

Luana Raquel Meinerz

Uma Visão Matemática da Estrutura do Algoritmo Simplex para Redes e a Dualidade

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Dezembro, 2014

Luana Raquel Meinerz

Uma Visão Matemática da Estrutura do Algoritmo Simplex para Redes e a Dualidade

Trabalho de conclusão de curso submetido por Luana Raquel Meinerz como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática Aplicada, pelo Curso de Graduação em Matemática Aplicada junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG
Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF
Curso de Matemática Aplicada

Orientador: Dra. Catia Maria dos Santos Machado

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Dezembro, 2014

Meinerz, L. R.

Uma Visão Matemática da Estrutura do Algoritmo Simplex para Redes e a Dualidade/ Luana Raquel Meinerz - 2014

Trabalho de conclusão de curso(Graduada em Matemática Aplicada- Bacharelado)-
Universidade Federal do Rio Grande, 2014.

Orientação: Dra. Catia Maria dos Santos Machado

Luana Raquel Meinerz

Uma Visão Matemática da Estrutura do Algoritmo Simplex para Redes e a Dualidade

Trabalho de conclusão de curso submetido por Luana Raquel Meinerz como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática Aplicada, pelo Curso de Graduação em Matemática Aplicada junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Aprovada em 19 de Dezembro de 2014

Dra. Catia Maria dos Santos Machado
(Dra. Catia Maria dos Santos Machado - FURG)

Dra. Celiane Costa Machado
(Celiane Costa Machado- FURG)

Dr. André Andrade Longaray
(André Andrade Longaray - FURG)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Dezembro, 2014

Aos meus pais que, com muito amor e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até aqui.

Agradecimentos

A Deus primeiramente por te me dado saúde e força para superar as dificuldades.

Aos meu pais Marlene e Euclides, meus irmãos Geovani e Milena, pelo amor, apoio e incentivo incondicional. Por estarem presentes em todos os momentos, entendendo as dificuldades.

A minha orientadora Catia M^a dos Santos Machado, pelo empenho dedicado à elaboração deste trabalho, pela amizade, pelo incentivo e carinho.

As amigos e colegas que fizeram parte da minha formação que vão continuar presentes em minha vida com certeza.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

Resumo

Nesse Trabalho de Conclusão de Curso desenvolvemos um estudo teórico sobre os fundamentos matemáticos do algoritmo simplex especializado na resolução dos modelos lineares de fluxo em redes. Mostramos, através da formulação matemática do modelo por meio da combinação linear, a importância da utilização dos conceitos de espaços vetoriais euclidianos e da geometria n-dimensional para o desenvolvimento do algoritmo especializado que soluciona o problema. Também, a partir de um exemplo, mostramos como o algoritmo simplex especializado pode ser informalmente compreendido. Além disso, mostramos uma aplicação do algoritmo especializado, sobre o problema dual de um problema de planejamento formulado como um problema de programação linear. Esperamos que esse trabalho seja referência para outros e que os resultados matemáticos apresentados possam estimular pesquisadores a implementação do algoritmo na resolução de problemas reais.

Palavras-chaves: programação linear, dualidade, fluxo em redes.

Sumário

1	CAPÍTULO 1	8
1.1	Considerações Iniciais	8
1.2	Objetivos	8
1.3	Estrutura	9
2	CAPÍTULO 2	10
2.1	Programação Linear	10
2.2	Notação e Convenção	11
2.3	Modelos Lineares de Redes	11
2.4	Resultados a partir da Teoria dos Grafos	12
3	CAPÍTULO 3	16
3.1	O Problema de Fluxo em Redes Não Capacitado	16
3.2	Formulação Matemática do Problema de Transporte	17
3.3	Conceitos de Geometria	19
3.4	Conceitos de Álgebra Linear	22
4	CAPÍTULO 4	28
4.1	Caracterização de uma Base para o Problema de Fluxo em Rede	28
4.2	Fundamentos Matemáticos do Método Simplex	29
4.2.1	Algoritmo Simplex Especializado para redes	33
5	CAPÍTULO 5	34
5.1	Dualidade	34
5.2	O Problema do Caminho Crítico	34
5.2.1	Formulação Matemática para o Problema do Caminho Crítico	36
5.2.2	Teorema	41
6	CAPÍTULO 6	42
	Referências	43
	ANEXOS	44

1 Capítulo 1

1.1 Considerações Iniciais

Muitos problemas da sociedade contemporânea despertam interesse pela natureza combinatória e motivam pela representação através de grafos. A formalização das definições e conceitos matemáticos da teoria dos grafos através da relação com a geometria n -dimensional, espaços vetoriais euclidianos e combinação linear, constitui o que denominamos por Matemática Aplicada. É bem provável que o estudo da Teoria dos Grafos estimule mecanismos mentais tornando possível o acesso a um conhecimento com características mais abrangentes. Segundo [Cardoso 2005], sem a utilização desses mecanismos, todo o processo formativo se transforma numa fastidiosa e penosa aquisição de um aglomerado de casos particulares com relacionamentos difíceis de detectar. É atribuída, a Euler a afirmação de que “No mundo só tem lugar aquilo que, em algum sentido, significa um máximo ou um mínimo” e na verdade, são inúmeras as situações práticas cujo modelo matemático corresponde a um problema de otimização. Nesse contexto, desenvolvemos um trabalho que tem por objetivo otimizar um problema de programação linear de fluxo em redes. Através desse trabalho, mostramos os fundamentos e propriedades matemáticas que levaram ao desenvolvimento do algoritmo simplex especializado na resolução do problema. Além disso, abordamos o importante conceito de dualidade e utilizamos esse conceito para resolver um problema de rede de planejamento. Justificamos a importância do trabalho pelo estudo da fundamentação teórica da estrutura do algoritmo simplex especializado, da necessidade de implementação desse algoritmo na resolução de problemas reais de grande porte, visto que, dependendo da especificidade do problema e tamanho da rede os pacotes comerciais não são capazes de solucioná-los. Salientamos que o trabalho tem uma contribuição importante na medida em que introduz a teoria e a técnica de resolução de um problema de otimização que pode ser proveniente das mais variadas áreas do conhecimento.

1.2 Objetivos

O trabalho tem como objetivo geral um estudo teórico sobre a estrutura do algoritmo simplex especializado para o problema de fluxo em redes. Buscando alcançar o objetivo geral, delimitamos os seguintes objetivos específicos:

Fazer uma revisão bibliográfica e apresentar resultados da Teoria dos Grafos;

Mostrar o problema de fluxos em redes e formular matematicamente através da combinação linear;

Mostrar os fundamentos da Geometria n-dimensional e Álgebra linear que estruturam o algoritmo simplex especializado para redes;

Apresentar o algoritmo simplex informalmente compreendido sobre um problema de redes;

Mostrar que o problema dual de um problema de planejamento formulado como um problema de programação linear é um problema de fluxo em redes;

Utilizar o software livre LINDO, para resolver um problema de planejamento;

Aplicar o algoritmo simplex especializado para solucionar o problema dual de um problema de planejamento.

1.3 Estrutura

O trabalho está organizado em quatro capítulos. No segundo capítulo apresentamos um breve histórico da programação linear e introduzimos os resultados matemáticos da teoria dos grafos necessários para o desenvolvimento do algoritmo que soluciona um problema de fluxo em redes. No terceiro capítulo sem grandes formalismos matemáticos introduzimos alguns conceitos de Álgebra linear e Geometria n-dimensional e apresentamos o algoritmo simplex informalmente compreendido. No capítulo 4, formalmente caracterizamos uma base para o problema de fluxo em redes e mostramos o desenvolvimento do algoritmo simplex especializado que soluciona um problema de fluxo em redes. No quarto capítulo abordamos a utilidade das relações do par primal-dual sobre um problema de planejamento, utilizando a dualidade e suas analogias. O capítulo 5 é encerrado apresentando dois resultados importantes com o intuito de demonstrar o Teorema da Folgas Complementares que comprova a possibilidade de aplicação. Finalmente, no último capítulo apresentamos as conclusões.

2 Capítulo 2

2.1 Programação Linear

A utilização de Pesquisa Operacional na resolução de problemas é muito antiga, porém somente após a Segunda Guerra Mundial passou a ser tratada com uma abordagem organizada. A necessidade de alocar os recursos escassos às várias operações militares de maneira eficaz fez com que um grupo de cientistas ingleses fosse convocado para estudar problemas de estratégia e tática associados com a defesa do país. Os resultados positivos obtidos por esse grupo inglês motivaram os Estados Unidos a iniciarem atividades semelhantes. Foi assim que um grupo de americanos, liderados por George B. Dantzig, ao final do estudo em 1947, criou o Método Simplex. Com o fim da guerra houve a difusão das técnicas de pesquisa operacional para diversas áreas do conhecimento. Uma característica importante da Pesquisa Operacional é a construção de modelos, permitindo a experimentação da solução proposta. Esta experimentação permite que uma decisão seja mais bem avaliada e testada antes de ser efetivamente implementada. Portanto a utilização da Pesquisa Operacional é justificada pelo ganho em experiência adquirida e pela economia obtida. Os avanços tecnológicos na informática proporcionaram um grande progresso na Pesquisa Operacional. Os profissionais dessa área conseguem desenvolver modelos que sejam mais rápidos e versáteis, criando assim uma poderosa ferramenta para auxiliar a tomada de decisões envolvendo operações de sistemas organizacionais. A Pesquisa Operacional busca encontrar a melhor solução possível para o problema, ou seja, ela busca a solução ótima, identificando quais ações são necessárias para atingir tal objetivo. Para que esse processo seja desenvolvido, são necessários a construção de modelos e o desenvolvimento de algoritmos para a obtenção de soluções.

Modelo é a representação de um sistema real em termos matemáticos. A validação do modelo é a confirmação de que ele realmente representa o mundo real. Um modelo é constituído basicamente por três elementos:

1. **Variáveis de decisão e parâmetros:** variáveis de decisão são as incógnitas a serem determinadas pela solução do modelo. Parâmetros são valores fixos do modelo;
2. **Função objetivo:** é uma função que define a qualidade da solução em função das variáveis de decisão;
3. **Restrições:** são as limitações físicas do sistema, ou seja, deve-se levar em consideração os possíveis valores que as variáveis de decisão poderão assumir.

Enfim, um estudo de pesquisa operacional geralmente envolve as seguintes fases:

1. Definição do problema;
2. Construção do modelo;
3. Solução do modelo;
4. Validação do modelo;
5. Implementação da solução.

Portanto a utilização da Pesquisa Operacional ajuda na estruturação de situações da vida real em modelos matemáticos, permite uma análise da solução e desenvolve procedimentos para obtê-la. Isso proporciona o cumprimento do objetivo principal, que é ser uma ferramenta de apoio à tomada de decisão de maneira a se chegar em uma solução ótima de alocação dos recursos escassos. [Luiz 2011]

2.2 Notação e Convenção

As notações e convenções utilizadas no decorrer do trabalho são as mesmas adotadas por [Kennington 1980]. Uma notação especial é utilizada para representar o produto de uma matriz por um vetor ou vice-versa. Adotamos que um vetor é: um vetor linha (matriz de dimensão $l \times n$) quando pré-multiplica uma matriz e um vetor coluna quando (matriz de dimensão $n \times l$) quando pós-multiplica uma matriz. O produto interno de dois vetores a e b fica simplesmente denotado por ab , isto é, o produto de um vetor linha por um vetor coluna. No contexto, de acordo com a conveniência, um vetor pode ser tratado como vetor linha ou vetor coluna. Sigma é um escalar utilizado para denotar o sinal de uma função, definida como:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

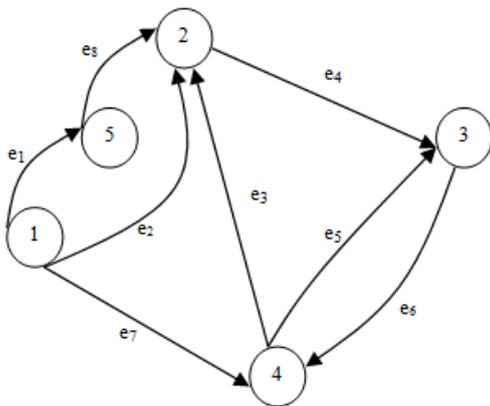
O elemento na i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz A , será denotado por a_{ij} . O vetor cuja entrada é a j -ésima coluna de A , será denotado por $a_{(j)}$. Certos números inteiros fixos serão indicados por letras maiúsculas com uma barra acima, por exemplo, \bar{I} . O símbolo, \mathbf{e}^i denotará o vetor tendo a i -ésima componente igual a 1 e todas as outras componentes iguais a zero. A i -ésima componente do vetor c será denotada por c_i .

2.3 Modelos Lineares de Redes

Uma rede é composta por dois tipos de entidades que são denominados de nós e arcos. Em uma rede os arcos são ligações unidirecionais e podem representar, por

exemplo, o transporte de produtos. Os nós de uma rede podem ser interpretados como locais de produção, consumo ou terminais conectados por arcos. A geometria de uma rede, que relaciona as entidades envolvidas em determinado problema, sempre pode ser desenhada no plano, permitindo a fácil compreensão do problema a ser abordado. Uma rede pode ser armazenada em uma matriz de dimensão $\bar{I} \times \bar{J}$, onde as linhas da matriz representam os nós e as colunas representam os arcos. Essa matriz é denominada matriz de incidência nó-arco e é definida como segue:

$$a_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{se o arco } j \text{ sai do nó } i \\ -1, & \text{se o arco } j \text{ chega no nó } i \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}$$



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
1	+1	+1	0	0	0	0	+1	0
2	0	-1	-1	+1	0	0	0	-1
3	0	0	0	-1	-1	+1	0	0
4	0	0	+1	0	+1	-1	-1	0
5	-1	0	0	0	0	0	0	+1

Figura 1: Representação de uma rede.

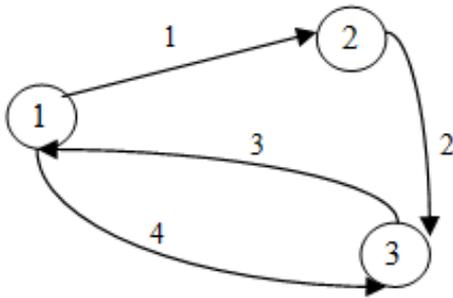
Matriz de incidência nó-arco representando a rede da Figura 1.

Uma característica da matriz de incidência nó-arco é que cada coluna possui exatamente duas entradas não nulas, uma (+1) e a outra (-1). Outras quantidades estão associadas à rede como: x_j a variável que denota a quantidade de fluxo através do arco j ; r o vetor de ofertas e demandas associados aos nós da rede; c o vetor de custos associados aos arcos da rede e l e u representando as capacidades mínimas e máximas de fluxo nos arcos da rede. Se, $r_i > 0$ então o nó i é um nó de oferta, se $r_i < 0$ então o nó i é um nó de demanda e se $r_i = 0$ então o nó i é um nó de transbordo. Uma rede formalmente é definida como um par ordenado $G[X, E]$ denominado grafo orientado, onde X é um conjunto de nós e E um conjunto de arestas que unem os nós de X , $E \subseteq X \times X$.

2.4 Resultados a partir da Teoria dos Grafos

Consideremos uma rede tendo \bar{I} nós e \bar{J} arcos, as quais faremos uma correspondência biunívoca com os números inteiros $1, \dots, \bar{I}$ e $1, \dots, \bar{J}$, respectivamente. Seja a matriz A de incidência nó-arco associada a uma rede. Para cada arco j , existe uma origem $F_{(j)} = i$, onde $a_{ij} = 1$ e existe um destino $T_{(j)} = k$ onde $a_{kj} = -1$. Então o arco j pode ser formalmente descrito como um par $(F_{(j)}, T_{(j)})$, com $F_{(j)}T_{(j)}$.

Seja o $E = \{e_1, e_2, \dots, e_j\}$ o conjunto de arcos, onde $e_j = (F_{(j)}, T_{(j)})$. Então para a rede da Figura 2, temos $E = \{e_1 = (1, 2), e_2 = (2, 3), e_3 = (1, 3), e_4 = (1, 3)\}$. Seja $X = \{1, 2, \dots, \bar{I}\}$ o conjunto de nós. Então, $G[X, E]$ é um grafo próprio se $I \geq 2$ e $J \geq 1$. Um grafo $\widehat{G}[\widehat{X}, \widehat{E}]$ é um subgrafo de G se $\widehat{X} \subset X$ e $\widehat{E} \subset E$. Se $\widehat{X} = X$ dizemos que \widehat{G} gera G ou então que \widehat{G} é um subgrafo gerador de G .



Número do Arco	Origem F(j)	Destino T(j)
1	1	2
2	2	3
3	1	3
4	1	3

Figura 2: Rede com arcos paralelos.

Uma sequência finita $P = \{s_1, e_{j_1}, s_2, e_{j_2}, s_3, e_{j_3}, \dots, s_n, e_{j_n}, s_{n+1}\}$ tendo pelo menos um arco é definida por ser um caminho em um grafo G . Os elementos ímpares correspondem aos nós distintos de G e os elementos pares correspondem aos arcos de G , onde cada arco $e_{j_i} \in \{(s_i, s_{i+1}), (s_{i+1}, s_i)\}$. Um exemplo de caminho está ilustrado na Figura 2, e $P = \{1, e_1, 2, e_2, 3\} = \{1, (1, 2), 2, (2, 3), 3\}$.

Proposição 2.4.1. Os arcos de um caminho são distintos.

Prova: Se dois arcos de um caminho são idênticos, os nós do caminho não seriam distintos. Uma sequência finita $C = \{s_1, e_{j_1}, s_2, e_{j_2}, s_3, e_{j_3}, \dots, s_n, e_{j_n}, s_{n+1}\}$ tendo pelo menos dois arcos é denominada de um ciclo em G se, a subsequência $\{s_1, e_{j_1}, s_2, e_{j_2}, \dots, s_n\}$ é um caminho em G , $e_{j_n} \in \{(s_n, s_{n+1}), (s_{n+1}, s_n)\}$, $s_1 = s_{n+1}$ e $e_{j_n} \neq e_{j_1}$. Um exemplo de ciclo está ilustrado na Figura 2, $C = \{1, e_3, 3, e_4, 1\}$.

Proposição 2.4.2. Os arcos de um ciclo são distintos.

Prova: Suponha que o ciclo possua n arcos. Como a subsequência $\{s_1, e_{j_1}, s_2, e_{j_2}, \dots, s_{n-1}, e_{j_{n-1}}, s_n\}$ é um caminho, os primeiros $n - 1$ arcos são distintos pela proposição 1. A subsequência $\{s_2, e_{j_2}, s_3, e_{j_3}, \dots, s_n, e_{j_n}, s_{n+1}\}$ também satisfaz a definição de caminho, então os últimos $n - 1$ arcos são distintos. Como C possui n arcos, o último arco e_{j_n} é igual ao primeiro arco e_{j_1} e, portanto contradiz a definição de ciclo.

O comprimento de um caminho ou de um ciclo é o número de arcos desse caminho ou ciclo. Para algum caminho ou ciclo, com comprimento n , é definido como orientação da

sequência $O(P)$ tendo n elementos como:

$$O_i(P) = \begin{cases} +1, & \text{se } e_{j_i} = (s_i, s_{i+1}) \\ -1, & \text{se } e_{j_i} = (s_{i+1}, s_i) \end{cases}$$

Para o caminho $\{2, e_1, 1, e_4, 3\}$ ilustrado na Figura 1, a orientação da sequência é $\{-1, +1\}$.

Proposição 2.4.3. Seja a sequência finita $P = \{s_1, e_{j_1}, s_2, e_{j_2}, \dots, s_n, e_{j_n}, s_{n+1}\}$ o caminho ou ciclo em um grafo próprio G , com matriz de incidência A nó-arco; Então: $\sum_{i=1}^n O_i(P)A_{j_i} = e^{s_1} - e^{s_{n+1}}$ Onde e representa o vetor canônico.

Prova: Seja $i \in \{1, \dots, n\}$.

Caso 1) Suponha $e_{j_i} = (s_i, s_{i+1})$, então $O_i(P)A(j_i) = (+1)(e^{s_i} - e^{s_{i+1}}) = e^{s_i} - e^{s_{i+1}}$

Caso 2) Suponha $e_{j_i} = (s_{i+1}, s_i)$, então $O_i(P)A(j_i) = (-1)(e^{s_{i+1}} - e^{s_i}) = e^{s_i} - e^{s_{i+1}}$.

Em ambos os casos temos, $O_i(P)A(j_i) = e^{s_i} - e^{s_{i+1}}$.

Proposição 2.4.4. Seja $C = \{s_1, e_{j_1}, s_2, e_{j_2}, \dots, s_n, e_{j_n}, s_{n+1}\}$ um ciclo em um grafo próprio G , com matriz de incidência A nó-arco; Então:

$$\sum_{i=1}^n O_i(C)A(j_i) = 0$$

Prova: $\sum_{i=1}^n O_i(C)A(j_i) = \sum_{i=1}^{n-1} O_i(C)A(j_i) + e^{s_n} - e^{s_{n+1}}$. Pela proposição 2.4.3, temos que $\sum_{i=1}^{n-1} O_i(C)A(j_i) = e^{s_1} - e^{s_n}$. Então $\sum_{i=1}^n O_i(C)A(j_i) = e^{s_1} - e^{s_n} + e^{s_n} - e^{s_{n+1}}$. Como C é ciclo, $s_1 = s_{n+1}$, portanto $\sum_{i=1}^n O_i(C)A(j_i) = 0$.

Corolário 2.4.1. Seja $C = \{s_1, e_{j_1}, s_2, e_{j_2}, \dots, s_n, e_{j_n}, s_{n+1}\}$ um ciclo em um grafo próprio G , com matriz de incidência A nó-arco; Então: $A(j_i) : i = 1, \dots, n$ é linearmente dependente. Consideremos o ciclo da Figura 3. Então é linearmente dependente, pois:

$$O_3(C) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + O_4(C) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + O_1(C) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + O_2(C) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = O_3(C) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

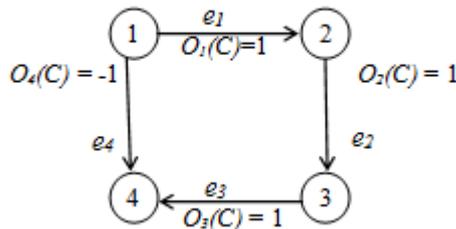


Figura 3: Ciclo de um grafo $C = \{3, e_3, 4, e_4, 1, e_1, 2, e_2, 3\}$

Corolário 2.4.2. Se $C = \{n_1, a_{j_1}, n_2, a_{j_2}, \dots, n_n, a_{j_n}, n_{n+1}\}$ é ciclo de um grafo próprio G com matriz de incidência A , então $\{A(j_i) : i = 1, \dots, n\}$ é linearmente dependente. Um grafo $G = [X, E]$ é acíclico se não possui ciclos podendo ser formado a partir de N e R . Um grafo $G = [X, E]$ é conexo se, para cada par de nós distintos (i, j) um caminho pode ser formado a partir de i até j .

Uma árvore τ é um grafo conexo e acíclico. Uma árvore τ é um subgrafo gerador de G , também chamada de árvore geradora para G .

Proposição 2.4.5. Seja A uma matriz de incidência nó-arco para um grafo próprio G . Seja $\tau = [X, E]$ um subgrafo de G , isto é, uma árvore contendo pelo menos dois nós. Então $A(j) : e_j \in E$ é linearmente independente.

Proposição 2.4.6. Seja A uma matriz de incidência nó-arco para um grafo próprio G , conexo e com n nós. Então o posto da matriz A é $n - 1$.

Proposição 2.4.7. Seja A uma matriz de incidência nó-arco para um grafo próprio $G = [X, E]$, onde G possui n nós. Seja \hat{E} um subconjunto de E tal que $\{A(j) : e_j \in \hat{E}\}$ é linearmente independente com \hat{E} tendo $n - 1$ arcos. Então, $\tau = [X, \hat{E}]$ é uma árvore.

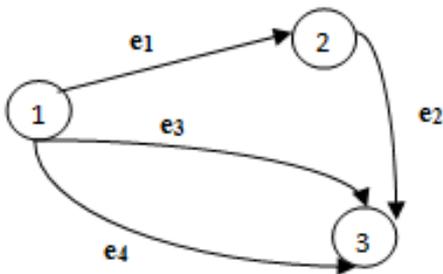
As proposições não demonstradas nesse capítulo estão detalhadas em [ken80]. No próximo capítulo apresentaremos a formulação matemática do problema de fluxo em redes.

3 Capítulo 3

Neste capítulo apresentamos o Problema de Fluxo em Redes e sua interessante formulação matemática por meio da combinação linear. A partir dos fundamentos matemáticos da Geometria n -dimensional e Álgebra Linear, sem o rigor matemático da Análise Convexa, conceitos importantes são introduzidos e o algoritmo que soluciona o problema é então informalmente apresentado.

3.1 O Problema de Fluxo em Redes Não Capacitado

Baseados na simples ideia de pontos interligados por linhas, o problema de fluxo de um produto pode ser representado, o termo rede pode ser utilizado e características quantitativas podem ser concedidas aos pontos (denominados de nós) e linhas (denominada de arcos). O problema consiste em efetuar o fluxo de produtos (matéria-prima, produtos fabricados, etc.) que se encontra em “uma” origem (armazém, fábrica, porto, etc.) para “um” destino distinto (mercados, consumidores finais, etc.). Conhecido o custo de transporte de uma unidade de produto associado a cada percurso origem/destino, pretendemos determinar o plano de distribuição dos produtos de forma a minimizar o custo total de transporte. O fluxo de produtos em redes é uma atribuição de valor de fluxo para as linhas da rede. A soma dos fluxos dos arcos que chegam a um nó de passagem (ou transbordo) deve ser igual à soma dos fluxos dos arcos que deixam esse mesmo nó (conservação de fluxo), exceção feita ao nó produtor (ou fonte) e consumidor (ou sumidouro), que são capazes de produzir ou consumir fluxo, respectivamente. A Figura 4 representa a rede, onde 5 unidades de um produto deverá fluir, a partir do nó de origem 1 até o nó de destino 3, tendo um nó de transbordo representado pelo nó 2.



Nome do Arco	Custos nos arcos
e_1	5
e_2	1
e_3	1
e_4	3

Figura 4: Rede de Transportes

Tabela 1: Custo de Transporte nos Arcos

A matriz de incidência nó-arco para o grafo da Figura 4 é:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Algumas observações sobre o problema de programação linear deverão ser consideradas.

- O problema admite mais de uma solução, mas tem como objetivo (meta) encontrar a solução de menor custo.
- A quantidade de oferta deverá ser igual à quantidade de demanda.
- O fluxo do produto ou itens a serem transportados ao longo da rede serão quantidades positivas e inteiras.
- A terminologia grafo não está totalmente padronizada e a representação da rede pode ser referenciada como multigrafo por permitir arcos paralelos.
- Os arcos paralelos fisicamente são diferentes, podendo representar, por exemplo, uma ferrovia e uma rodovia.

3.2 Formulação Matemática do Problema de Transporte

O problema enunciado anteriormente pode ser formulado matematicamente e consiste na determinação de valores inteiros não negativos (quantidade de fluxo nos arcos) para n variáveis (x_1, x_2, \dots, x_n) de modo a satisfazer um sistema de m equações lineares que minimiza uma função linear Z (real) dessas variáveis.

$$\text{Minimizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (3.1)$$

sujeito a: (restrições)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{m3}x_n = b_m \end{cases} \quad (3.2)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \text{ e inteiros (restrição de não negatividade e integralidade)} \quad (3.3)$$

Onde: Z denota a função objetivo (função critério), x_j as variáveis de decisão (variáveis principais), A_{ij} as entradas da matriz de incidência A , b_i os termos independentes e c_j os coeficientes da função objetivo. O sistema linear acima pode ser representado na forma matricial $Ax = b$, considerando A como a matriz de incidência, b o vetor dos termos independentes e x como vetor coluna das variáveis. O problema apresentado é então formulado matematicamente como:

$$\text{Minimizar } Z = 5x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4$$

s.a

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 5 \text{ (restrição para o nó de oferta 1)} \\ -x_1 + x_2 = 0 \text{ (restrição para o nó de transbordo 2)} \\ -x_2 - x_3 - x_4 = -5 \text{ (restrição para o nó de demanda 3)} \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ e inteiros (restrições de não negatividade e integralidade)

No entanto, é importante salientar que o sistema linear pode ser representado através da combinação linear dos vetores colunas da matriz A como:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = b.$$

Logo, a formulação matemática do problema poderá ser escrita de outra forma como:

$$\text{Min } Z = 5x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4$$

sujeito a

$$(5, 0, -5) = (1, -1, 0)x_1 + (0, 1, -1)x_2 + (1, 0, -1)x_3 + (1, 0, -1)x_4$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ e inteiros (restrições de não negatividade e integralidade).

A forma de representação da formulação matemática por meio da combinação linear é interessante, pois permite mostrar como o problema pode ser solucionado a partir da utilização de conceitos da Geometria n-dimensional e Álgebra Linear.

Um sistema de equações lineares com n variáveis e m equações é possível indeterminado quando $m < n$, isto significa que o sistema admite infinitas soluções. Em particular, o interesse está nas soluções básicas de tais sistemas, por motivos que serão justificados

mais adiante. Em relação ao problema proposto, o sistema linear indeterminado poderia ser resolvido utilizando o Método de Gauss-Jordan.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{\mathbf{L}_2 \leftarrow \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{\mathbf{L}_3 \leftarrow \mathbf{L}_3 + \mathbf{L}_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

podemos resolver o sistema linear indeterminado do problema proposto.

Obtendo como solução geral, $x_1 = 5 - x_3 - x_4$ e $x_2 = 5 - x_3 - x_4$, com duas variáveis livres x_3 e x_4 . Então, a partir da atribuição de valores inteiros e positivos as variáveis livres do sistema linear, algumas soluções particulares do problema são apresentadas:

se $x_3 = x_4 = 0$, obtemos a solução particular $P_1(5, 5, 0, 0)$, com $Z = 30u.m$;

se $x_3 = 3x_4 = 0$, obtemos a solução particular $P(2, 2, 3, 0)$; com $Z = 15u.m$;

se $x_3 = 5x_4 = 0$, obtemos a solução particular $P_2(0, 0, 5, 0)$; com $Z = 5u.m$.

É interessante fazer uma analogia com o ponto $P \in \mathbb{R}^2$ que divide o segmento de reta $\overline{P_1P_2}$ em uma razão dada, pois com relação aos pontos pertencentes \mathbb{R}^4 referentes às soluções particulares $P_1(5, 5, 0, 0)$, $P(2, 2, 3, 0)$ e $P_2(0, 0, 5, 0)$ podemos dizer que:

$\frac{\overline{PP_2}}{\overline{P_1P_2}} = \lambda$ onde $\overline{PP_2} = (-2, -2, 2, 0)$, $\overline{P_1P_2} = (-5, -5, 5, 0)$ e portanto $\lambda = \frac{2}{5}$.

Observando que o ponto P pode ser escrito como, $P = \lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2$, com P_1 e P_2 pontos extremos. A partir desses conhecimentos, sem grandes formalismos matemáticos, naturalmente novos conceitos e definições da Análise Convexa são introduzidos. O interesse está em estabelecer o relacionamento entre o conceito de **ponto extremo e solução básica** de um sistema linear.

3.3 Conceitos de Geometria

Definição 3.3.1. Uma combinação convexa dos vetores (ou pontos) $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^n$ é o vetor (ou ponto) $P = \lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2$ para algum $\lambda \in [0, 1]$. Os pontos P_1 e P_2 são chamados de extremos. Uma combinação convexa no \mathbb{R}^2 é um ponto P situado entre os pontos P_1 e P_2 , sobre o segmento de reta que une estes dois pontos. Em particular, se $\lambda = 1$, então $P = P_1$ e se $\lambda = 0$, então $P = P_2$.

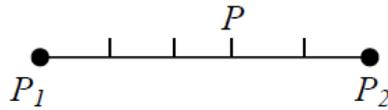


Figura 5: Representação do ponto P situado no terceiro quinto do segmento de reta de extremos P_1 e P_2 .

Se considerarmos $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^n$. Podemos dizer que o segmento de reta $\overline{P_1P_2}$ é o conjunto de todas as combinações convexas, isto é: $\overline{P_1P_2} = \{\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2 \mid \lambda \in [0, 1]\}$. Estendemos assim, o conceito geométrico de segmento de reta $\overline{P_1P_2}$, um conceito familiar do estudo do plano e do espaço, para o espaço métrico \mathbb{R}^n (um conjunto munido de uma medida, como por exemplo a distância entre dois pontos). Dentro desse contexto, passamos a definir conjunto convexo.

Definição 3.3.2. Um conjunto X é convexo somente quando, dado dois pontos quaisquer $P_1, P_2 \in X$, o segmento de reta que tem estes pontos como pontos extremos for um subconjunto de X .

Um ponto P_1 de um conjunto convexo X é extremo se é impossível que ele esteja sobre qualquer segmento $\overline{P_1P_2}$ contido em X , e entre P_1 e P_2 . Um resultado importante é que todo ponto extremo de um conjunto é ponto fronteira deste conjunto. No entanto, a recíproca não é verdadeira. A Figura 6 mostra um conjunto convexo e não convexo. A Figura 7 representa, no conjunto convexo X , o ponto Q como ponto interior, o ponto P como ponto de fronteira, mas nenhum dos dois pontos (P e Q) como ponto extremo do conjunto X . O ponto P_1 é ponto extremo do conjunto X . No \mathbb{R}^2 , se considerarmos X um polígono, seus pontos de fronteira correspondem à sua linha poligonal (arestas) e seus pontos extremos são os vértices do polígono.

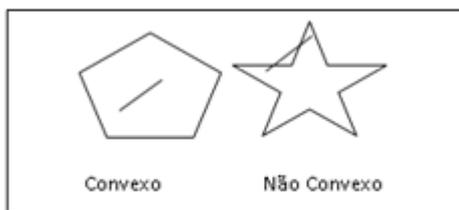


Figura 6: Representação dos Conjuntos

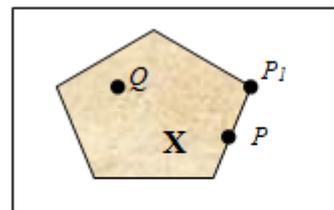


Figura 7: Representação dos Pontos em X .

Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$. O hiperplano $ax = b$ é o conjunto $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ax = b\}$. Essa definição generaliza o conceito da reta no \mathbb{R}^2 e de plano no \mathbb{R}^3 para hiperplanos em \mathbb{R}^n . Então, é compreensível que as restrições do problema apresentado são hiperplanos que dividem o espaço em dois semi-espacos em \mathbb{R}^n . Esses hiperplanos correspondem à fronteira dos semi-espacos. Intuitivamente é simples entender que a intersecção de uma

família de hiperplanos é um conjunto convexo e que os pontos de fronteira estão sobre esse hiperplano. Além disso, o conjunto de soluções compatíveis do problema é um conjunto convexo fechado e limitado inferiormente por $x \geq 0$ (restrições de não negatividade).

Definição 3.3.3. Se P_1 é um ponto de fronteira de um conjunto convexo X . Então $cx = z$ será chamado de hiperplano suporte de P_1 , se $cP_1 = z$

As soluções compatíveis do problema é um conjunto convexo fechado e a função a ser otimizada é um hiperplano suporte. A Figura 8, mostra que pode haver mais de um hiperplano suporte que passa por um ponto de fronteira, e isto ocorre quando o ponto é extremo. A Figura 9 mostra quando o hiperplano é deslocado paralelamente a si mesmo na direção do vetor gradiente (vetor dos custos) enquanto ainda mantiver algum ponto do conjunto de soluções compatíveis ao problema. Admitindo que o conjunto de soluções compatíveis é limitado nessa direção, haverá um momento em que o hiperplano da função objetivo se torna um hiperplano suporte a pelo menos algum dos pontos de fronteira, nesse ponto é atingido o ótimo.

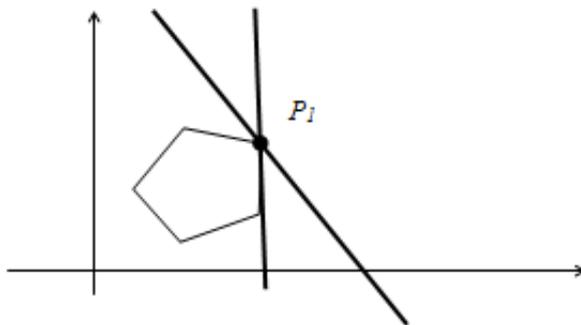


Figura 8: Mais de um Hiperplano suporte

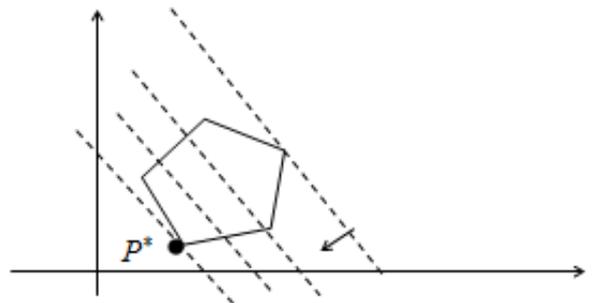


Figura 9: Ponto ótimo

Teorema 3.3.1. Um conjunto convexo fechado que seja limitado inferiormente tem um ponto extremo pertencente a cada hiperplano suporte.

A solução ótima do problema, se existe, é um ponto de fronteira. Então, pela definição 3.3.3 existe um hiperplano suporte $cx = z$ para esse ponto. O teorema garante a existência de um ponto extremo P^* do conjunto de soluções compatíveis pertencentes a esse hiperplano suporte $cx = z$, ou seja, fornecendo a solução ótima $cP^* = z^*$. Assim, se houver solução ótima, pelo menos um ponto extremo do conjunto de soluções compatíveis fornece a solução ótima. Chamamos atenção para o $P(2, 2, 3, 0)$, obtido quando atribuídos os valores $x_3 = 3$ e $x_4 = 0$, na solução geral do sistema linear. Ele não é ponto extremo, portanto não é candidato a solução ótima. O espaço de soluções candidatas à solução

ótima.

Definição 3.3.4. Consideremos um sistema de equações lineares simultâneas com n variáveis, $Ax = b$, com $m < n$ e posto $p(A) = m$. Se m variáveis são escolhidas de A , as quais chamaremos de variáveis básicas, e se as demais $m - n$ variáveis não-associadas à matriz são igualadas a zero, as quais chamaremos de variáveis não básicas, então a solução do sistema linear formado pelas colunas correspondentes às variáveis básicas é chamada de solução básica. O relacionamento com pontos extremos do conjunto de soluções compatíveis do problema com soluções básicas é esclarecido pelo seguinte teorema.

Teorema 3.3.2. Toda solução compatível básica é um ponto extremo do conjunto de soluções compatíveis de um problema de programação linear e todo ponto extremo é uma solução compatível básica.

Já vimos que o ponto $P(2, 2, 3, 0)$, não é ponto extremo e de acordo com o Teorema 3.3.2 e também não é solução básica. Então, a solução ótima do problema, se existe, consiste em encontrar todas as soluções compatíveis básicas. A partir dessa conclusão, é fácil compreender que todas as soluções compatíveis básicas são pontos extremos e, portanto existe um conjunto finito de soluções candidatas a solução ótima. Assim, poderia se pensar sobre o desenvolvimento de um algoritmo que medisse o valor da função objetivo a partir da enumeração de todas as soluções compatíveis básicas. Como poderia uma máquina previamente programada obter todos os pontos extremos ou todas as soluções básicas? A seguir será mostraremos como esses pontos extremos podem ser obtidos.

3.4 Conceitos de Álgebra Linear

A definição de solução básica remete a encontrar uma base para o espaço solução do sistema linear. Assim, em relação ao sistema linear do problema apresentado temos que:

O conjunto de vetores $A = (1, -1, 0), (0, 1, -1), (1, 0, -1), (1, 0, -1)$ é linearmente dependente, visto que o sistema linear homogêneo associado $(0, 0, 0) = (1, -1, 0)x_1 + (0, 1, -1)x_2 + (1, 0, -1)x_3 + (1, 0, -1)x_4$ admite infinitas soluções. Se retirarmos do conjunto A os dois vetores paralelos $(1, 0, -1)$, o novo conjunto $A' = (1, -1, 0), (0, 1, -1)$ tornar-se-á linearmente independente mas não constituirá uma base para o espaço vetorial \mathbb{R}^3 , visto que sua dimensão é 2. No entanto, pela adição de um vetor canônico, o conjunto A' poderá ser estendido a um conjunto $B = (1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1)$, linearmente independente e de dimensão 3. A seguir a representação da rede através da matriz de incidência nó-arco com a inclusão do vetor canônico $(0, 0, 1)$.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & e & a_3 & a_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} = [B|N]$$

Os grafos na Figura 10 mostram:

- (a) o grafo correspondente a matriz A, o nó 3 é referenciado como um nó raiz;
- (b) a árvore τ representa a matriz B;
- (c) os arcos não básicos representam a matriz N.

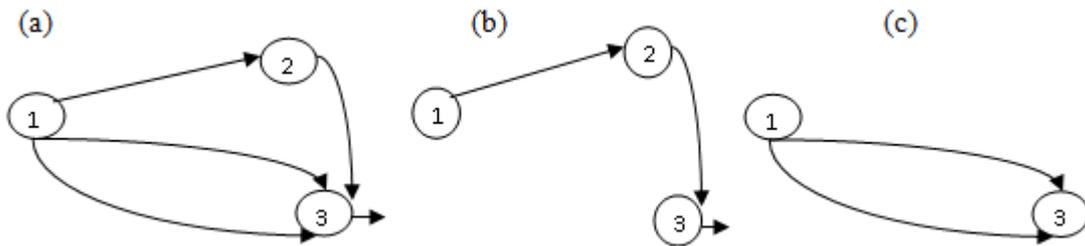


Figura 10: Grafos

Observemos que a inclusão do vetor canônico permite rearranjar as colunas da matriz de incidência nó-arco de forma que a primeira partição corresponda aos vetores básicos e a segunda partição aos vetores não básicos, como:

$$A = [B|N] \tag{3.4}$$

Analogamente, a partição da matriz correspondente as variáveis básicas e não básicas, como:

$$\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

O produto matricial $[B|N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ é sempre possível, desde que o número de vetores linearmente independentes da matriz B seja igual ao número de variáveis básicas. Isso implica em adicionarmos uma variável básica x_r . Logo, o sistema linear pode ser representado como: $[B|N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b$ ou ainda,

$$Bx_B + Nx_N = b \quad (3.6)$$

$$B^{-1}(Bx_B + Nx_N) = B^{-1}b$$

$$x_B = B^{-1}(b - Nx_N) \quad (3.7)$$

De acordo com a definição 3.3.4, estamos interessados nas soluções básicas do sistema linear.

$$\text{Fazendo } x_N = 0, \text{ temos } x_B = B^{-1}b. \quad (3.8)$$

A razão dessa forma de representação é devido a sua utilização no desenvolvimento do algoritmo de resolução.

Em um sistema linear com $m < n$, podem ser encontradas muitas soluções básicas, dependendo da escolha das variáveis básicas. Então, o número de combinações destas n colunas tomadas à taxa m , não excede a $n!/(m!(n-m)!)$. Deve ser observado que o vetor canônico sempre estará na base, com $x_r = 0$, caso contrário a matriz B não teria posto completo. Com relação ao problema apresentado teríamos no máximo 6 possibilidades, $n = 4$ variáveis e $m = 2$ variáveis livres. No entanto, em relação ao problema temos 5 possibilidades, visto que o sistema linear não constitui uma base quando anulamos as variáveis x_1 e x_2 . As soluções compatíveis básicas encontradas são:

(a) Quando $x_3 = x_4 = 0$, temos $B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_r \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e a solução do sistema linear é:
 $x_1 = 5, x_2 = 5$ e $x_r = 0$, com $Z = 30$.

(b) Quando $x_2 = x_4 = 0$, temos $B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_r \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e a solução do sistema linear é:
 $x_1 = 0, x_3 = 5$ e $x_r = 0$, com $Z = 5$. Essa mesma solução também é obtida quando $x_1 = x_4 = 0$

(c) Quando $x_2 = x_3 = 0$, temos $B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_r \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ a solução do sistema linear é:
 $x_1 = 0, x_4 = 5$ e $x_r = 0$, com $Z = 15$. Essa mesma solução também é obtida quando $x_1 = x_3 = 0$.

Como complementação, quando na resolução do sistema linear uma ou mais variáveis básicas se anulam (exceto x_r), temos um problema com soluções básicas degeneradas. No entanto, o que importa é que a solução ótima do problema se restrinja a pesquisa das soluções compatíveis básicas. Logo a solução ótima para o problema é $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, $x_3 = 5$ e $x_r = 0$, com $Z = 5$. O método apresentado consiste na busca da solução ótima por exaustão, ou seja, a solução ótima é selecionada entre todas as soluções compatíveis básicas. O método torna-se ineficiente na medida em que o número de restrições e variáveis aumentam. A enumeração de todas as soluções básicas é computacionalmente inviável para encontrar a solução ótima, tornando necessário um “algoritmo mais inteligente”.

O “algoritmo inteligente” não precisa enumerar todas as soluções básicas, mas precisa a cada iteração medir o valor da solução básica na função objetivo. O entendimento é simples e será mostrado sobre o problema considerado.

Parte-se de uma solução compatível básica qualquer, um ponto extremo. Por exemplo, $x_1 = 5$, $x_2 = 5$, $x_r = 0$ (variáveis básicas) e $x_3 = x_4 = 0$ (variáveis não básicas). De acordo com (3.7), isolando as variáveis básicas em função das variáveis não básicas temos:

$$x_1 = 5 - x_3 - x_4$$

$$x_2 = 5 - x_3 - x_4$$

Substituindo as variáveis básicas isoladas na função objetivo $z = C_B^T x_B + C_N^T x_N$ temos:
 $z = 5(5 - x_3 - x_4) + 5 - x_3 - x_4 + x_3 + 3x_4 = 30 - 5x_3 - 3x_4$.

E, portanto quando $x_3 = x_4 = 0$, obtemos $z = 30$.

A questão é: Como saber se estamos diante da “solução ótima do problema”. Caso não estejamos, como encontrar uma solução melhor que a solução corrente. Então sobre a igualdade: $z = 30 - 5x_3 - 3x_4$.

Fazemos o seguinte raciocínio:

Se fixarmos o valor de $x_4 = 0$ e aumentarmos em uma unidade a quantidade de fluxo no arco a_3 , a função objetivo tende a diminuir mais, ou seja,

$$z = 30 - 5.(1) - 3.(0) = 25.$$

Da mesma forma, se fixarmos o valor de $x_3 = 0$ e aumentarmos em uma unidade a quantidade de fluxo no arco a_4 , teremos $z = 30 - 5.(0) - 3.(1) = 27$.

Isso quer dizer que não estamos diante da solução ótima. Façamos a escolha sobre a quantidade de fluxo no arco o qual diminui mais a função objetivo, o arco a_3 . No entanto, deve ser observado que o aumento de fluxo no arco a_3 faz com que ele deixe de ser um arco não básico.

Assim, o aumento da quantidade de fluxo no arco a_3 deverá ser tal que: algum arco básico pertencente ao ciclo formado com o arco a_3 atinja o limite inferior (nesse caso zero), tornando-se um arco não básico. Essa troca de variáveis na matriz básica é chamada de

pivoteamento. Assim, quando $x_3 = 5$, as quantidades x_1 e x_2 atingem o zero (solução degenerada). Dessa forma, a escolha para o arco que sai da base é feita sobre o arco a_2 . A Figura 11 mostra a quantidade acrescida a variável x_3 . Logo, o arco a_3 deixa de ser um arco não básico para tornar-se um básico.

A Figura 12 mostra a saída do arco a_2 que deixa de ser um arco básico para tornar-se um não básico. Observemos que as matrizes básicas das soluções (a) e (b) correspondem à troca da variável x_2 pela x_3 .

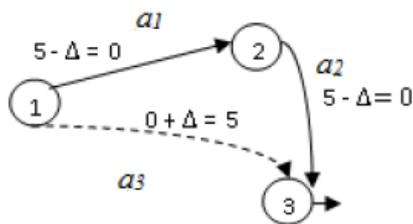


Figura 11: Entra arco a_3

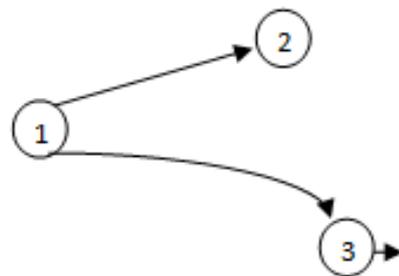


Figura 12: Sai o arco a_2

A nova solução é então $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 5, x_4 = 0$ e $x_r = 0$; com $z = 5$. Será essa a solução ótima? Então novamente, de acordo com (2.7), isolando as variáveis básicas em função das variáveis não básicas temos:

$$x_1 = x_2$$

$$x_3 = 5 - x_2 - x_4$$

Substituindo na função objetivo temos:

$$Z = 5x_2 + x_2 + 5 - x_2 - x_4 + 3x_4 = 5 + 6x_2 + 2x_4.$$

Concluimos que estamos na solução ótima, pois qualquer aumento nas quantidades x_2 e x_4 não são capazes de diminuir a função objetivo. Logo o custo ótimo é $z = 5$, com $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 5, x_4 = 0$ e $x_r = 0$ a solução ótima.

O “algoritmo inteligente” é denominado algoritmo simplex e através da análise da solução corrente é bastante eficiente e resolve problemas reais de grande porte (com muitas variáveis e equações). Basicamente, o algoritmo percorre de vértice em vértice (intersecção dos hiperplanos) até encontrar a solução ótima. O valor da função objetivo

na iteração $(i + 1)$ é sempre menor ou igual ao valor da função objetivo na iteração i . Quanto melhor a solução inicial mais rápido é a convergência do algoritmo.

No próximo capítulo, formalmente caracterizaremos uma base para um problema de fluxos em redes e a partir de resultados matemáticos da teoria dos grafos mostraremos como o algoritmo simplex pode tornar-se especializado na resolução do problema.

4 Capítulo 4

Algoritmo Simplex

Neste capítulo, formalmente caracterizamos uma base para o problema de fluxo em redes. A seguir, mostramos a especialização do algoritmo simplex que soluciona um Problema de Fluxo em Rede capacitado e ou não capacitado. A vantagem, dessa especialização, é que o algoritmo pode ser executado direto na rede eliminando o peso computacional na atualização da inversa da matriz básica B .

4.1 Caracterização de uma Base para o Problema de Fluxo em Rede

No capítulo anterior, observamos que a matriz de restrições A do problema apresentado deve possuir posto completo. Pela Proposição 3.1.2, a matriz de restrição para o problema de fluxo em redes, possui o posto menor que o número de linhas da matriz. Dessa forma, o problema de minimização para o problema de fluxo em redes passa ter a seguinte formulação matemática:

$$\begin{aligned} & \text{Min } cx \\ & \text{s.a} \\ & Ax + e^l = r \\ & 1 \leq a \leq 0 \end{aligned}$$

onde, l é um inteiro positivo não maior que o número de nós n , com a estritamente igual a zero.

Proposição 4.1.1. Seja A uma matriz de incidência nó-arco para um grafo próprio conexo $G = [X, E]$ possuindo n nós. Seja $\tau = [X, \hat{E}]$ uma árvore geradora para G . Então, $\Omega = A(j) : e_j \in \hat{E} \cup e^l$ gera E^n , isto é, existe um conjunto de colunas n a partir de $[A|e^l]$ que gera E^n .

Proposição 4.1.2. Seja A uma matriz de incidência nó-arco para um grafo próprio conexo $G = [X, E]$ com nó raiz l . Se Ω é uma base para $[A|e^l]$, então $e^l \in \Omega$ e $\tau = [x, \hat{E}]$ é uma árvore geradora para G , onde $\hat{E} = e_j : A(j) \in \Omega$. A partir das proposições acima, a matriz básica pode ser caracterizada.

Proposição 4.1.3. Seja A uma matriz de incidência nó-arco para um grafo próprio, conexo e enraizado com nó raiz l . Uma base para $[A|e^l]$ é constituída por um conjunto de arcos que compõem as colunas da matriz A e correspondem a árvore geradora τ para G .

Proposição 4.1.4. Seja A uma matriz de incidência nó-arco para um grafo próprio, conexo e enraizado com nó raiz l . Seja B uma base a partir de $[A|e^l]$. Então, B é triangular.

A estratégia utilizada na demonstração, da Proposição 4.1.4, que determina a linha e coluna ordenada, de forma a obter uma base para a rede na forma triangular superior fez com que o algoritmo de triangularização fosse desenvolvido. As demonstrações das proposições enunciadas anteriormente estão detalhadas em [Kennington 1980].

4.2 Fundamentos Matemáticos do Método Simplex

Seja uma matriz de restrições de rede $A_{m \times n}$, com $m < n$, posto $p(A) = m$, particionada como $A = [B|N]$, onde B é uma matriz quadrada com $\det B \neq 0$. Vamos considerar agora que, as restrições de não negatividades das variáveis x , admitam ser limitadas inferiormente por l e superiormente por u , e que são particionadas como:

$$Ax = b \longleftrightarrow Bx^B + Nx^N = b$$

$$l \leq x \leq u \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} l^B \leq x^B \leq u^B \\ l^N \leq x^N \leq u^N \end{array} \right\}.$$

A solução básica viável para o problema de programação linear é uma solução da forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} [x^B | x^N] \\ e \\ x_i^N \in \{l_i^N, u_i^N\} \text{ para todo } i \end{array} \right\}.$$

Assim, dada uma solução básica viável para um problema linear, podemos particionar A , c , x e u da forma: $A = [B|N]$, $c = [c^B|c^N]$, $x = [x^B|x^N]$ e $u = [u^B|u^N]$, então: Temos como objetivo

$$\text{Min } c^B x^B + c^N x^N \tag{4.1}$$

s.a

$$Bx^B + Nx^N = b \tag{4.2}$$

$$l^B \leq x^B \leq u^B \tag{4.3}$$

$$l^N \leq x^N \leq u^N \tag{4.4}$$

A partir de (4.2), obtemos:

$$B^{-1}Bx^B + B^{-1}Nx^N = B^{-1}b \quad x^B = B^{-1}b - B^{-1}Nx^N$$

Substituindo por x^B vem:

$$\begin{aligned} & \text{Min } c^B(B^{-1}b - B^{-1}Nx^N) + c^N x^N \\ & \text{Min } c^B B^{-1}b - c^B B^{-1}Nx^N + c^N x^N \\ & \text{Min } c^B B^{-1}b + (c^N - c^B B^{-1}N)x^N \end{aligned} \quad (4.5)$$

s.a

$$0 \leq B^{-1}b - B^{-1}Nx^N \leq u^B \quad (4.6)$$

$$0 \leq x^N \leq u^N \quad (4.7)$$

Teremos nossa atenção na solução não básica $x_i^N \in \{0, u_i^N\}$ e o conjunto de soluções não básicas que podem melhorar nossa função objetivo. Para um problema de minimização, o cálculo matricial $(c^N - c^B B^{-1}N)_i$ indicará se uma variável não-básica de índice i é candidata a entrar na base diminuindo o valor da função objetivo. Vimos no capítulo anterior, que a matriz B contém com vetor canônico e é linearmente independente. Além disso, em um problema de rede é sempre possível associar a matriz básica B a uma árvore τ_B com nó raiz l . Pela proposição 4.1.4, B é triangular. Esse resultado permite obter o cálculo do vetor $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$, solução do sistema linear $\pi B = c^B$, a partir da última componente π_n , com $n = l$, substituindo regressivamente nas equações anteriores (retro-substituição). Os π 's são geralmente chamados de variáveis duais e o cálculo de $\pi B = c^B$ pode ser determinado como

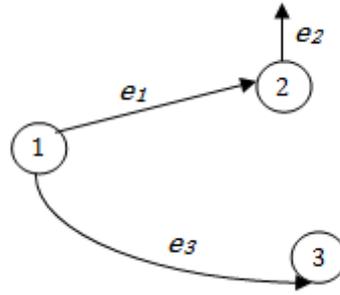
$$\begin{cases} \pi_n = 0, \\ \pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} = c_j \text{ para } e_j \in \tau_B \end{cases},$$

com $n=l$. Esse cálculo pode ser obtido percorrendo os arcos da árvore τ_B a partir do nó raiz l .

Considere a árvore da Figura 4 (ver figura do capítulo 2), com respectiva matriz

$$B = \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

então:



$$\begin{bmatrix} \pi_2 & \pi_1 & \pi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\pi_2 = 0, \pi_1 - \pi_2 = c_1, \pi_1 - \pi_3 = c_3$$

Portanto, todas as variáveis duais podem ser unicamente determinadas iterativamente porque a árvore é enraizada, conexa e não possui ciclos. A especialização do algoritmo simplex primal de George Dantzig para o problema de fluxo em rede com custo mínimo é de grande importância, pois o método simplex pode ser realizado diretamente na rede eliminando o peso computacional na atualização da inversa da matriz básica B . Em um problema de rede capacitado, uma variável não básica x_i^N , é candidata a entrar na base,

- i) $\psi_1 = \{i : x_i^N = l_i \text{ e } (c^N - c^B B^{-1} N)_i < 0\}$, nesse caso a variável não-básica de índice i encontra-se no limite inferior ou
- ii) $\psi_2 = \{i : x_i^N = u_i^N \text{ e } (c^N - c^B B^{-1} N)_i > 0\}$, nesse caso a variável não-básica de índice i encontra-se no limite superior.

O cálculo dos $\pi = c^B B^{-1}$ é então utilizado para determinar $(c^N - c^B B^{-1} N)$. Assim, o cálculo necessário para determinar a variável que entra na base torna-se especializado, não sendo necessário fazer operações matriciais pois; Para o conjunto ψ_1 temos:

$$(c^N - c^B B^{-1} N)_i = (c^N - \pi N)_i = c_j - \pi_{F(j)} + \pi_{T(j)} < 0$$

ou

$$(\pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} - c_j) > 0$$

Para o conjunto ψ_2 temos:

$$(c^N - c^B B^{-1} N)_i = (c^N - \pi N)_i = c_j - \pi_{F(j)} + \pi_{T(j)} > 0$$

ou

$$(\pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} - c_j) < 0.$$

Observamos que a componente $c^B B^{-1} N$ também pode ser determinada para uma outra

finalidade. A i -ésima componente de $c^B B^{-1}N$ é dada por $c^B B^{-1}N_{(i)}$. Seja $A(k)$ o vetor coluna da matriz de incidência A , correspondente ao arco e_k (escolhido para entrar na base). Suponha $A(k) = N_{(i)}$, então podemos determinar $y = B^{-1}A(k)$ e em seguida calcular $c^B y$, onde $e_k \notin \tau_B$. Mas isto é equivalente a resolver $By = A(k) = e^{F(k)} - e^{T(k)}$. Como B é triangular y pode ser obtido diretamente na árvore τ_B e o cálculo de B^{-1} não é necessário. Novamente a árvore τ_B é utilizada para resolver o sistema triangular. Seja $P = \{s_1, e_{j_1}, s_2, e_{j_2}, \dots, s_n, e_{j_n}, s_{n+1}\}$ o único caminho na árvore τ_B unindo $F(k)$ ao $T(k)$. Pela proposição 4.1.4, temos que

$$\sum_{(i=1)}^n O_i(P)A(j_i) = e^{F(k)} - e^{T(k)} \tag{4.8}$$

Então $c^B B^{-1}N_{(i)} = c^B y$ é simplesmente $\sum_{(i=1)}^n c_{j_i} O_i(P)$.

A equação (4.8) também indica como podemos especializar o teste da razão o qual exige o cálculo de $y = B^{-1}A(k)$. Se ordenarmos os arcos da árvore τ_B como $(e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_j})$, correspondente as colunas da matriz básica B , então as componentes de y podem ser determinadas pela orientação da sequência

$$y_n = \begin{cases} O_i(P) & \text{se } e_{k_n} = e_{j_i} \in P \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases} \tag{4.9}$$

Portanto, o cálculo de Δ_1 e Δ_2 no teste de razão pode ser especializado como:

$$\Delta_1 \leftarrow \min_{O_i(P) = \delta} \{x_{j_i} - l_{j_i}, \infty\} \quad \text{e} \quad \Delta_2 \leftarrow \min_{-O_i(P) = \delta} \{u_{j_i} - x_{j_i}, \infty\}$$

Consideremos a árvore enraizada da figura 14. Suponha que o arco não básico $e_2 = (2, 3)$ seja um candidato a entrar na base, cujo caminho $P = 2, e_2, 1, e_3, 3$ com $O(P) = -1, 1$. O ciclo formado e o cálculo de y é mostrado na figura

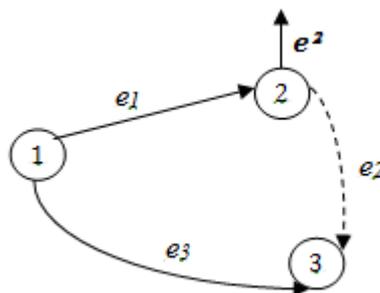


Figura 14: Ciclo formado com o arco e_2 .

O algoritmo simplex especializado para o problema de rede é então apresentado.

4.2.1 Algoritmo Simplex Especializado para redes

Passo 1 . Inicialização.

Seja $[xB|xN]$ uma solução básica viável com árvore τ_B .

Passo 2. Variável candidata a entrar na base. Sejam os conjuntos:

$\psi_1 = e_j : x_j = l_j$ e $\pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} - c_j > 0$, variáveis limitadas inferiormente

e

$\psi_2 = e_j : x_j = u_j$ e $\pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} - c_j < 0$, variáveis limitadas superiormente.

Se $\psi_1 \cup \psi_2 = \emptyset$, o algoritmo termina com a solução ótima. Caso contrário, selecione-se $e_k \in \psi_1 \cup \psi_2$ para entrar na base.

Assim, $\delta \leftarrow \begin{cases} +1, & \text{se } e_k \in \psi_1 \\ -1, & \text{se } e_k \in \psi_2 \end{cases}$

Passo 3. Teste de Razão. (quem sai da base)

Seja, $P = \{s_1, e_{j_1}, s_2, e_{j_2}, \dots, s_n, e_{j_n}, s_{n+1}\}$, o caminho na árvore τ_B unindo $F(k)$ ao $T(k)$.

Faça

$$\Delta_1 \leftarrow \min_{O_i(P) = \delta} \{x_{j_i} - l_{j_i}, \infty\},$$

$$\Delta_2 \leftarrow \min_{-O_i(P) = -\delta} \{u_{j_i} - x_{j_i}, \infty\},$$

$$\Delta \leftarrow \min \{\Delta_1, \Delta_2, u_k - l_k\}.$$

Passo 4. Atualização dos Fluxos.

Faça $x_k \leftarrow x_k + \Delta\delta$. Para todo $e_j \in P$, faça $x_{j_i} \leftarrow x_{j_i} - \Delta\delta O_i(P)$. Se $\Delta = u_k - l_k$, retorne ao **Passo 2**.

Passo 5. Atualização da Árvore e Variáveis Duais.

Sejam os conjuntos:

$\psi_3 = \{e_{j_i} : x_{j_i} = l_{j_i} \text{ onde } O_i(P) = \delta\}$

e

$\psi_4 = \{e_{j_i} : x_{j_i} = u_{j_i} \text{ onde } -O_i(P) = \delta\}$.

Selecione algum $e_m \in \psi_3 \cup \psi_4$. Permute e_m em τ_B com e_k , atualize as variáveis duais e retorne ao Passo 2.

No próximo capítulo mostraremos passo a passo a aplicação do algoritmo simplex sobre um problema de planejamento.

5 Capítulo 5

Problema Primal-Dual

Esse capítulo aborda a utilidade das relações entre o problema dual e primal(original) e faz uma aplicação do algoritmo simplex especializado para o problema dual de um problema de planejamento.

5.1 Dualidade

Um dos conceitos mais importantes em programação linear é o de dualidade. Qualquer problema de PL tem associado um outro problema de PL, chamado o Dual. Neste contexto, o problema original denomina-se por Primal. Um dos principais papéis da teoria da dualidade é a interpretação e implementação da análise de sensibilidade.

Analogias:

1. Uma solução viável básica primal não-ótima corresponde uma solução básica inviável dual.
2. A solução ótima primal corresponde a solução ótima dual com $Z=W$.
3. Os coeficientes das variáveis de controle na função-objetivo primal são os valores das variáveis de folga correspondentes na solução dual.
4. Os coeficientes das variáveis de folga na função-objetivo primal são os valores das variáveis de controle correspondentes das solução dual.
5. Os valores das variáveis de controle primal são os coeficientes das variáveis de folga correspondentes na solução dual.
6. Os valores das variáveis de folga no primal são os coeficientes das variáveis de controle correspondentes na solução dual.

[Nogueira 2010]

5.2 O Problema do Caminho Crítico

O problema do caminho crítico é um modelo extremamente útil na solução de problemas que possuem um número muito grande de atividades que ocorrem paralelamente e com duração variada. As maiores aplicações ocorrem na construção civil, e na

gerência de grandes projetos, especialmente na fase de planejamento e como ferramenta de acompanhamento. Sobre o problema dual do problema de planejamento apresentado por [Goldbarg 2000] aplicaremos passo a passo o algoritmo simplex especializado para redes. O exemplo utilizado é uma rede PERT para o planejamento de uma simulação de um prototipo industrial. As etapas necessárias para realização da simulação do protótipo estão descritas na tabela (2).

Número	Atividades	Atividade de Pré-Requisito	Duração	Início Mais Cedo
0	Início do Trabalho	-	0	-
1	Projeto de Simulação	0	2	t ₁
2	Treinamento de Pessoal	1	9	t ₂
3	Construção de Instalações Especiais	1	4	t ₂
4	Certificação das Instalações	3,6	1	t ₃
5	Aquisição de Material	1	1	t ₂
6	Aferição dos Instrumentos	5	2	t ₄
7	Teste do Material Adquirido	2,4	3	t ₅
8	Montagem da Cabine de Simulação	7	1	t ₆
9	Execução da Simulação	8	2	t ₇
10	Fim	9	0	t ₈

Tabela 2: Descrição das Atividades

A tabela de atividades pode ser representada pelo grafo da Figura 15. Neste grafo cada atividade é representada por um nó numerado. A esses nós são associados a duração das atividades. Os arcos representam as restrições de precedência. Esse grafo é conhecido como rede orientada por tarefa.

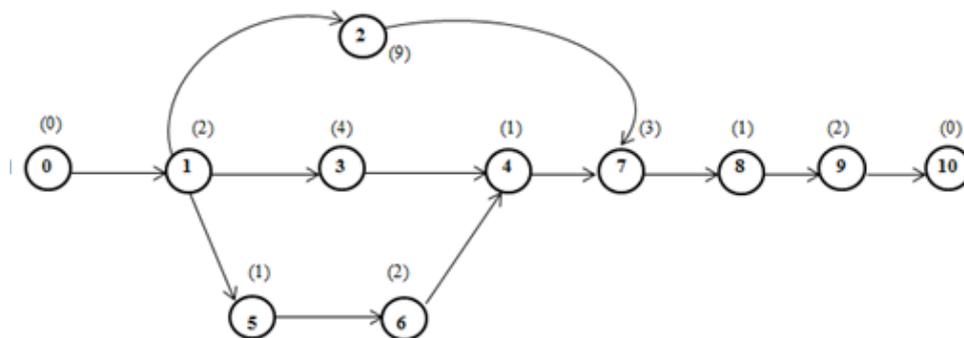


Figura 15: Rede orientada por tarefa.

O problema consiste na determinação do menor tempo de planejamento de um projeto sujeito as restrições de precedência das atividades que serão impostas pelos arcos dos diversos caminhos que ligam o nó 0 ao nó 10. Considerando a atividade 4, certificado das instalações, por exemplo, o tempo menor para a ocorrência dessa atividade deve atender:

$$t_3 \geq t_2 + 4 \text{ (pelo caminho da atividade 3)}$$

$$t_3 \geq t_4 + 2 \text{ (pelo caminho da atividade 6)}$$

De uma forma geral, se t_j é o menor tempo associado a um antecessor de t_i , e d_{ij} é a duração da atividade $i - j$, o tempo t_i é calculado como:

$$t_i \geq t_j + d_{ij}$$

Dessa forma, podemos formular matematicamente como um problema de programação linear.

5.2.1 Formulação Matemática para o Problema do Caminho Crítico

O problema enunciado anteriormente pode ser formulado matematicamente e consiste na determinação de valores não negativos (tempos associados aos arcos) para n variáveis (t_1, t_2, \dots, t_n) de modo a satisfazer um sistema de m equações lineares que minimiza uma função linear Z (real) dessas variáveis.

Minimizar $Z = t_8 - t_1$ sujeito a: (restrições)

$$\left\{ \begin{array}{l} t_2 \geq t_1 + 2 \text{ pelo caminho da atividade 1.} \\ t_3 \geq t_2 + 4 \text{ pelo caminho da atividade 3.} \\ t_3 \geq t_4 + 2 \text{ pelo caminho da atividade 6.} \\ t_4 \geq t_2 + 1 \text{ pelo caminho da atividade 5.} \\ t_5 \geq t_2 + 9 \text{ pelo caminho da atividade 2.} \\ t_5 \geq t_3 + 1 \text{ pelo caminho da atividade 4.} \\ t_6 \geq t_5 + 3 \text{ pelo caminho da atividade 7.} \\ t_7 \geq t_6 + 1 \text{ pelo caminho da atividade 8.} \\ t_8 \geq t_7 + 2 \text{ pelo caminho da atividade 9.} \end{array} \right.$$

$t_1, t_2, \dots, t_n \geq 0$ e inteiros (restrição de não negatividade e integralidade). O sistema linear acima pode ser representado na forma matricial $A_t + S = b$, considerando $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ como a matriz dos coeficientes, $b = [b_1, b_2, \dots, b_m]_{m \times 1}^T$ como vetor de sua mão-direita, $t = [t_1, t_2, \dots, t_n]_{n \times 1}^T$ como o vetor das variáveis de tempo e $s = [s_1, s_2, \dots, s_n]_{n \times 1}^T$ como vetor das variáveis de folga.

O problema apresentado é então formulado matematicamente na forma primal como:

Min $Z = t_8 - t_1$ sujeito a

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 9 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Salientando que a matriz A pode ser escrita através de seus vetores colunas (arcos), $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ ou, podendo representar também um sistema linear através de uma combinação linear como:

$$a_1t_1 + a_2t_2 + \dots + a_nt_n = b$$

O problema primal foi resolvido utilizando o software livre Lindo e encontra-se no anexo 1. Os resultados obtidos foram:

O problema descrito anteriormente não é um problema de fluxo em redes, mas o seu dual sim. Se observarmos as linhas da matriz de restrição do primal notamos que existe apenas uma entrada positiva e uma negativa, o que implica que a matriz transposta de A é a matriz nó-arco de uma rede. Se considerarmos uma variável dual x_{ij} associada a cada linha do problema primal podemos representar as atividades conforme a Tabela 3.

Variável (Atividade)	Atividades	Atividade de Pré-Requisito	Duração
x_{01}	Projeto de Simulação	-	2
x_{12}	Construção de Instalações Especiais	x_{01}	4
x_{13}	Aquisição de Material	x_{01}	1
x_{14}	Treinamento de Pessoal	x_{01}	9
x_{24}	Certificação das Instalações	x_{12}, x_{32}	1
x_{32}	Aferição dos Instrumentos	x_{13}	2
x_{45}	Teste do Material Adquirido	x_{14}, x_{24}	3
x_{56}	Montagem da Cabine de Simulação	x_{45}	1
x_{67}	Execução da Simulação	x_{56}	2

Tabela 3: Exemplo de um programa PERT

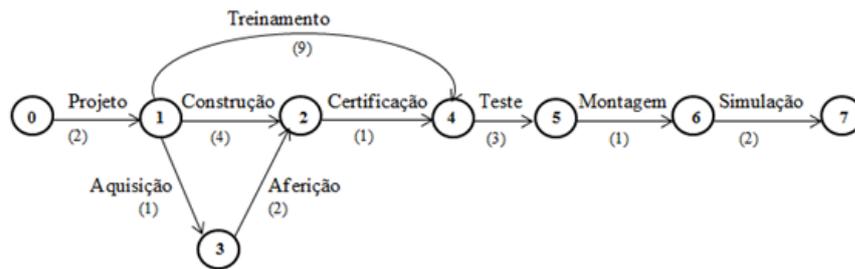


Figura 16: Par primal-dual

O problema de encontrar o maior caminho (caminho crítico) equivale ao problema de achar o menor tempo necessário para cumprir todas as tarefas de uma rede de planejamento.

Podemos expressar o problema dual como:

Max: $W = 2x_{01} + 4x_{12} + x_{13} + 9x_{14} + x_{24} + 2x_{32} + 3x_{45} + x_{56} + 2x_{67}$ s.a

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{01} = 1 \\ -x_{01} + x_{14} + x_{12} + x_{13} = 0 \\ -x_{12} - x_{32} + x_{24} = 0 \\ -x_{13} + x_{32} = 0 \\ -x_{24} - x_{14} + x_{45} = 0 \\ -x_{45} + x_{56} = 0 \\ -x_{56} + x_{67} = 0 \\ -x_{67} = -1 \end{array} \right.$$

Assim ,para o problema dual descrito acima podemos aplicar o algoritmo simplex especializado.

Passo 1: Considerando $x_B = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{18} & x_{32} & x_{24} & x_{45} & x_{56} & x_{67} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $x_N = \begin{bmatrix} x_{12} & x_{14} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, com soluções básicas viáveis.

Passo 2: Quem entra na base

A árvore básica correspondente à solução inicial com suas respectivas variáveis duais é mostrado na figura(17)

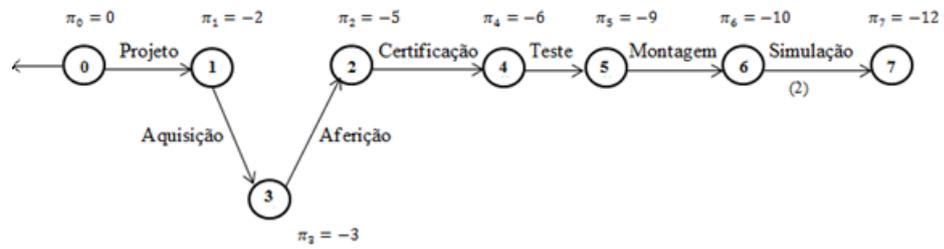


Figura 17: Variáveis duais associadas aos nós.

Determinando os valores de $\pi_F - \pi_T - c_{ij}$ para as variáveis não básicas x_{12} e x_{14} obtemos respectivamente os valores -1 e -5 . Escolhemos a variável x_{14} para entrar na base. Como $x_{14} = 0$ então $\delta \leftarrow 0$

Passo 3: Teste de razão(Quem sai)

A orientação dos arcos no caminho da árvore do arco que entra é $P = \{1, 1, 1\}$ e pode ser observado na (Figura 18)

$$\Delta_1 = \min\{x_{13}, x_{32}, x_{24}\} = 1$$

$$\Delta_2 = \infty$$

$$\Delta_3 = \infty$$

$$\Delta = \min\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\} = 1$$

Escolhemos a variável x_{13} para sair da base

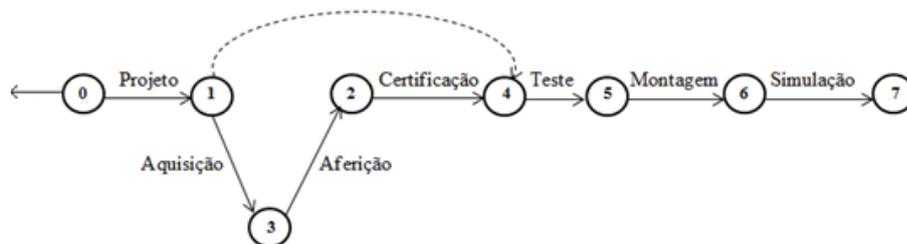


Figura 18: Orientação dos arcos básicos.

Passo 4: Atualização dos fluxos

$$\begin{aligned} x_{14} &\leftarrow 0 + \Delta = 1 \\ x_{13} &\leftarrow 1 - \Delta\delta y_{ij} = 0 \\ x_{32} &\leftarrow 1 - \Delta\delta y_{ij} = 0 \\ x_{24} &\leftarrow 1 - \Delta\delta y_{ij} = 0 \end{aligned}$$

Passo 5: Atualização da árvore e cálculo das variáveis duais.

A árvore básica correspondente à nova solução inicial com suas respectivas variáveis duais são mostrados na Figura 19

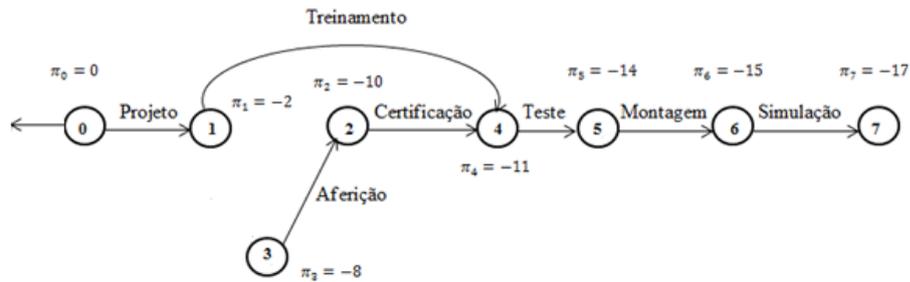


Figura 19: Nova solução inicial básica.

Os valores de $\pi_F - \pi_T - c_{ij}$ para as variáveis não básicas x_{12} e x_{13} são respectivamente os valores 4 e 5 e portanto estamos na solução ótima, com custo igual a 17.

Algumas importantes propriedades ligam os pares primal x dual. A primeira delas diz respeito ao valor de função objetivo quando alcançam os seus valores ótimos. As proposições abaixo mostram esse importante resultado:

Proposição 5.2.1. Se \bar{x} e $\bar{\pi}$ são soluções viáveis dos problemas (P) e (D) respectivamente, então: $c\bar{x} \geq \bar{\pi}b$.

Prova: Sabemos que das restrições do problema primal que $A\bar{x} \geq b$. Se pré-multiplicarmos a expressão por $\bar{\pi}$ temos: $\bar{\pi}A\bar{x} \geq \bar{\pi}b$, uma vez que $\bar{\pi} \geq 0$. Como $A\bar{\pi} \leq c\bar{x}$, uma vez que $\bar{x} \geq 0$. Comparando as expressões (10) e (11) temos: $\bar{\pi}b \leq \bar{\pi}A\bar{x} \leq c\bar{x}$. Portanto, $c\bar{x} \geq \bar{\pi}b$

Proposição 5.2.2. Se \bar{x} e \bar{u} são soluções viáveis dos problemas (P) e (D) respectivamente, satisfazendo a $c\bar{x} = \bar{u}b$, então são soluções ótimas.

Prova: Suponhamos que \bar{x} seja uma solução ótima do primal e $c\bar{x} = \bar{\pi}b$. Se \bar{u} é solução ótima do dual, então, nesse caso, existe x^* tal que $c\bar{x} < \bar{\pi}b$, o que contraria a proposição 1. Suponhamos agora que $\bar{\pi}$ não é solução ótima do dual, mas $c\bar{x} = \bar{\pi}b$, sendo \bar{x} solução ótima do primal. Nesse caso, existirá π^* tal que $\pi^*b > \bar{\pi}b$, e, portanto, $\pi^*b > \bar{x}c$, o que contraria novamente a proposição 1. Logo se não existe x^* e π^* que possam violar as duas suposições anteriores, \bar{x} e $\bar{\pi}$ são soluções ótimas.

O par de problemas primal x dual é também unido através de propriedades mais amplas que ligam seus universos de soluções viáveis.

5.2.2 Teorema

Teorema 5.2.1 (Teorema das Folgas complementares:). Dado um par de programas duais, uma condição necessária e suficiente para que as soluções \bar{x} e $\bar{\pi}$ sejam ótimas é que se verifiquem as seguintes relações de complementaridade de folga:

$$\pi(A\bar{x} - b) = 0$$

$$(c - \pi A)\bar{x} = 0$$

Prova: Sendo \bar{x} e $\bar{\pi}$ soluções viáveis teremos:

$$\begin{cases} A\bar{x} \geq b \therefore A\bar{x} - b \geq 0 \therefore \bar{\pi}(A\bar{x} - b) \geq 0 \\ \bar{\pi}A \leq c \therefore c - \bar{\pi}A \geq 0 \therefore (c - \bar{\pi}A)\bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Fazendo,

$$\begin{cases} \alpha = \bar{\pi}(A\bar{x} - b) \\ \beta = (c - \bar{\pi}A)\bar{x} \end{cases}$$

teremos $\alpha + \beta = \bar{\pi}(A\bar{x} - b) + (c - \bar{\pi}A)\bar{x} = -\bar{\pi}b + c\bar{x} \geq 0$

Se \bar{x} e $\bar{\pi}$ forem soluções ótimas, teremos:

$$\bar{\pi}b = c\bar{x}$$

Logo, $\alpha + \beta = 0$ com $\alpha, \beta \geq 0$, ou seja: $\alpha = \beta = 0$ Assim chegamos finalmente a

$$\begin{cases} \alpha = \bar{\pi}(A\bar{x} - b) = 0 \\ \beta = (c - \bar{\pi}A)\bar{x} = 0 \end{cases}$$

6

Considerações Finais

A ênfase maior desse trabalho foi com relação aos fundamentos matemáticos da teoria que levaram ao desenvolvimento da técnica numérica de solução para os problemas de fluxo em redes. O trabalho científico tem uma contribuição importante porque amplia o elenco de problemas reais que são solucionados através de algoritmos especializados. De uma forma didática, sobre um problema clássico da literatura apresentado por [Goldbarg 2000], aplicamos o algoritmo simplex especializado e detectamos um erro na modelagem e conseqüentemente na solução. Essa observação foi importante no decorrer do trabalho pela discussão feita, tanto em relação à modelagem do problema quanto da aplicação do Teorema das Folgas complementares. Além disso, a formulação do problema do caminho crítico através da programação linear é importante porque além de abordar o conceito de dualidade, o problema pode ser tratado como um problema de fluxo em redes. Em muitas aplicações práticas pode ser interessante a resolução do problema dual de um problema primal pelas propriedades matemáticas que quando devidamente aproveitadas venham contribuir para a eficiência numérica do algoritmo. Salientamos também, a utilização do software livre Lindo na resolução do problema primal pela possibilidade de resolver problemas reais de uma forma mais prática. Finalmente, esperamos que esse trabalho possa ser utilizado como referência para trabalhos futuros, no que diz respeito à resolução de problemas do mundo real com milhares de variáveis, pois estes com certeza precisarão ser de implementados por meio de métodos com base matemática da própria Pesquisa Operacional.

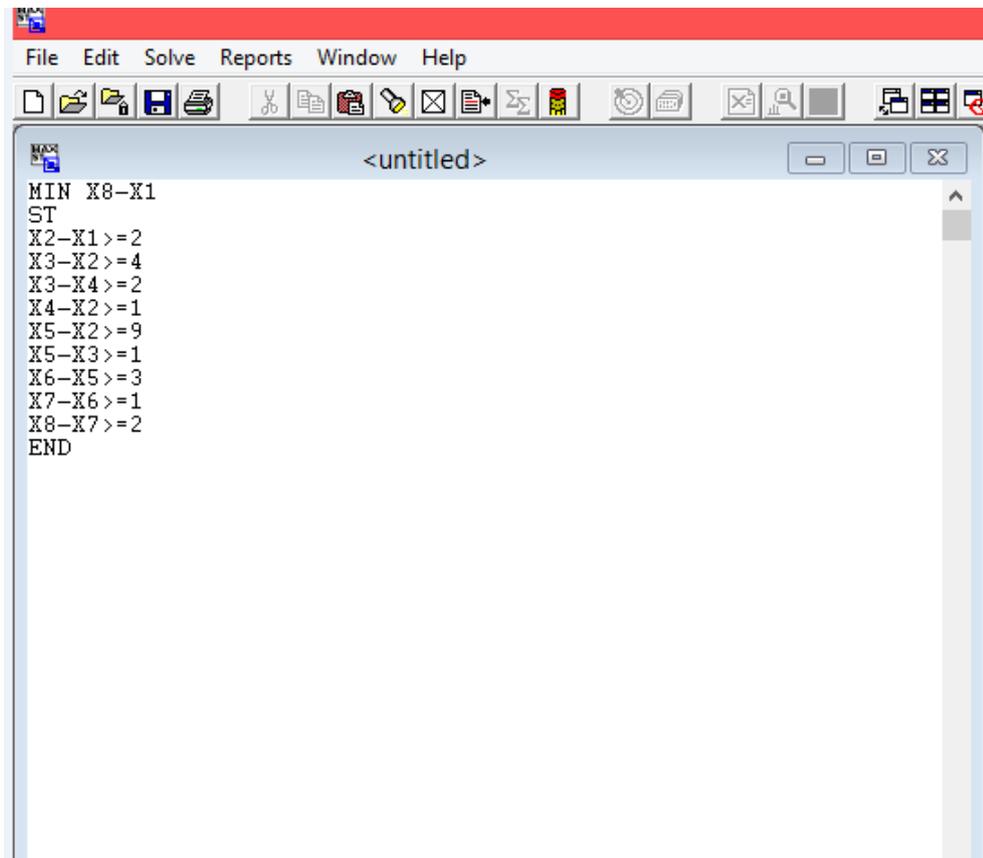
Referências

- Loesch, C. e Hein, N. (1999). "Pesquisa Operacional". Blumenau, Editora da FURB.
- Kennington, J.L.(1980). "Algorithm for Network Programming", New York, John Willey Sons.
- Longaray, A.A, "Introdução à Pesquisa Operacional."
- Machado, C.M.S.(2005). "Um Modelo de Fluxo em Rede para Solução de Problemas de Distribuição de Produtos Compostos", Tese de Doutorado, UFSC.
- Goldbarg, M. C.; Luna, H.P(2000). "Otimização Combinatória e Programação Linear.", Rio de Janeiro, Campus: 2000.
- Cardoso, D.M.(2005). "Optimização Linear". Disponível em:<
<http://arquivoscolar.org/bitstream/arquivo-e/70/4/OL2005.pdf>>. Acesso em 16 abril 2014.
- Luiz, Érika Letícia de Assis. "Otimização da relação tempo custo na construção civil: um estudo de caso"/ Érika Letícia de Assis Luiz; orientador Profº Dr. Marcio Mattos Borges de Oliveira – Ribeirão Preto, 2011. 52f. Disponível em: <<http://dcm.ffclrp.usp.br/man/upload/Erika.pdf>>. Acesso em 10 fev. 2014.
- Nogueira, F., Notas de aula. "PERT/CPM", Disponível em: <http://www.ufrj.br/codep/materialcursos/gerenciamento/gerenciamentotempo/CGP-GT_PERT_CPM_FernandoNogueira.pdf> . Acesso em 7 abril 2014.

Anexos

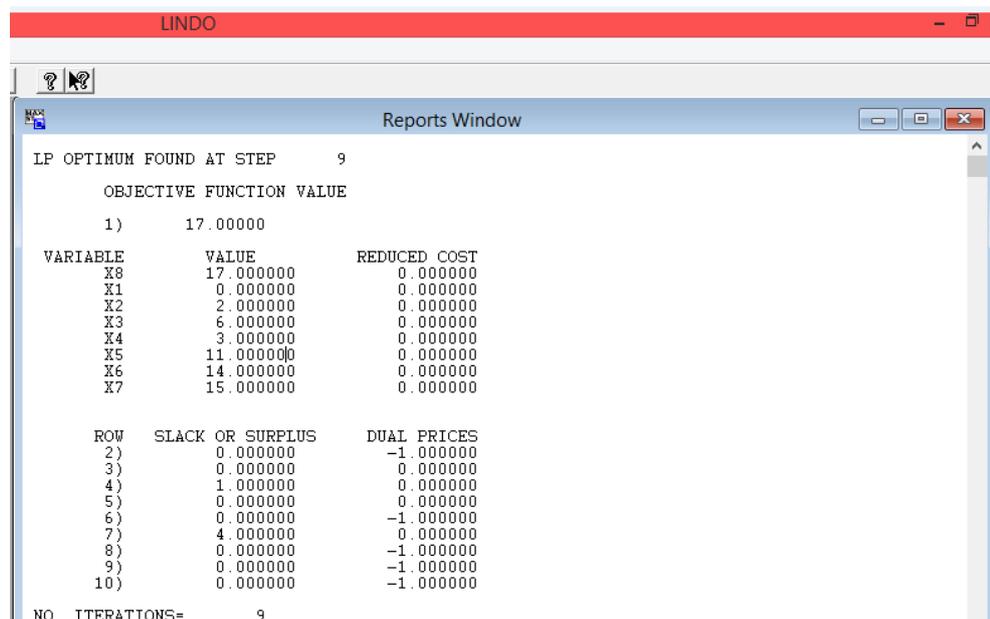
Software Lindo

Utilizamos o software livre LINDO, para resolver um problema de planejamento primal.



```

MAX
<untitled>
MIN X8-X1
ST
X2-X1>=2
X3-X2>=4
X3-X4>=2
X4-X2>=1
X5-X2>=9
X5-X3>=1
X6-X5>=3
X7-X6>=1
X8-X7>=2
END
  
```



LINDO

Reports Window

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 9

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 17.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X8	17.000000	0.000000
X1	0.000000	0.000000
X2	2.000000	0.000000
X3	6.000000	0.000000
X4	3.000000	0.000000
X5	11.000000	0.000000
X6	14.000000	0.000000
X7	15.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	-1.000000
3)	0.000000	0.000000
4)	1.000000	0.000000
5)	0.000000	0.000000
6)	0.000000	-1.000000
7)	4.000000	0.000000
8)	0.000000	-1.000000
9)	0.000000	-1.000000
10)	0.000000	-1.000000

NO. ITERATIONS= 9

LINDO

Reports Window

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X8	1.000000	INFINITY	0.000000
X1	-1.000000	INFINITY	0.000000
X2	0.000000	INFINITY	0.000000
X3	0.000000	INFINITY	0.000000
X4	0.000000	INFINITY	0.000000
X5	0.000000	INFINITY	0.000000
X6	0.000000	INFINITY	0.000000
X7	0.000000	INFINITY	0.000000

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	2.000000	INFINITY	2.000000
3	4.000000	4.000000	1.000000
4	2.000000	1.000000	INFINITY
5	1.000000	1.000000	3.000000
6	9.000000	INFINITY	4.000000
7	1.000000	4.000000	INFINITY
8	3.000000	INFINITY	14.000000
9	1.000000	INFINITY	15.000000
10	2.000000	INFINITY	17.000000

Folgas complementaresMinimizar $Z = t_8 - t_1$

sujeito a: (restrições)

$$\left\{ \begin{array}{l} t_2 - t_1 - 2 = 0 \\ t_3 - t_2 - 4 = 0 \\ t_3 - t_4 - 2 = 0 \\ t_4 - t_2 - 1 = 0 \\ t_5 - t_2 - 9 = 0 \\ t_5 - t_3 - 1 = 0 \\ t_6 - t_5 - 3 = 0 \\ t_7 - t_6 - 1 = 0 \\ t_8 - t_7 - 2 = 0 \end{array} \right.$$

$$z = 17.$$