n,k}) \rightarrow e^c \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

□

Em particular, o nosso caso é visto como $c_{n,k} = -\{t^2 \sigma_k^2 / (2s_n^2)\} + e_{n,k}$ e $c = -t^2/2$. Por (A.2),

$$\sum_{k=1}^n |c_{n,k}| \leq \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} \right| + \sum_{k=1}^n |e_{n,k}| \leq \frac{t^2}{2} + \sum_{k=1}^n |e_{n,k}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{t^2}{2},$$

logo $\sum_{k=1}^n |c_{n,k}|$ é uniformemente limitado. Para aplicar o lema, resta verificarmos a condição sobre o máximo:

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq n} |c_{n,k}| &\leq \max_{1 \leq k \leq n} |e_{n,k}| + \max_{1 \leq k \leq n} \frac{t^2 \sigma_k^2}{2s_n^2} \leq \\ &\leq \frac{t^2}{2} \max_{1 \leq k \leq n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} + \sum_{k=1}^n |e_{n,k}|, \end{aligned}$$

com o segundo termo tendendo a zero por (A.2). Como já foi visto que a condição de Lindeberg implica que $\max_{1 \leq k \leq n} (\sigma_k^2 / s_n^2) \rightarrow 0$, concluímos a prova. □

Corolário A.0.1. *Sejam $Y_1, Y_2, \dots$ variáveis aleatórias independentes com distribuição binomial de parâmetros $(k_n, \hat{p}_n)$, tais que $\mathbb{E}(Y_n) = k_n \hat{p}_n$ e $\text{Var}(Y_n) = k_n \hat{p}_n (1 - \hat{p}_n) < \infty$, onde $k_i > 0$ para todo $i = 1, 2, \dots$ e existe pelo menos um $\hat{p}_i > 0$. Sejam $s_n^2 = \text{Var}(S_n) = [k_1 \hat{p}_1 (1 - \hat{p}_1)] + \dots + [k_n \hat{p}_n (1 - \hat{p}_n)]$. Então*

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|y - k_i \hat{p}_i| > \epsilon s_n} (y - k_i \hat{p}_i)^2 dF_i(y) = 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (\text{A.3})$$

onde $F_i(y)$ são as respectivas distribuições binomiais de parâmetros $(k_i, \hat{p}_i)$ para todo $i = 1, 2, \dots$

Demonstração. Desde que $\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n) \not\rightarrow 0$; dado $Y_n = k_n \hat{p}_n + \sum_{i=1}^n X_{n,i}$ onde $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ são variáveis aleatórias identicamente distribuídas com

$$\mathbb{P}(X_{n,i} = 1 - \hat{p}_n) = 1 - \mathbb{P}(X_{n,i} = -\hat{p}_n) = \hat{p}_n.$$

Daí temos que Y_n binomial com parâmetros $(k_n, \hat{p}_n)$, $\mathbb{E}(X_{n,i}) = 0$ e $\text{Var}(X_{n,i}) = \hat{p}_n(1 - \hat{p}_n)$.

Defina

$$I = \begin{cases} 1, & \text{se } |X_{n,i}| \geq \epsilon \sqrt{k_n \hat{p}_n (1 - \hat{p}_n)} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$\forall \epsilon > 0$. Então podemos redefinir a Condição A.3 a partir da região de integração I (tal que 1 indica que é integrável na região e 0 indica que é nulo fora dela) da seguinte forma:

$$\frac{1}{k_n \hat{p}_n (1 - \hat{p}_n)} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left(X_{n,i}^2 I_{\{|X_{n,i}| \geq \epsilon \sqrt{k_n \hat{p}_n (1 - \hat{p}_n)}\}} \right) \rightarrow 0. \quad (\text{A.4})$$

Observe que $|X_{n,i}| \leq 1$, e o lado esquerdo da expressão (A.4) será identicamente nulo quando $\epsilon \sqrt{k_n \hat{p}_n (1 - \hat{p}_n)} > 1$. Logo, basta atribuímos uma escolha apropriada para ϵ^1 na região complementar que teremos $k_n \hat{p}_n (1 - \hat{p}_n) \rightarrow \infty$ e consequentemente a relação (A.4) será satisfeita. Com isso esta demonstrado que uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição binomial satisfazem a condição de Lindeberg e por isso convergem normalmente □

¹Tome $k_n > \frac{1}{\epsilon^2(\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n))}$

B Implementação algorítmica da simulação computacional

Neste capítulo veremos a representação algorítmica da expressão gráfica desenvolvida no Capítulo 6.

O exemplo a seguir é uma variação da ilustração da *Financial Instruments ToolboxTM* do software *MATLAB R2009a* [23].

Começamos definindo o nosso instrumento financeiro para o caso 1: uma opção de compra do tipo europeia com o preço de exercício é R\$30,00 no dia primeiro de Janeiro de 2010. O contrato de opção expira no dia primeiro de Setembro de 2010. Vamos assumir que não pagamento de dividendos nesse período. A ação é negociada por R\$25,00 (OTM) e por R\$30,00 (ATM) com uma volatilidade de 25% anual. A taxa de juros livre de risco é cotada em 1,11% anual. A implementação desses dados pelas funções residentes do MATLAB segue:

```
% Opção
Settle = 'Jan-01-2010';
Maturity = 'Sep-01-2010';
Strike = 30;
OptSpec = 'call';
```

```
% Ação
AssetPrice = 25;
Sigma = .25;
```

```
Estrutura do termo da taxa de juros:
StartDates = '01 Jan 2010';
EndDates = '01 Jan 2013';
Rates = 0.0111;
```

```
ValuationDate = '01 Jan 2010';  
Compounding = -1;  
RateSpec = intenvset('Compounding', Compounding, 'StartDates', StartDates,...  
'EndDates', EndDates, 'Rates', Rates, 'ValuationDate', ValuationDate);
```

```
AssetPriceATM = 30;  
StockSpec = stockspec(Sigma, AssetPrice);  
StockSpecATM = stockspec(Sigma, AssetPriceATM);
```

Preço de opções usando a fórmula fechada de Black-Scholes (cálculo para opções de compra do tipo européia):

```
% Preço da opção com a ação cotada em R$25,00  
PriceBLS = optstockbybls(RateSpec, StockSpec, Settle, Maturity, OptSpec, Strike);
```

```
% Preço da opção com a ação cotada em R$30,00  
PriceBLSATM = optstockbybls(RateSpec, StockSpecATM, Settle, Maturity, OptSpec,  
Strike);
```

A construção da árvore do modelo CRR:

```
% Cria a especificação temporal da árvore  
NumPeriods = 15;  
CRRTimeSpec = crrtimespec(ValuationDate, Maturity, NumPeriods);
```

```
% Construção da árvore  
CRRTree = crrtree(StockSpec, RateSpec, CRRTimeSpec);  
CRRTreeATM = crrtree(StockSpecATM, RateSpec, CRRTimeSpec);
```

Preço de opções usando o modelo CRR:

```
PriceCRR = optstockbycrr(CRRTree, OptSpec, Strike, Settle, Maturity);
```

```
PriceCRRATM = optstockbycrr(CRRTreeATM, OptSpec, Strike, Settle, Maturity);
```

Comparação do resultado da fórmula de Black-Scholes com o modelo CRR sobre um período de negociação:

```
sprintf('PriceBLS: \t%f\nPriceCRR: \t%f\n', PriceBLS, PriceCRR)
```

```
sprintf('\t== ATM ==\nPriceBLS ATM: \t%f\nPriceCRR ATM:
```

```
\t%f\n', PriceBLSATM, PriceCRRATM)
```

```
% OTM
```

```
ans=
```

```
PriceBLS: 0.598557
```

```
PriceCRR: 0.599460
```

```
% ATM
```

```
ans=
```

```
PriceBLS ATM: 2.534698
```

```
PriceCRR ATM: 2.575029
```

Análise do efeito causado na precificação de opções com aumento do número de períodos de negociação:

```
NPoints = 300;
```

```
% Cox-Ross-Rubinstein
```

```
NumPeriodCRR = 5 : 1 : NPoints;
```

```
NbStepCRR = length(NumPeriodCRR);
```

```
PriceCRR = nan(NbStepCRR, 1);
```

```
PriceCRRATM = PriceCRR;
```

```
for i = 1 : NbStepCRR
```

```
CRRTTimeSpec = crrtimespec(ValuationDate, Maturity, NumPeriodCRR(i));
```

```
CRRT = crrtree(StockSpec, RateSpec, CRRTTimeSpec);
```

```
PriceCRR(i) = optstockbycrr(CRRT, OptSpec, Strike, ValuationDate, Maturity);
```

```

CRRTATM = crrtree(StockSpecATM, RateSpec, CRRTimeSpec);
PriceCRRATM(i) = optstockbycrr(CRRTATM, OptSpec, Strike, ValuationDate, Maturity);
end;

```

Para o caso da opção de compra cuja ação é OTM:

```

% Cox-Ross-Rubinstein
plot(NumPeriodCRR, PriceCRR);
hold on;
plot(NumPeriodCRR, PriceBLS*ones(NbStepCRR,1), 'Color', [0 0.9 0], 'linewidth', 1.5);

% Plot
titleString = sprintf('\nConvergência do Modelo CRR para a solução da fórmula de Black-Scholes (OTM)\nPreço de Exercício = %d, Preço da Ação = %d', Strike, AssetPrice);
title(titleString)
ylabel('Preço da Opção')
xlabel('Número de Passos')
legend('CRR', 'BLS', 'Location', 'NorthEast')

```

Para o caso da opção de compra cuja ação é ATM:

```

% Cox-Ross-Rubinstein
figure;
plot(NumPeriodCRR, PriceCRRATM);
hold on;
plot(NumPeriodCRR, PriceBLSATM*ones(NbStepCRR,1), 'Color', [0 0.9 0], 'linewidth', 1.5);

```

```

% Plot
titleString = sprintf('\nConvergência do Modelo CRR para a solução da fórmula de Black-Scholes (ATM)\nPreço de Exercício = %d, Preço da Ação = %d', Strike, AssetPrice-

```

```
ATM);  
title(titleString)  
ylabel('Preço da Opção')  
xlabel('Número de Passos')  
legend('CRR', 'BLS', 'Location', 'NorthEast')
```

Temos a mesma definição e características para o caso 2, porém a uma única diferença esta na volatilidade: uma opção de compra do tipo européia com o preço de exercício é R\$30,00 no dia primeiro de Janeiro de 2010. O contrato de opção expira no dia primeiro de Setembro de 2010. Vamos assumir que não pagamento de dividendos nesse período. A ação é negociada por R\$25,00 (ATM) e por R\$30,00 (OTM) com uma volatilidade de 75% anual. A taxa de juros livre de risco é cotada em 1,11% anual. A implementação desses dados pelas funções residentes do MATLAB apenas sofre uma alteração:

```
% Ação  
Sigma = .75;
```

Referências Bibliográficas

- [1] Lins, Alcides N., *funções de uma variável complexa*, Projeto Euclides - IMPA, Rio de Janeiro - RJ - Brasil, 2012.
- [2] Soumaré, I., *Stochastic Simulation and Applications in Finance with MATLAB Programs*, Wiley, New Delhi - in, 2008.
- [3] Shreve, Steven E., *Methods of Mathematical Finance*, New York - US, 1998.
- [4] Fouque, Pierre-J., *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge University Press, Cambridge - uk, 2000.
- [5] Seydel, Rüdiger U., *Tools for Computational Finance*, Springer, London - uk, 2012.
- [6] Hull, John C., *Options, Futures, and Other Derivatives - 8 ed.*, Pearson, London - uk, 2012.
- [7] Isnard, Carlos, *Introdução à medida e integração*, Projeto Euclides - IMPA, Rio de Janeiro - RJ - Brasil, 2013.
- [8] Marques, Mauro, *Teoria da medida*, Editora Unicamp, Campinas - SP - Brasil, 2009.
- [9] Dineen, S., *Probability Theory in Finance - A Mathematical Guide to the Black-Scholes Formula*, American Mathematical Society, Rhode Island - US, 2005.
- [10] Lima, Elon L., *Análise Real - Funções de Uma Variável*, Coleção Matemática Universitária - IMPA, Rio de Janeiro - RJ - Brasil, 2012.
- [11] James, Barry R., *Probabilidade: um curso em nível intermediário*, Projeto Euclides - IMPA, Rio de Janeiro - RJ - Brasil, 2011.
- [12] Carlos, Braumann A., *Introdução às equações diferenciais estocásticas e aplicações*, Sociedade Portuguesa de Estatística, Lisboa - pt, 2005.
- [13] Kiesel, R.; Bingham, N.H., *Risk-Neutral Valuation - Pricing and Hedging of Financial Derivatives*, Springer, London - uk, 2004.

- [14] Williams, M., *Fundamentals of the Options Market*, The McGraw-Hill Companies, Inc., New York - US, 2001.
- [15] Föllmer, Has; Schied, Alexander, *Stochastic Finance - An Introduction in Discrete Time*, Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, Berlin - de, 2002.
- [16] Viero, Matheus G., *Equação de Black-Scholes*, Monografia - Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande - RS - Brasil, 2013.
- [17] Cox, John C.; Ross, Stephen A.; and Rubinstein, M., *Option Pricing: A simplified approach*, Journal of Financial Economics - North-Holland Publishing Company, Berkeley - US, 1979.
- [18] Scholes, Myron; Black, Fischer, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Financial Economics - The University of Chicago Press, Chicago - US, 1973.
- [19] Merton, Robert C., *Theory of Rational Option Pricing*, Journal of Financial Economics - The RAND Corporation, Massachusetts - US, 1973.
- [20] Samuelson, Paul, *Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly*, Industrial Management Review - n.6, Massachusetts - US, 1965.
- [21] Bachelier, Louis, *Théorie de la spéculation*, Annales Scientifiques de L'É.N.S, Paris - fr, 1900.
- [22] Fouque, Jean Pierre, *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge University Press, Cambridge - uk, 2000.
- [23] The MathWorks, Inc.: documentation. Disponível em: <http://www.mathworks.com/help/fininst/examples/pricing-european-call-options-using-different-equity-models.html>. Acessado em: 21 de novembro de 2014.