

Rosaura Dias de Macedo

# **Introdução à Teoria de Fractais e à Derivada Métrica**

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Dezembro, 2015

Rosaura Dias de Macedo

## **Introdução à Teoria de Fractais e à Derivada Métrica**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido por Rosaura Dias de Macedo como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharela em Matemática Aplicada, pelo Curso de Bacharelado em Matemática Aplicada, junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande - FURG.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG  
Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Orientador: Dr. Matheus Jatkoske Lazo

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil  
Dezembro, 2015

Rosaura Dias de Macedo

## **Introdução à Teoria de Fractais e à Derivada Métrica**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido por Rosaura Dias de Macedo como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharela em Matemática Aplicada, pelo Curso de Bacharelado em Matemática Aplicada, junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande-FURG.

Trabalho aprovado.

---

**Dr. Matheus Jatkoske Lazo**  
(Orientador - FURG)

---

**Dr. Antonio Gledson de Oliveira  
Goulart**  
(Avaliador - FURG)

---

**Dr<sup>a</sup>. Fabiana Travessini De Cezaro**  
(Avaliador - FURG)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil  
Dezembro, 2015

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por me permitir conhecer a matemática, por me guiar em todos os momentos e por mais esta vitória.

A minha família, que mesmo após a desistência de dois cursos de graduação, me apoiou na escolha de fazer um curso que eu gostasse.

Aos amigos, que souberam entender as inúmeras vezes que falei "não posso".

Um agradecimento especial ao Marcel que leu cautelosamente e carinhosamente o meu trabalho, sendo crítico e fazendo tudo isso com muita dedicação, além do apoio moral que foi essencial para que eu não desanimasse.

Agradeço a todos os professores que torceram por mim e me auxiliaram ao longo do curso.

Um agradecimento especial aos meus colegas de curso, que fizeram parte desta trajetória, dividindo momentos de descontração, estudos, discussões, experiências e conquistas.

Ao meu professor orientador Matheus, que me auxiliou na elaboração deste trabalho, demonstrando paciência e compreensão, me dando todo o suporte necessário, sendo de suma importância.

E a todos que direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

*“Seu trabalho vai ocupar uma grande parte da sua vida.  
A única maneira de estar verdadeiramente satisfeito é  
fazendo aquilo que você acredita ser um ótimo trabalho.  
E o único jeito de fazer um ótimo trabalho é fazendo algo que você ama.  
Se você ainda não encontrou, continue procurando.”*

*(Steve Jobs)*

# Resumo

Neste trabalho apresentamos uma breve introdução à teoria dos fractais e à derivada métrica. Desde o início do século XX, diversos cientistas e matemáticos verificaram a inabilidade da geometria euclidiana para descrever a forma de nuvens, plumas de chaminés, linhas costeiras, árvores, etc. Esta inabilidade vem do fato de que muitas formas e trajetórias na natureza são tão irregulares e fragmentadas que não podem ser descritas, ou mesmo aproximadas, pelos objetos regulares da geometria euclidiana. No entanto, apesar da enorme complexidade, a maioria destas formas e trajetórias da natureza apresentam, em muitos casos, leis de escala relativamente simples. Estas leis de escala motivaram a introdução do conceito de geometria fractal. Por outro lado, devido a estas irregularidades dos objetos fractais, não podemos utilizar as ferramentas do cálculo clássico para estudar fenômenos naturais descritos por funções que apresentam comportamento fractal. Nas últimas décadas surgiram diversas propostas de extensão dos conceitos do cálculo com grande potencial de aplicação para o estudo de fenômenos e funções fractais. Entre essas extensões vamos estudar neste trabalho as chamadas derivadas métricas.

**Palavras-chaves:** Fractal, derivada métrica, derivada de Hausdorff.

# Abstract

In this work we present a short introduction to the fractal theory and to the metric derivatives. Since the beginning of XX century, several scientists and mathematicians verified the inability of euclidean geometry to describe the shape of clouds, chimney plumes, coastal lines, trees, etc. This inability is due to the fact that most shapes and trajectories in nature are so irregular and fragmented that can not be described, or even approximate, by regular objects of euclidean geometry. However, despite the enormous complexity, the majority of these shapes and trajectories displays, in several cases, relatively simple scaling laws. These scale laws motivated the introduction of the concept of fractal geometry. Moreover, because of these irregularities of fractal objects, we can not make use of the machinery of differential calculus to study natural phenomena described by functions displaying fractal behavior. In past decades emerged several approaches to extend the concepts of calculus with potential to application to study fractal functions and phenomena. Among these approaches, we study in the present work the metric derivatives.

**Key-words:** Fractal, metric derivative, Hausdorff derivative.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Passos na construção da distribuição de massas $\mu$ pela subdivisão repetida. A massa nos conjuntos $\mathcal{E}_k$ é dividida entre os conjuntos $\mathcal{E}_{k+1}$ ; como por exemplo $\mu(U) = \mu(U_1) + \mu(U_2)$ . (retirada de [1]) . . . . .	16
Figura 2 – Construção do conjunto do terço médio de Cantor $F$ , pela remoção repetida do terço médio dos intervalos. Note que $F_L$ e $F_R$ , a parte esquerda e direita de $F$ são cópias de $F$ escalonadas por um fator de $\frac{1}{3}$ . (retirada de [1]) . . . . .	18
Figura 3 – (a) Construção da curva de Koch $F$ . A cada estágio o terço médio de cada segmento é substituído por dois lados de um triângulo equilátero baseado no segmento retirado. (b)Três curvas de Koch colocadas juntas para formar a curva snowflake. (retirada de [1]) . . . . .	20
Figura 4 – Construção do triângulo de Sierpinski ( $\dim_H F = \dim_B F = \log 3 / \log 2$ ) (retirada de [1]) . . . . .	21
Figura 5 – Construção da poeira de Cantor ( $\dim_H F = \dim_B F = 1$ ) (retirada de [1])	21
Figura 6 – Conjunto de Julia (retirada de [1]) . . . . .	22
Figura 7 – Conjunto $F$ e duas $\delta$ -coberturas possíveis para $F$ . O ínfimo do $\sum  U_i ^s$ sobre todas as $\delta$ -coberturas $\{U_i\}$ nos dá $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ . (retirada de [1]) . . . .	23
Figura 8 – Escalonando conjuntos por um fator $\lambda$ aumentamos o comprimento por um fator $\lambda$ , a área por $\lambda^2$ e uma medida de Hausdorff $s$ -dimensional por $\lambda^s$ (retirada de [1]) . . . . .	25
Figura 9 – Gráfico de $\mathcal{H}^s(F)$ em comparação a $s$ para um conjunto $F$ . A dimensão de Hausdorff é o valor de $s$ quando o salto de $\infty$ para 0 ocorre. (retirada de [1]) . . . . .	25
Figura 10 – Gráfico de $w(x)$ com $a = 0.5$ e $b = 3$ . (retirada de [10]) . . . . .	28
Figura 11 – Gráfico da solução da derivada de Hausdorff com $k = a = 1$ , $l_o = 1$ e $\zeta = \frac{1}{2}$ . . . . .	35
Figura 12 – Gráfico da solução da derivada conformable com $k = a = 1$ e $\alpha = \frac{1}{2}$ . .	36
Figura 13 – Gráfico da solução da q-derivada com $k = 1$ , $a = 1$ e $q = \frac{1}{2}$ . . . . .	37

# Sumário

	<b>Agradecimentos</b> . . . . .	<b>3</b>
	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO À TEORIA DE FRACTAIS</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>1.1</b>	<b>Métrica</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>1.2</b>	<b>Medida</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>1.3</b>	<b>Medida e Dimensão de Hausdorff</b> . . . . .	<b>17</b>
1.3.1	Medida de Hausdorff . . . . .	23
1.3.2	Dimensão de Hausdorff . . . . .	24
<b>2</b>	<b>INTRODUÇÃO À DERIVADA MÉTRICA</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>2.1</b>	<b>Relação entre derivada métrica e meios fractais</b> . . . . .	<b>32</b>
<b>2.2</b>	<b>Exemplos de aplicação</b> . . . . .	<b>34</b>
<b>3</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>38</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>39</b>

# Introdução

Em 1975 Benôit Mandelbrot publicou “Os objetos fractais: forma, acaso e dimensão”, onde expôs suas ideias desenvolvidas desde 1962 sobre uma geometria capaz de descrever com precisão as irregularidades da natureza. Desde o início do século XX, diversos cientistas e matemáticos verificaram a inabilidade da geometria euclidiana para descrever a forma de nuvens, fumaças de chaminés, linhas costeiras, árvores, etc [8, 13]. Esta inabilidade vem do fato que muitas formas e trajetórias na natureza são tão irregulares e fragmentadas que não podem ser descritas, ou mesmo aproximadas, pelos objetos regulares da geometria euclidiana (linhas, círculos, planos, etc.). No entanto, apesar da enorme complexidade, a maioria destas formas e trajetórias da natureza apresentam em muitos casos, leis de escala relativamente simples [8, 13]. Estas leis de escala é o que motivou a introdução do conceito de geometria fractal.

Os fractais são objetos matemáticos que descrevem formas irregulares infinitamente complexas, mas que são invariantes por uma transformação de escala. Além disso, os fractais são úteis para o estudo do movimento browniano, a turbulência de fluidos, a rugosidade da superfície de certos materiais, a porosidade de certas rochas, etc. Hoje sabemos que muitos fenômenos naturais como condições de tempo, fluxo de fluidos turbulentos e arritmias cardíacas e cerebrais apresentam comportamento fractal [7]. Os fractais apresentam propriedades e características muito peculiares. Entre estas peculiaridades temos que o gráfico de funções fractais apresenta propriedades muito diferentes das de curvas geométricas habituais, mostrando auto-similaridade, estrutura fina, simplicidade da lei de formação e dimensão não inteira [2].

Devido a estas irregularidades encontradas na natureza e nos objetos fractais, não podemos utilizar as ferramentas do cálculo clássico para estudar fenômenos naturais descritos por funções que apresentam comportamento fractal. Um exemplo é a função de Weierstrass que descreve com boa aproximação as plumas de chaminé [13]. Esta função, embora contínua em todos os pontos da reta real, é não diferenciável em todos os pontos. Por outro lado, nas últimas décadas surgiram diversas propostas de extensão dos conceitos do cálculo com grande potencial de aplicação para o estudo de fenômenos e funções fractais. Entre essas extensões vamos estudar neste trabalho as chamadas derivadas métricas. Essas derivadas métricas são generalizações naturais da derivada usual, mas podem ser aplicadas em um conjunto maior de funções, incluindo algumas classes funções não diferenciáveis.

Para funções diferenciáveis, as derivadas métricas contém, como caso especial, diversas formulações de derivadas deformadas importantes. Entre elas podemos destacar

a derivada de Hausdorff, que surge no mapa de domínios fractais para o contínuo; a q-derivada, que foi proposta para o estudo de sistemas complexos na mecânica estatística; e o cálculo conformable, que é uma definição muito recente de derivada fracionária [11].

Neste trabalho estudamos a teoria básica dos fractais e das derivadas métricas, tendo como objetivo o estudo de futuras aplicações na dinâmica de fenômenos naturais com estrutura fractal.

No capítulo 1, apresentamos uma breve introdução à teoria de fractais, para isso estudamos o conceito de métrica e apresentamos alguns exemplos, como a métrica "zero-um", a métrica induzida, a métrica euclidiana na reta, no  $\mathbb{R}^n$ . Também apresentamos o conceito de medida e alguns exemplos, como a medida de contagem, ponto de massa, a medida de Lebesgue, a distribuição de massa uniforme em um segmento de reta, e restrição de uma medida. Finalmente apresentamos a definição de medida e dimensão de Hausdorff e apresentamos alguns exemplos clássicos, como o conjunto de Cantor, a curva de Koch, o triângulo de Sierpinski, a poeira de cantor e o conjunto de Julia.

No capítulo 2, apresentamos a definição de derivada métrica e algumas de suas propriedades, e discutimos a questão da função de Weierstrass que não é derivável e possui gráfico fractal. Também mostramos que a derivada métrica contém, como caso especial, a derivada de Hausdorff, a derivada conformable e a q-derivada. Para concluir o trabalho apresentamos um exemplo de aplicação resolvendo a equação do crescimento populacional.

Finalmente, no capítulo 3 apresentamos nossas conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

# 1 Introdução à Teoria de Fractais

Apresentamos neste capítulo uma breve introdução à teoria dos fractais [1, 2, 8, 9], as definições de métrica e medida [3, 5, 1], e os conceitos de dimensão e medida de Hausdorff [1].

Objetos fractais têm estrutura muito complexa para serem estudados pelos métodos clássicos da geometria analítica e do cálculo, para estudá-los é necessária a definição de novos conceitos, como o de dimensão de Hausdorff, e o uso de novas áreas da matemática. Entre essas novas áreas está o cálculo fracionário e as derivadas deformadas, nos últimos anos houve um crescimento muito grande do uso do cálculo fracionário e derivadas deformadas para o estudo de funções e problemas definidos em domínios fractais.

## 1.1 Métrica

Estamos familiarizados com o espaço Euclidiano  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ , onde  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$  é o conjunto de números reais na reta real,  $\mathbb{R}^2$  é o plano. Os pontos no  $\mathbb{R}^n$  são denotados pelas letras  $x$  e  $y$ , na forma de coordenadas como  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . Nestes espaços costumamos utilizar do conceito de distância, ou métrica, Euclidiana, e o conceito de medida. A métrica e a medida Euclidiana estão relacionadas à conceitos da geometria Euclidiana. Sejam  $x$  e  $y$  pontos no  $\mathbb{R}^n$ , a distância entre eles é dada por  $|x - y| = \sqrt{(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2)}$ . Por outro lado, a medida está relacionada a dimensão de subconjuntos do  $\mathbb{R}^n$ , chamamos  $\mu$  a medida em  $\mathbb{R}^n$ .

Uma métrica em um conjunto  $M$  é uma função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ , que associa a cada par ordenado de elementos de  $x, y \in M$  um número real positivo  $d(x, y)$ , chamado distância de  $x$  a  $y$ , de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas para quaisquer  $x, y, z \in M$ :

- 1)  $d(x, y) \geq 0$  se  $x \neq y$  e  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
- 2)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- 3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

A condição 1) diz que  $d(x, y)$  é sempre positiva, e se anula se, e somente se  $x = y$ . A condição 2) afirma que a distância  $d(x, y)$  é uma função simétrica das variáveis  $x, y$ . A condição 3) é chamada de *desigualdade triangular* e se inspira na geometria euclidiana, onde cada lado de um triângulo tem medida menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

Um *espaço métrico* é um par  $(M, d)$ , onde  $M$  é um conjunto e  $d$  uma métrica em  $M$ . Os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, etc. Vejamos agora alguns exemplos de espaços métricos.

**Exemplo 1: A métrica "zero-um"**

Qualquer conjunto  $M$  pode tornar-se um espaço métrico de maneira muito simples. Basta definir a métrica  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  pondo  $d(x, y) = 0$  se  $x = y$  e  $d(x, y) = 1$  se  $x \neq y$ . As condições 1) a 3) são verificadas.

**Exemplo 2: Subespaço, métrica induzida**

Se  $(M, d)$  é um espaço métrico, todo subconjunto  $S \subset M$  pode ser considerado como um espaço métrico: basta considerar a restrição de  $d$  a  $S \times S$ , ou seja, usar entre os elementos de  $S$  a mesma distância que eles possuíam como elementos de  $M$ . Quando fazemos isto,  $S$  chama-se um *subespaço* de  $M$  e a métrica de  $S$  *induzida* pela de  $M$ .

**Exemplo 3: A métrica euclidiana na reta**

O conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais munido da métrica euclidiana (métrica da reta), é o exemplo mais importante de espaço métrico. A distância entre dois pontos  $x, y \in \mathbb{R}$  é dada por  $d(x, y) = |x - y|$ . As condições 1) a 3) resultam imediatamente das propriedades elementares do valor absoluto de números reais. Esta é a chamada "métrica usual" da reta.

**Exemplo 4: O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$**

Este exemplo generaliza o anterior. Os pontos de  $\mathbb{R}^n$  são as listas  $x = (x_1, \dots, x_n)$  onde cada uma das  $n$  coordenadas de  $x_i$  é um número real. Há três maneiras de definir a distância entre dois pontos em  $\mathbb{R}^n$ . Dados  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , escrevemos:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2},$$

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \text{ e}$$

$$d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

A métrica  $d$  é chamada métrica euclidiana e se baseia no conceito geométrico de distância entre dois pontos no espaço usual. As métricas  $d'$  e  $d''$ , são métricas sobre o  $\mathbb{R}^n$ , vamos verificar o axioma 3). Neste caso precisamos estabelecer primeiro a *desigualdade de Cauchy-Schwarz* no  $\mathbb{R}^n$ :

Se  $x_1, \dots, x_n$  e  $y_1, \dots, y_n$  são números reais arbitrários, então

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}$$

Vejam os. A desigualdade  $2rs \leq r^2 + s^2$  é verdadeira para qualquer  $r, s \in \mathbb{R}$  uma vez que  $(r - s)^2 = r^2 - 2rs + s^2 \geq 0$ . Assim, se fizermos  $p = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  e  $q = \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$ , é verdadeira a relação

$$2 \cdot \frac{|x_i|}{p} \cdot \frac{|y_i|}{q} \leq \frac{x_i^2}{p^2} + \frac{y_i^2}{q^2}$$

para qualquer  $i (1 \leq i \leq n)$ . Somando em relação ao índice  $i$  teremos:

$$\frac{2}{p \cdot q} \sum |x_i y_i| \leq 1 + 1$$

e portanto

$$\sum |x_i y_i| \leq p \cdot q = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$$

que é a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Agora podemos provar a desigualdade triangular no que se refere a  $d$ .

Sejam  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  e  $z = (z_1, \dots, z_n)$  pontos no  $\mathbb{R}^n$ . Então:

$$\begin{aligned} [d(x, y)]^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = \sum (x_i - z_i + z_i - y_i)^2 = \\ &= \sum (x_i - z_i)^2 + 2 \sum (x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum (z_i - y_i)^2 \leq \\ &\leq \sum (x_i - z_i)^2 + 2 \left[ \sum (x_i - z_i)^2 \right]^{1/2} \left[ \sum (z_i - y_i)^2 \right]^{1/2} + \sum (z_i - y_i)^2 = \\ &\left[ \sqrt{\sum (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum (z_i - y_i)^2} \right]^2 = [d(x, z) + d(z, y)]^2 \end{aligned}$$

onde  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

## 1.2 Medida

O conceito de medida está relacionada a noção de tamanho, ou dimensão, de subconjuntos do  $\mathbb{R}^n$ , chamamos  $\mu$  a medida em  $\mathbb{R}^n$ , tal que:

- a)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- b)  $\mu(A) \leq \mu(B)$  se  $A \subset B$ ;
- c) Se  $A_1, A_2, \dots$  formam uma sequência enumerável (ou finita) de conjuntos então

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (1.1)$$

se  $A_i$  for um conjunto disjunto então 1.1 se torna uma igualdade

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (1.2)$$

Chamamos de  $\mu(A)$  a medida do conjunto  $A$  onde  $\mu(A)$  é o tamanho do conjunto  $A$  medido por algum caminho. A condição (a) nos diz que a medida do conjunto vazio é nula, a condição (b) nos diz que a medida do conjunto  $A$  é menor que a do conjunto  $B$  se  $A$  estiver contido em  $B$ , e (c) nos diz que a medida da união dos conjuntos é menor que o somatório da medida dos conjuntos, se eles forem disjuntos então temos uma igualdade.

**Exemplo 1: A medida de contagem**

Para cada subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ , considere que  $\mu(A)$  é o número de pontos em  $A$  se  $A$  é finito, e  $\infty$  se for infinito. Então  $\mu$  é uma medida em  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 2: Ponto de massa**

Considere  $a$  um ponto do  $\mathbb{R}^n$  e defina  $\mu(A)$  sendo 1 se  $A$  contém  $a$ , e 0 caso contrário. Então  $\mu$  é a distribuição de massa considerada como um ponto de massa concentrado em  $a$

**Exemplo 3: Medida de Lebesgue no  $\mathbb{R}$**

A medida de Lebesgue  $\mathcal{L}^1$  amplia a ideia de comprimento de uma grande coleção de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que inclui o conjunto de Borel. Para intervalos abertos e fechados temos que  $\mathcal{L}^1(a, b) = \mathcal{L}^1[a, b] = b - a$ . Se  $A = \cup_i [a_i, b_i]$  é uma união finita ou contável de intervalos disjuntos, consideramos que  $\mathcal{L}^1(A) = \sum (b_i - a_i)$  é o comprimento de  $A$  através da soma do comprimento dos intervalos. Isso nos leva a definição da medida de Lebesgue  $\mathcal{L}^1(A)$  para um conjunto  $A$  arbitrário. Definimos:

$$\mathcal{L}^1(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \right\}$$

ou seja, olhamos para todas as coberturas de  $A$  através de coleções de conjuntos contáveis e pegamos o menor comprimento possível. A medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}$  é o comprimento euclidiano, e podemos escrever o comprimento ( $A$ ) como  $\mathcal{L}^1(A)$ .

**Exemplo 4: Medida de Lebesgue no  $\mathbb{R}^n$**

Se  $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$  é um conjunto contido em um paralelepípedo no  $\mathbb{R}^n$ , o volume  $n$ -dimensional é dado por

$$vol^n(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$

No exemplo 3  $vol^1$  é o comprimento, assim como o  $vol^2$  é a área e o  $vol^3$  é o volume tridimensional. Então a medida de Lebesgue  $n$ -dimensional  $\mathcal{L}^n$  pode ser vista como uma extensão do volume  $n$ -dimensional para uma grande classe de conjuntos. No exemplo 3 obtemos a medida no  $\mathbb{R}^n$  definida como:

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} vol^n(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

onde tomamos o ínfimo sobre todas as coberturas de  $A$  por paralelepípedos. Obtemos que  $\mathcal{L}^n = \text{vol}^n(A)$  se  $A$  é um paralelepípedo ou, de fato, qualquer conjunto para o qual o volume pode ser determinado pelas regras usuais de mensuração. Algumas vezes podemos escrever a área ( $A$ ) como  $\mathcal{L}^2(A)$ , o volume  $A$  como  $\mathcal{L}^3(A)$  e o  $\text{vol}^n(A)$  para  $\mathcal{L}^n(A)$

**Exemplo 5: Distribuição de massa uniforme em um segmento de reta**

Considere  $L$  um segmento de reta unitário no plano. Defina  $\mu(A) = \mathcal{L}^1(L \cap A)$ , isto é, o comprimento da intersecção de  $A$  com  $L$ , então  $\mu$  é a distribuição de massa com suporte  $L$ , desde que  $\mu(A) = 0$  se  $A \cap L = \emptyset$ . Podemos pensar  $\mu$  como massa unitária espalhada uniformemente ao longo do segmento de reta  $L$ .

**Exemplo 6: Restrição de uma medida**

Primeiramente, precisamos mencionar uma classe de conjuntos, o conjunto de Borel, que é o mais pequeno conjunto de subconjuntos do  $\mathbb{R}^n$  com as seguinte propriedades:

- a) Todo conjunto aberto e fechado é um conjunto de Borel.
- b) Toda união ou intersecção de coleções de conjuntos de Borel finitos ou contáveis, é um conjunto de Borel.

Agora considere  $\mu$  a medida em  $\mathbb{R}^n$  e  $E$  um subconjunto de Borel no  $\mathbb{R}^n$ . Definimos a medida  $\nu$  no  $\mathbb{R}^n$  e chamamos de restrição de  $\mu$  para  $E$ , sendo  $\nu(A) = \mu(E \cap A)$  para cada subconjunto  $A$ . Então  $\nu$  é a medida no  $\mathbb{R}^n$  com suporte contido em  $\overline{E}$

Na próxima seção iremos definir a medida de Hausdorff  $s$ -dimensional  $\mathcal{H}^s$  nos subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , onde  $0 \leq s \leq n$ . Estas medidas são a generalização das medidas de Lebesgue em dimensões que não são necessariamente inteiras. O método a seguir é utilizado para construir a distribuição de massa em um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Isto envolve a subdivisão repetida da massa entre partes de um conjunto limitado de Borel  $E$ . Considere que  $\mathcal{E}_0$  consiste no único conjunto  $E$ . Para  $k = 1, 2, \dots$  consideramos  $\mathcal{E}_k$  como a coleção de subconjuntos disjuntos de Borel de  $E$  os quais para cada conjunto  $U$  em  $\mathcal{E}_k$  está contido um dos conjuntos  $\mathcal{E}_{k-1}$  e contém um número finito de conjuntos em  $\mathcal{E}_{k+1}$ . Assumimos que o diâmetro máximo do conjunto em  $\mathcal{E}_k$  tende a 0 quando  $k \rightarrow \infty$ . E definimos a distribuição de massa em  $E$  pela subdivisão repetida (ver figura 1).

Consideramos que  $\mu(E)$  satisfaz  $0 < \mu(E) < \infty$ , e dividimos a massa entre os conjuntos  $U_1, \dots, U_m$  em  $\mathcal{E}_1$  ao definir  $\mu(U_i)$  de tal maneira que  $\sum_{i=1}^m \mu(U_i) = \mu(E)$ . Similarmente, atribuímos massas para os conjuntos de  $\mathcal{E}_2$  de forma que  $U_1, \dots, U_m$  sejam conjuntos de  $\mathcal{E}_2$  contidos em um conjunto de  $U$  de  $\mathcal{E}_1$ , então  $\sum_{i=1}^m \mu(U_i) = \mu(U)$ . Em geral distribuimos massas de forma que

$$\sum_i \mu(U_i) = \mu(U) \tag{1.3}$$

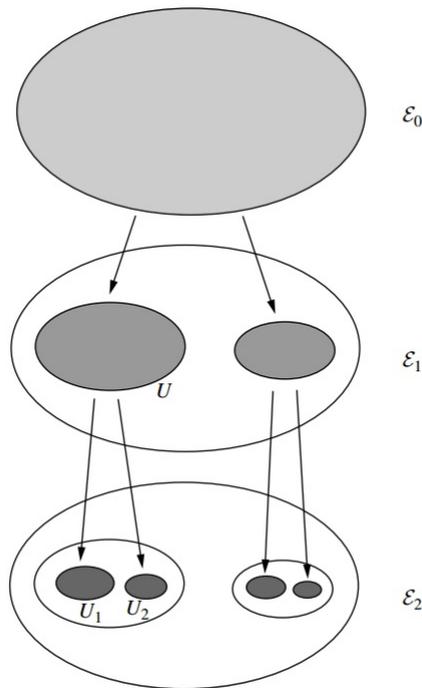


Figura 1 – Passos na construção da distribuição de massas  $\mu$  pela subdivisão repetida. A massa nos conjuntos  $\mathcal{E}_k$  é dividida entre os conjuntos  $\mathcal{E}_{k+1}$ ; como por exemplo  $\mu(U) = \mu(U_1) + \mu(U_2)$ . (retirada de [1])

para cada conjunto  $U$  de  $\mathcal{E}_k$ , onde os  $U_i$  são conjuntos disjuntos de  $\mathcal{E}_{k+1}$  contidos em  $U$ . Para cada  $k$ , consideramos  $E_k$  como a união dos conjuntos em  $\mathcal{E}_k$ , e definimos  $\mu(A) = 0$  para todo  $A$  com  $A \cap E_k = \emptyset$ .

Considere que  $\mathcal{E}$  denota a coleção de conjuntos que pertencem a  $\mathcal{E}_k$  para algum  $k$  junto com os subconjuntos de  $\mathbb{R}^n \setminus E_k$ . O procedimento acima define a massa  $\mu(A)$  para cada conjunto  $A$  em  $\mathcal{E}$ , e parece razoável que, através da construção de conjuntos em  $\mathcal{E}$ , especificamos o suficiente sobre a distribuição de massa  $\mu$  através  $E$  para determinar  $\mu(A)$  para qualquer conjunto (Borel)  $A$ . É o caso, como a seguinte proposição que segue.

**Proposição 1:** Considere  $\mu$  definido em uma coleção de conjuntos  $\mathcal{E}$  como acima. Então a definição de  $\mu$  pode ser estendida para todo subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  de maneira que  $\mu$  se torne uma medida. O valor de  $\mu(A)$  é unicamente determinado se  $A$  é um conjunto de Borel. O suporte de  $\mu$  está contido em  $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{E}_k$ .

Prova: Se  $A$  é qualquer subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , considere:

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_i \mu(U_i) : A \subset \bigcup_i U_i \in \mathcal{E} \right\} \tag{1.4}$$

Assim que tomamos o menor valor possível de  $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i)$ , onde os conjuntos  $U_i$  estão em  $\mathcal{E}$  e são cobertura de  $A$ , podemos definir  $\mu(U_i)$  para cada  $U_i$ . Se  $A$  é um conjunto em  $\mathcal{E}$ , então 1.4 se reduz a massa  $\mu(A)$  especificada na construção. E completa a prova o

fato de que  $\mu$  satisfaz todas as condições de medida e que seus valores nos conjuntos de  $\mathcal{E}$  determinam seus valores nos conjuntos de Borel envolvidos. Desde que  $\mu(\mathbb{R}^n \setminus E_k) = 0$ , temos que  $\mu(A) = 0$  se  $A$  é um conjunto aberto que não intercepta  $E_k$  para algum  $k$ , então o suporte de  $\mu$  está em  $\mathcal{E}_k$  para todo  $k$ .

**Exemplo 7:**

Considere que  $\mathcal{E}_k$  denota a coleção de intervalos binários de comprimento  $2^{-k}$  da forma  $[r2^{-k}, (r+1)2^{-k}]$  onde  $0 \leq r \leq 2^k - 1$ . Se tomarmos  $\mu[r2^{-k}, (r+1)2^{-k}] = 2^{-k}$  na construção acima, temos que  $\mu$  é a medida de Lebesgue em  $[0, 1]$ .

Nota: Seja  $I$  um intervalo em  $\mathcal{E}_k$  de comprimento  $2^{-k}$  e  $I_1, I_2$  são dois subintervalos de  $I$  em  $\mathcal{E}_{k+1}$  de comprimento  $2^{-(k+1)}$  temos  $\mu(I) = \mu(I_1) + \mu(I_2)$ . Pela proposição 1,  $\mu$  estende-se para a distribuição de massa em  $[0, 1]$ . Temos que  $\mu(i) = \text{comprimento}(I)$  para  $I$  em  $\mathcal{E}$ , isto implica que  $\mu$  coincide com a medida de Lebesgue em qualquer conjunto.

### 1.3 Medida e Dimensão de Hausdorff

Até o final do século XIX, os matemáticos preocuparam-se com conjuntos e funções que os métodos clássicos do cálculo pudessem ser aplicados. Conjuntos e funções que não fossem suficientemente suaves ou regulares costumavam ser ignorados. Mas recentemente esta atitude mudou, muitos estudos e descobertas têm sido feitas sobre a matemática dos objetos não suaves. Além disso, os conjuntos irregulares fornecem uma melhor representação de muitos fenômenos naturais, do que as figuras da geometria clássica. Neste contexto, a geometria fractal fornece uma estrutura geral para o estudo de tais conjuntos irregulares. Vamos começar olhando brevemente alguns exemplos simples de fractais e suas estruturas.

O conjunto do terço médio de Cantor é o fractal mais conhecido e o de mais simples construção, mesmo assim ele exibe muitas características não usuais, típicas dos fractais. Ele é construído a partir de um intervalo unitário, por uma sequência de operações de eliminação (ver figura 2).

Seja  $E_0$  o intervalo  $[0, 1]$ . Seja  $E_1$  o conjunto obtido após deletarmos o terço médio de  $E_0$ , então  $E_1$  consiste de dois intervalos  $[0, \frac{1}{3}]$  e  $[\frac{2}{3}, 1]$ . Deletando o terço médio destes dois intervalos obtemos  $E_2$ , o qual contém 4 intervalos  $[0, \frac{1}{9}]$ ,  $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$ ,  $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ ,  $[\frac{8}{9}, 1]$ . Seguimos este processo, até  $E_k$ , que é obtido retirando os terços médios de cada intervalo de  $E_{k-1}$ . Então  $E_k$  consiste de  $2^k$  intervalos, cada um com comprimento  $3^{-k}$ . O conjunto do terço médio de Cantor  $F$  consiste dos números que estão em  $E_k$  para todo  $k$ ; matematicamente  $F$  é a intersecção  $\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ . O conjunto de Cantor  $F$  pode ser pensado como o limite da sequência de conjuntos  $E_k$  quando  $k$  tende a infinito.

De relance parece que retiramos muito do intervalo  $[0, 1]$  durante a construção

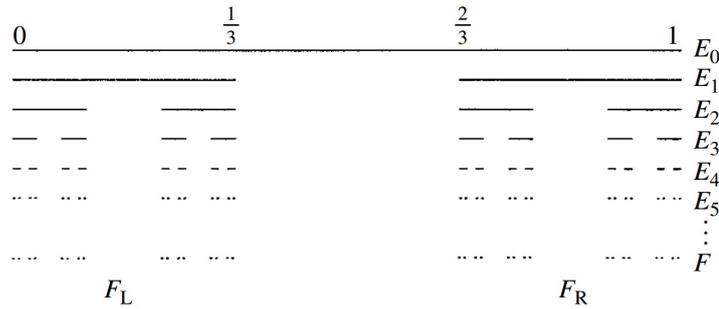


Figura 2 – Construção do conjunto do terço médio de Cantor  $F$ , pela remoção repetida do terço médio dos intervalos. Note que  $F_L$  e  $F_R$ , a parte esquerda e direita de  $F$  são cópias de  $F$  escalonadas por um fator de  $\frac{1}{3}$ . (retirada de [1])

de  $F$ , e que nada permanece. Mas  $F$  é um conjunto infinito e incontável, que contém infinitos números na vizinhança de cada um de seus pontos. O conjunto do terço médio de Cantor  $F$  consiste precisamente desses números em  $[0, 1]$  cuja expansão em base 3 não contém o dígito 1, ou seja, todos os números  $a_13^{-1} + a_23^{-2} + a_33^{-3} + \dots$  com  $a_i = 0$  ou 2 para cada  $i$ . Para ver isto, note que para chegarmos em  $E_1$  de  $E_0$  removemos todos os números com  $a_i = 1$ , e de  $E_1$  para  $E_2$  removemos todos os números com  $a_2 = 1$ , e assim por diante. Vamos listar algumas características do conjunto do terço médio de Cantor  $F$ , como veremos, características similares são encontradas em muitos fractais.

- (i)  $F$  é auto-similar. As partes de  $F$  nos intervalos  $[0, \frac{1}{3}]$  e  $[\frac{2}{3}, 1]$  são geometricamente similares a  $F$ , escalonado por um fator de  $\frac{1}{3}$ . E novamente, as partes de  $F$  nos quatro intervalos de  $E_2$  são similares a  $F$ , mas escalonados por um fator de  $\frac{1}{9}$  e assim por diante. O conjunto de Cantor contém cópias de si mesmo em diferentes escalas.
- (ii) O conjunto  $F$  contém uma estrutura fina, isto é, contém detalhes em escalas pequenas. Quanto mais aumentarmos a imagem do conjunto de Cantor, mais intervalos se tornam aparentes.
- (iii) Embora  $F$  tenha uma estrutura detalhada, a definição atual de  $F$  é bem direta.
- (iv)  $F$  é obtido por um procedimento de repetição. Sua construção consiste em remover repetidamente o terço médio dos intervalos. As etapas sucessivas nos dão boas aproximações de  $E_k$  para o conjunto  $F$ .
- (v) A geometria de  $F$  não é facilmente descrita em termos clássicos: não é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem alguma condição geométrica simples, nem é o conjunto de soluções de qualquer equação simples.

- (vi) É difícil descrever a geometria local de  $F$ : perto de cada um de seus pontos, há um grande número de pontos, separados por intervalos de comprimentos variados.
- (vii) Embora  $F$  seja de certa forma um conjunto grande, o seu tamanho não é quantificável pelos meios habituais. Obtemos o comprimento restante em cada nível como a soma dos comprimentos dos segmentos que permanecem:

$$\text{nível 0: } l_0 = 1$$

$$\text{nível 1: } l_1 = 2/3$$

$$\text{nível 2: } l_2 = 4/9$$

$$\text{nível 3: } l_3 = 8/27$$

.....

$$\text{nível } k: l_k = (2/3)^k$$

de modo que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} l_k = 0$$

ou seja, o comprimento restante tende a se anular quando  $k \rightarrow \infty$ .

Nosso próximo exemplo é a curva de Koch (ver figura 3). Seja  $E_0$  um segmento de reta unitário. O conjunto  $E_1$  consiste de 4 segmentos obtidos pela remoção do terço médio de  $E_0$  e substituindo-o por dois lados de um triângulo equilátero com base no segmento removido. Construimos  $E_2$  aplicando o mesmo procedimento para cada segmento em  $E_1$  e assim por diante. Então  $E_k$  é obtido substituindo o terço médio de cada segmento de  $E_{k-1}$  por dois lados de um triângulo equilátero. Quando  $k$  é grande, a curva  $E_{k-1}$  e  $E_k$  diferem apenas em detalhes finos, e quando  $k$  tende a infinito, a sequência de curvas poligonais  $E_k$  aproxima-se da curva limitada  $F$ , chamada curva de Koch.

A curva de Koch contém características muito semelhantes aquelas listadas para o terço médio de Cantor. É constituída de partes, cada uma semelhante a anterior, mas reduzida por um fator de escala  $\frac{1}{3}$ . A estrutura fina é refletida nas irregularidades em todas as escalas; mesmo assim a estrutura intrincada deriva de uma construção simples. Enquanto podemos chamar  $F$  de curva, é muito irregular para ter tangentes no sentido clássico. Um simples cálculo nos mostra que o comprimento de  $E_k$  é dado por  $(\frac{4}{3})^k$ , sendo que  $k$  tendendo ao infinito implica que  $F$  tem comprimento infinito. Por outro lado,  $F$  ocupa uma área nula no plano, por isso nem a área nem o comprimento nos dão uma descrição muito útil a respeito do tamanho de  $F$ .

Muitos outros conjuntos podem ser construídos a partir do procedimento de repetição. Por exemplo o triângulo de *Sierpinski* que é obtido pela remoção repetida de triângulos equiláteros de um triângulo equilátero inicial com lado de comprimento unitário

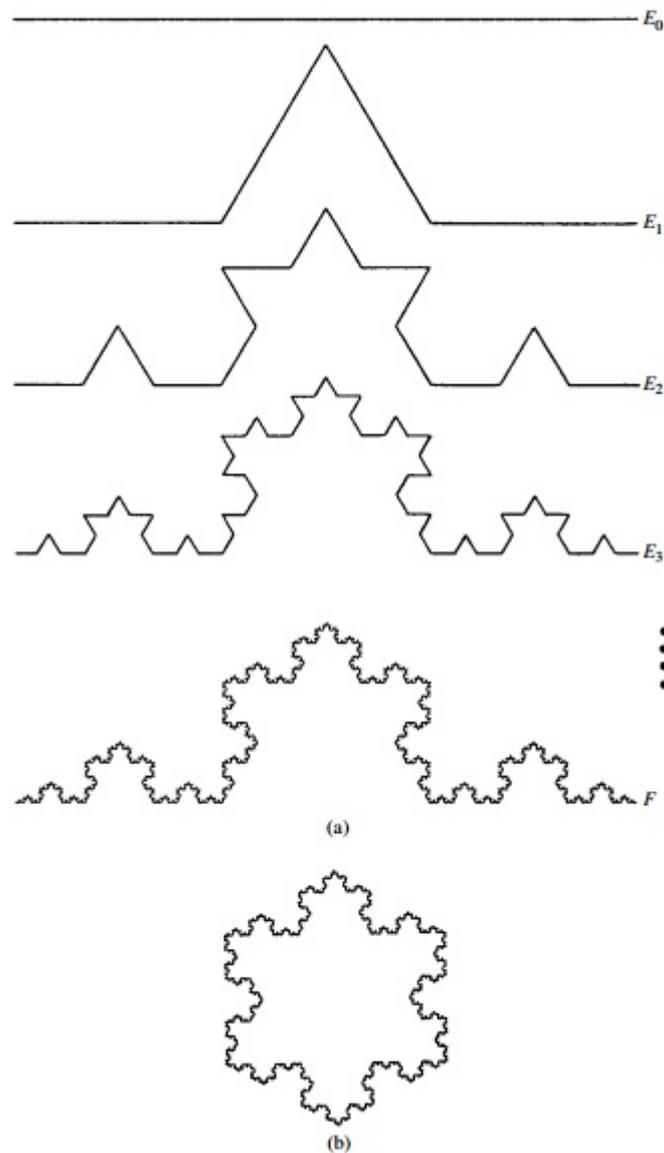


Figura 3 – (a) Construção da curva de Koch  $F$ . A cada estágio o terço médio de cada segmento é substituído por dois lados de um triângulo equilátero baseado no segmento retirado. (b) Três curvas de Koch colocadas juntas para formar a curva snowflake. (retirada de [1])

(ver figura 4) .(Podemos pensar este procedimento como a substituição repetida de um triângulo equilátero por três triângulos com metade da altura).

Um plano análogo ao conjunto de Cantor a poeira de Cantor ( ver figura 5). Em cada estágio, cada quadrado restante é dividido em 16 quadrados menores, dos quais 4 são mantidos e o restante é descartado.

Todos estes exemplos contêm propriedades similares as mencionadas no conjunto de Cantor e a curva de Koch. Há muitos outros tipos de construção. O conjunto de Júlia (ver figura 6), possui um estrutura altamente complexa, deriva da função quadrática

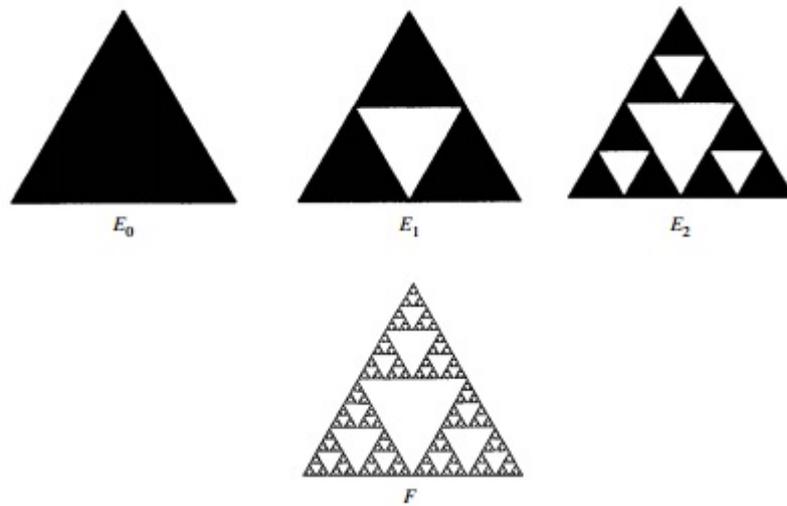


Figura 4 – Construção do triângulo de Sierpinski ( $\dim_H F = \dim_B F = \log 3 / \log 2$ ) (retirada de [1])

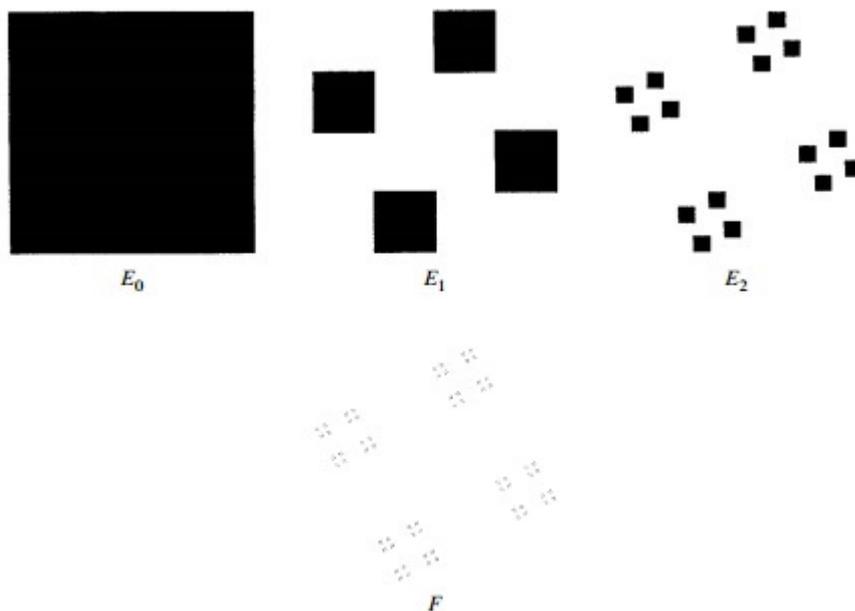


Figura 5 – Construção da poeira de Cantor ( $\dim_H F = \dim_B F = 1$ ) (retirada de [1])

$f(z) = z^2 + c$  para uma constante adequada  $c$ . Embora este conjunto não seja estritamente auto-similar como o conjunto de Cantor e a curva de Koch são, ele é "quase-auto-similar" em que pequenas porções do conjunto podem ser ampliadas e suavemente distorcidas de modo a coincidir com uma grande parte do conjunto.

Todos estes exemplos são referidos como fractais, as propriedades que foram listadas para o conjunto de Cantor são as características dos fractais. Certamente qualquer fractal possui a estrutura fina, ou seja, seu grau de detalhamento não diminui ao exa-

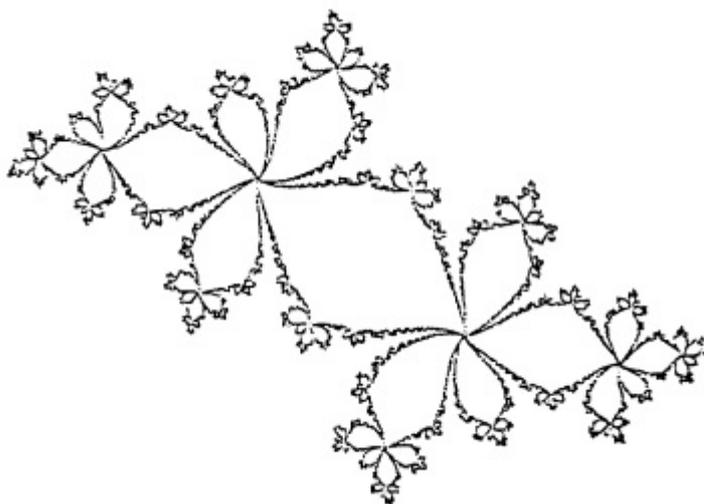


Figura 6 – Conjunto de Julia (retirada de [1])

minarmos uma porção pequena do mesmo. Sua imagem no entanto está sujeita a um limite de detalhamento imposto pelo poder de resolução do meio no qual se faz sua representação. As figuras geométricas tradicionais não possuem essa característica, pois o grau de detalhamento cai consideravelmente ao fazermos um exame microscópico em um intervalo cada vez menor. Muitos fractais possuem um certo grau de auto-similaridade, onde uma parte do fractal se assemelha a uma parte maior, ou ao fractal inteiro. Alguns fractais possuem uma auto-similaridade estrita, ou seja, quando uma porção do fractal reproduz exatamente a forma de uma porção maior, também podem ter auto-similaridade estocástica, isto é, caracterizada estatisticamente, podem ter a mesma distribuição, média ou desvio padrão.

Métodos de geometria clássica e do cálculo clássico são inadequados para estudar fractais e nós precisamos de técnicas alternativas. A principal ferramenta da geometria fractal é a dimensão em muitas formas. Estamos bastante familiarizados com a ideia de que uma curva (suave), é um objeto de uma dimensão, e uma superfície é de duas dimensões, o conjunto de Cantor possui dimensão  $\log 2 / \log 3 = 0,631 \dots$  e a curva de Koch possui dimensão  $\log 4 / \log 3 = 1,262 \dots$ , é maior do que uma dimensão porque tem comprimento infinito e menor do que duas dimensões porque possui área zero.

A noção de dimensão é central para a geometria fractal, a dimensão indica quanto espaço um conjunto ocupa perto de cada um de seus pontos. Existe uma grande variedade de dimensões fractais em uso, porém a dimensão de Hausdorff é a mais antiga e a mais importante, pois tem a vantagem de ser definida para qualquer conjunto, e é matematicamente conveniente, por ser baseada em medidas que são relativamente fáceis de manipular. A principal desvantagem, é que em muitos casos, é difícil calcular ou estimar por métodos computacionais. No entanto, para uma compreensão da matemática dos

fractais é necessário familiarizar-se com a medida e dimensão de Hausdorff.

### 1.3.1 Medida de Hausdorff

Se  $U$  é qualquer subconjunto não vazio do espaço Euclidiano  $n$ -dimensional,  $\mathbb{R}^n$ , o diâmetro de  $U$  é definido como  $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$ , ou seja, a maior distância entre qualquer par de pontos de  $U$ . Se  $U_i$  é uma coleção contável ou finita de conjuntos de diâmetro ao menos  $\delta$  que cobre  $F$ , isto é,  $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$  com  $0 \leq |U_i| \leq \delta$  para cada  $i$ , dizemos que  $\{U_i\}$  é a  $\delta$ -cobertura de  $F$ .

Suponha que  $F$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  e  $s$  é um número não-negativo. Para qualquer  $\delta > 0$  definimos:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é a } \delta\text{-cobertura de } F \right\}. \tag{1.5}$$

Olhamos todas as coberturas de  $F$  por um conjunto de diâmetros ao menos  $\delta$  e procuramos minimizar a soma dos diâmetros (figura 7). Conforme  $\delta$  diminui, as coberturas admissíveis de  $F$  são reduzidas. Portanto, o ínfimo  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  aumenta, e se aproxima de um limite quando  $\delta \rightarrow 0$ . Escrevemos:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) \tag{1.6}$$



Figura 7 – Conjunto  $F$  e duas  $\delta$ -coberturas possíveis para  $F$ . O ínfimo do  $\sum |U_i|^s$  sobre todas as  $\delta$ -coberturas  $\{U_i\}$  nos dá  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ . (retirada de [1])

Este limite existe para qualquer subconjunto  $F$  de  $\mathbb{R}^n$ , embora seu valor seja normalmente 0 ou  $\infty$ . Chamamos  $\mathcal{H}^s(F)$  a medida  $s$ -dimensional de Hausdorff de  $F$ .

Temos que  $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ , e se  $E$  está contido em  $F$  então  $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ , e ainda se  $F_i$  é qualquer coleção de conjuntos contáveis, então:

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i). \quad (1.7)$$

A medida de Hausdorff generaliza a ideia de comprimento, área, volume, etc. É possível mostrar que, para subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , a medida de Hausdorff  $n$ -dimensional é, com um múltiplo constante, a medida de Lebesgue  $n$ -dimensional, isto é, o usual volume  $n$ -dimensional. Mais precisamente se  $F$  é um subconjunto de Borel de  $\mathbb{R}^n$ , então:

$$\mathcal{H}^n(F) = c_n^{-1} \text{vol}^n(F) \quad (1.8)$$

onde  $c_n$  é o volume de uma bola  $n$ -dimensional de diâmetro 1, só que  $c_n = \pi^{n/2}/2^n(n/2)!$  se  $n$  é par e  $c_n = \pi^{(n-1)/2}((n-1)/2)!/n!$  se  $n$  é ímpar. Similarmente, para subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  de dimensões menores, temos que  $\mathcal{H}^0(F)$  é o número de pontos em  $F$ ;  $\mathcal{H}^1(F)$  nos dá o comprimento de uma curva suave  $F$ ;  $\mathcal{H}^2(F) = (4/\pi) \times \text{area}(F)$  de  $F$  é uma superfície suave;  $\mathcal{H}^3(F) = (6/\pi) \times \text{vol}(F)$ ; e  $\mathcal{H}^m(F) = c_m^{-1} \times \text{vol}^m(F)$  se  $F$  é uma superfície  $m$ -dimensional no sentido clássico.

As propriedades de escala de comprimento, área e volume são bem conhecidas, na ampliação por um fator  $\lambda$ , o comprimento da curva é multiplicado por  $\lambda$ , a área de uma região plana é multiplicada por  $\lambda^2$  e o volume de um objeto tridimensional é multiplicado por  $\lambda^3$ . Podemos ver na figura 8 as escalas de medidas de Hausdorff  $s$ -dimensional com um fator  $\lambda^s$

### 1.3.2 Dimensão de Hausdorff

Retornando a equação 1.5, podemos ver que dado qualquer conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  e  $\delta < 1$ ,  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  é não-crescente com  $s$ , então por 1.6,  $\mathcal{H}^s(F)$  é também não-crescente. Se  $t > s$  e  $\{U_i\}$  é a  $\delta$ -cobertura de  $F$  temos que:

$$\sum_i |U_i|^t \leq \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s \quad (1.9)$$

então, tomando o ínfimo,  $\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ . Seja  $\delta \rightarrow 0$  vemos que se  $\mathcal{H}^s(F) < \infty$  então  $\mathcal{H}^t(F) = 0$  para  $t > s$ . A figura 9 nos mostra o gráfico de  $\mathcal{H}^s(F)$  em comparação a  $s$ , vemos que existe um valor crítico de  $s$  onde  $\mathcal{H}^s(F)$  salta de  $\infty$  para 0. Este valor crítico é chamado de dimensão de Hausdorff de  $F$ , e escrevemos  $\dim_H F$  e está definido para qualquer conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$ . Formalmente

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\} \quad (1.10)$$

(tomando o supremo do conjunto vazio sendo zero), de modo que

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{se } 0 \leq s < \dim_H F \\ 0 & \text{se } s > \dim_H F. \end{cases} \quad (1.11)$$

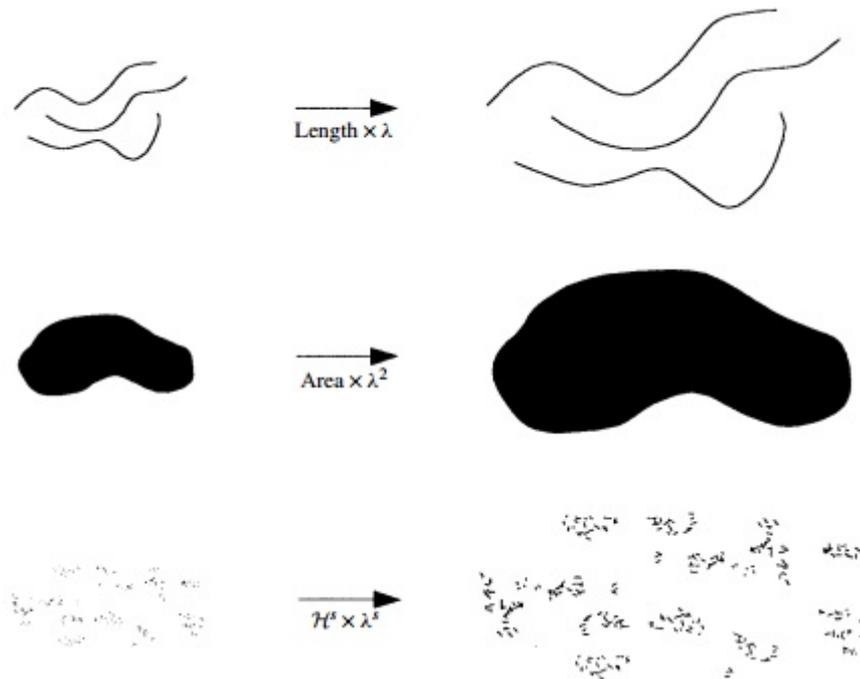


Figura 8 – Escalonando conjuntos por um fator  $\lambda$  aumentamos o comprimento por um fator  $\lambda$ , a área por  $\lambda^2$  e uma medida de Hausdorff  $s$ -dimensional por  $\lambda^s$  (retirada de [1])

Se  $s = \dim_H F$ , então  $\mathcal{H}^s(F)$  pode ser zero ou infinito, ou satisfaz

$$0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty.$$

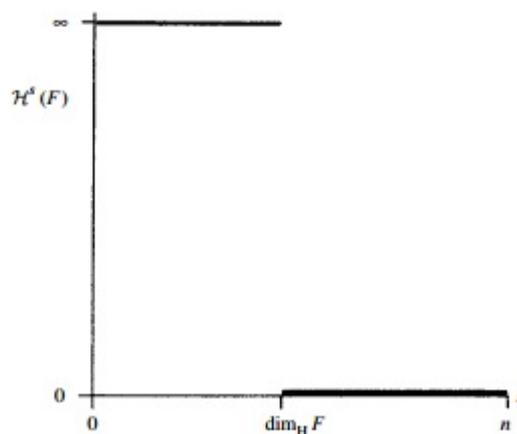


Figura 9 – Gráfico de  $\mathcal{H}^s(F)$  em comparação a  $s$  para um conjunto  $F$ . A dimensão de Hausdorff é o valor de  $s$  quando o salto de  $\infty$  para 0 ocorre. (retirada de [1])

Vejamos alguns exemplos de como calcular a dimensão de Hausdorff de alguns fractais mencionados acima.

**Exemplo 1**

Seja  $F$  o conjunto da poeira de Cantor construído a partir de um quadrado unitário, figura 5. Então  $1 \leq \mathcal{H}^1 \leq \sqrt{2}$ , a  $\dim_H F = 1$

Cálculo: Observe que  $E_k$ , o  $k$ -ésimo estágio de construção, consiste de  $4^k$  quadrados de lado  $4^{-k}$  e assim o diâmetro é  $4^{-k}\sqrt{2}$ . Tomamos os quadrados de  $E_k$  como as  $\delta$ -coberturas de  $F$  onde  $\delta = 4^{-k}\sqrt{2}$ , obtemos uma estimativa  $\mathcal{H}_\delta^1(F) \leq 4^k 4^{-k}\sqrt{2}$  para o ínfimo em 2.5.  $\delta \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ , e obtemos que  $\mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$

**Exemplo 2**

Seja  $F$  o conjunto do terço médio de Cantor. Se  $s = \log 2 / \log 3 = 0.6309\dots$  então  $\dim_H F = s$  e  $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$ .

Cálculo Eurístico: O conjunto de Cantor  $F$  é dividido em duas partes, parte esquerda  $F_L = F \cap [0, \frac{1}{3}]$  e a direita  $F_R = F \cap [\frac{2}{3}, 1]$ . Ambas as partes são geometricamente similares a  $F$  reduzidas por um fator de escala  $\frac{1}{3}$ , e  $F = F_L \cup F_R$  que é uma união disjunta. Para qualquer  $s$  temos:

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_L) + \mathcal{H}^s(F_R) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F)$$

Assumindo que o valor crítico  $s = \dim_H F$  temos que  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ , podemos dividir por  $\mathcal{H}^s(F)$  para obter  $1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s$  ou  $s = \log 2 / \log 3$ .

Cálculo Rigoroso: Chamamos os intervalos que compõem os conjuntos  $E_k$  na construção de  $F$  de intervalos nível- $k$ . Então  $E_k$  consiste de  $2^k$  intervalos nível- $k$  cada um com comprimento  $3^{-k}$ . Tomando os intervalos de  $E_k$  como a  $3^{-k}$ -cobertura  $F$  que dá  $\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(F) \leq 2^k 3^{-ks} = 1$  se  $s = \log 2 / \log 3$ . Quando  $k \rightarrow \infty$  dá  $\mathcal{H}^s(F) \leq 1$ .

Para provar que  $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{1}{2}$  temos que mostrar que:

$$\sum |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s} \quad (1.12)$$

para cada cobertura  $\{U_i\}$  de  $F$ . Se  $\{U_i\}$  é uma coleção finita de subintervalos fechados de  $[0, 1]$ , para cada  $U_i$ , seja  $k$  um inteiro tal que:

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}. \quad (1.13)$$

Então  $U_i$  pode interceptar ao menos um intervalo  $k$ -nível desde que a separação destes intervalos  $k$ -nível são ao menos  $3^{-k}$ . Se  $j \geq k$  então, pela construção,  $U_i$  intercepta ao menos  $2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s |U_i|^s$  intervalos nível- $j$  de  $E_j$ . Se escolhermos  $j$  grande o suficiente para que  $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$  para todo  $U_i$ , então, desde que  $\{U_i\}$  intercepte todos  $2^j$  intervalos básicos de comprimento  $3^{-j}$ , contando os intervalos temos  $2^j \leq \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s$ .

## 2 Introdução à Derivada Métrica

Neste capítulo vamos definir o conceito de derivada métrica, estudar suas propriedades básicas, e analisar alguns exemplos. Essas derivadas recentemente mostraram grande potencial de aplicação para o estudo de sistemas complexos e de fenômenos definidos em domínios fractais.

Antes de definir as derivadas métricas, vamos lembrar alguns conceitos do cálculo. Sabemos do cálculo usual que a derivada de uma função  $f(x)$  no ponto  $x_0$ , denotada por  $f'(x_0)$  é definida pelo limite

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (2.1)$$

onde  $\Delta x$  está relacionado à métrica euclidiana  $|x_1 - x_0|$  por

$$\Delta x = \begin{cases} |x_1 - x_0| & \text{se } x_0 \leq x_1 \\ -|x_1 - x_0| & \text{se } x_0 > x_1. \end{cases}$$

Uma função  $f(x)$  é dita diferenciável em  $x_0$  se o limite 2.1 existir. A existência deste limite implica que qualquer função pode ser aproximada por uma função linear cujo coeficiente linear é a derivada  $f'(x_0)$ .

**Teorema 2.0.1** (LEMA FUNDAMENTAL DA DIFERENCIAÇÃO). [6] Suponha que  $f(x)$  é uma função contínua que tem derivada em  $x_0$ . Então existe uma função  $\eta(\Delta x)$  definida em um intervalo contendo 0 tal que  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = [f'(x_0 + \eta(\Delta x))]\Delta x$ , onde  $\eta(\Delta x)$  é contínua em 0 com  $\eta(0) = 0$ .

**Prova:** Para provar o teorema basta verificar que podemos definir  $\eta(\Delta x)$  como:

$$\eta(\Delta x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] - f'(x_0) & , \text{ se } \Delta x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } \Delta x = 0. \end{cases}$$

como  $f(x)$  tem derivada em  $x_0$  vemos que  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \eta(\Delta x) = 0 = \eta(0)$ . Então  $\eta(\Delta x)$  é contínua em  $\Delta x = 0$ .

Como consequência desse teorema, temos para  $\Delta x \ll 1$  que  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$ , ou seja,  $|f(x_1) - f(x_0)| \approx |f'(x_0)||x_1 - x_0|$ . Em outras palavras, podemos dizer que se  $f(x)$  é uma função diferenciável, então  $|f(x_1) - f(x_0)|$  se aproxima de zero quando  $x_1 \rightarrow x_0$  proporcionalmente à  $|x_1 - x_0|$ . A função não será diferenciável em  $x_0$  se, por exemplo,  $|f(x_1) - f(x_0)|$  se aproximar de zero mais lentamente que  $|x_1 - x_0|$ . O que

ocorre, por exemplo, quando

$$|f(x_1) - f(x_0)| \approx kd(x_1, x_0), \tag{2.2}$$

onde  $k$  é uma constante positiva e

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{d(x_1, x_0)}{|x_1 - x_0|} = \infty.$$

Um outro exemplo de função não diferenciável é a função de Weierstrass:

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(2\pi b^k x),$$

onde  $0 < a < 1 < b$ , com  $ab \geq 1$ . A função de Weierstrass é contínua em todos os pontos  $x$ , pois  $w(x) < \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$ ,  $0 < a < 1$ , mas não admite derivada em ponto nenhum. Se derivarmos heurísticamente  $w(x)$  teremos  $w'(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} 2\pi(ab)^k \sin(2\pi b^k x) = \pm\infty$  se  $x \neq 0$ . Pois neste caso  $ab > 1$  e a série é divergente. Podemos mostrar rigorosamente que a derivada não existe para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ . Isto está relacionado ao fato que  $w(x_1) - w(x_0)$  não se aproxima de zero de forma proporcional à  $(x_1 - x_0)$ .

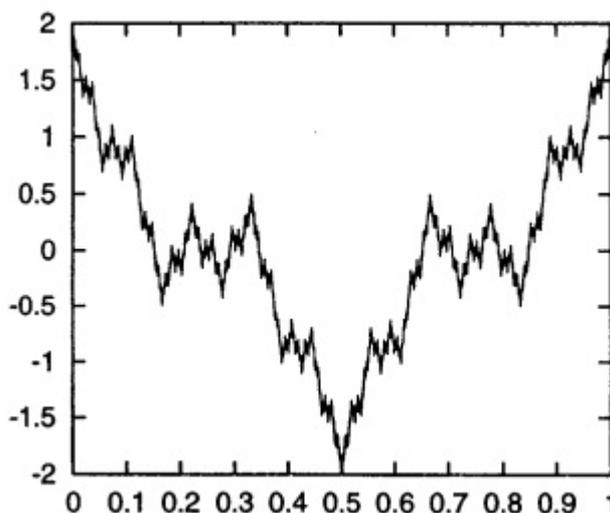


Figura 10 – Gráfico de  $w(x)$  com  $a = 0.5$  e  $b = 3$ . (retirada de [10])

Além disso, o gráfico desta função tem dimensão fractal, se fizermos uma transformação de escala  $x \rightarrow bx$ , teremos:

$$\begin{aligned} w(bx) &= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} a^{k+1} \cos(2\pi b^{k+1} x) = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(2\pi b^k x) \\ &= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(2\pi b^k x) - \frac{\cos(2\pi x)}{a} \end{aligned}$$

portanto,

$$w(bx) = \frac{w(x)}{a} - \frac{\cos(2\pi x)}{a}$$

Após esta transformação podemos ver que o gráfico da função difere do gráfico original por uma função contínua  $\left(\frac{\cos(2\pi x)}{a}\right)$  e por um fator de escala  $\frac{1}{a}$ . Como consequência, o gráfico de  $w(x)$  é auto-similar, tendo um comportamento fractal e sua dimensão é [10]

$$D = 2 + \frac{\log a}{\log b}.$$

Note que  $1 < D < 2$  se  $ab > 1$ , se  $a = 0.5$  e  $b = 3$ . Neste caso  $D = 2 - \log 2 / \log 3 \approx 1.37$ .

Voltando ao caso de funções diferenciáveis, podemos dizer que  $|f(x_1) - f(x_0)| \propto k|x_1 - x_0|$  quando  $\Delta x \ll 1$ . Porém em objetos fractais esta proporcionalidade pode não ocorrer, por isso é preciso definir uma variação  $\Delta_x^H$  com uma métrica diferente:

$$\Delta_x^H = \begin{cases} d(x_1, x_0) & \text{se } x_0 \leq x_1 \\ -d(x_1, x_0) & \text{se } x_0 > x_1. \end{cases}$$

Com essa variação podemos então definir o que chamamos de derivada métrica.

**Definição 1.** *Seja  $f(x)$  uma função definida em  $D \in \mathbb{R}$ , e seja  $d(x_1, x_0)$  uma métrica em  $D$ , chamamos de derivada métrica em  $x_0$  o limite:*

$$\frac{d^H f(x_0)}{d^H x} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta_x^H},$$

quando este limite existir dizemos que  $f(x)$  é  $H$ -derivável em  $x_0$ .

No caso da função  $f(x)$  ser diferenciável, a derivada métrica se relaciona à derivada usual. Temos:

**Corolário 2.0.1.** Se  $f(x)$  é diferenciável, então:

$$\frac{d^H f(x_0)}{d^H x} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta_x^H} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \frac{x_1 - x_0}{\Delta_x^H} = f'(x) \frac{d^H x}{d^H x}$$

Salientamos que  $\frac{d^H x}{d^H x}$  não será necessariamente igual a 1, dependerá da métrica que estará sendo utilizada.

Assim como no cálculo usual, as derivadas métricas também possuem algumas regras de derivação:

### 1) Derivada métrica de uma função constante

Se  $f$  tem o valor constante  $f(x) = c$ , então

$$\frac{d^H f(x)}{d^H x} = \frac{d^H(c)}{d^H x} = 0$$

**Prova:** Aplicamos a definição de derivada métrica para  $f(x) = c$ , função cujos valores são a constante  $c$ . Para qualquer valor de  $x$ , encontramos

$$\frac{d^H f(x)}{d^H x} = C = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{c - c}{\Delta^H x} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} 0 = 0$$

## 2) Regra da Potência

Se  $n$  é um número inteiro positivo e  $f(x) = x^n$  então, como  $x^n$  é diferenciável, temos:

$$\frac{d^H f(x)}{d^H x} = nx^{n-1} \cdot \frac{d^H x}{d^H x}$$

**Prova:** Como  $f$  é diferenciável, usamos o corolário 2.0.1.

## 3) Regra da multiplicação da derivada métrica por uma constante

Se  $f$  for uma função H-derivável (possui derivada na métrica H) de  $x$ , e  $c$  for uma constante, então:

$$\frac{d^H cf(x)}{d^H x} = c \frac{d^H f(x)}{d^H x}$$

**Prova:**

$$\frac{d^H cf(x)}{d^H x} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{cf(x_1) - cf(x_0)}{\Delta^H x} = c \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta^H x} = c \frac{d^H f(x)}{d^H x}.$$

## 4) Regra da soma

Se  $f$  e  $g$  são funções H-deriváveis de  $x$ , então a soma de  $f + g$  é H-derivável em qualquer ponto em que  $f$  e  $g$  sejam H-deriváveis. Em tais pontos,

$$\frac{d^H(f + g)}{d^H x} = \frac{d^H f}{d^H x} + \frac{d^H g}{d^H x}.$$

**Prova:** Aplicamos a definição de derivada métrica para  $h(x) = f(x) + g(x)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^H[f(x) + g(x)]}{d^H x} &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{[f(x_1) + g(x_1)] - [f(x_0) + g(x_0)]}{\Delta^H x} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta^H x} + \frac{g(x_1) - g(x_0)}{\Delta^H x} \right] \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta^H x} + \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{g(x_1) - g(x_0)}{\Delta^H x} = \frac{d^H f}{d^H x} + \frac{d^H g}{d^H x}. \end{aligned}$$

Combinando a regra da soma com a regra da multiplicação por uma constante, obtemos a **regra da diferença**, que diz que a derivada métrica de uma diferença de funções deriváveis é igual a diferença de suas derivadas métricas:

$$\frac{d^H(f - g)}{d^H x} = \frac{d^H[f + (-1)g]}{d^H x} = \frac{d^H f}{d^H x} + (-1)\frac{d^H g}{d^H x} = \frac{d^H f}{d^H x} - \frac{d^H g}{d^H x}.$$

### 5) Regra do Produto

Se  $f$  e  $g$  são H-deriváveis em  $x$ , então o produto  $fg$  também é, e:

$$\frac{d^H(fg)}{d^H x} = f \frac{d^H g}{d^H x} + g \frac{d^H f}{d^H x}.$$

**Prova:**

$$\frac{d^H(fg)}{d^H x} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1)g(x_1) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta^H x}$$

Transformamos esta fração em uma equivalente, subtraindo e adicionando  $f(x_1)g(x_0)$  ao numerador:

$$\begin{aligned} \frac{d^H(fg)}{d^H x} &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_0) + f(x_1)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta^H x} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \left[ f(x_1) \frac{g(x_1) - g(x_0)}{\Delta^H x} + g(x_0) \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta^H x} \right] \\ &= f(x) \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{g(x_1) - g(x_0)}{\Delta^H x} + g(x_0) \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta^H x} = f \frac{d^H g}{d^H x} + g \frac{d^H f}{d^H x}. \end{aligned}$$

### 6) Regra do Quociente

Sejam  $f$  e  $g$  funções e  $h$  a função definida por  $h(x) = f(x)/g(x)$ , onde  $g(x) \neq 0$ . Se  $\frac{d^H f(x)}{d^H x}$  e  $\frac{d^H g(x)}{d^H x}$  existem, então

$$\frac{d^H h(x)}{d^H x} = \frac{g(x) \frac{d^H f(x)}{d^H x} - f(x) \frac{d^H g(x)}{d^H x}}{[g(x)]^2}$$

**Prova:** Por hipótese, existem

$$\frac{d^H f(x)}{d^H x} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta^H x} \text{ e } \frac{d^H g(x)}{d^H x} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{g(x_1) - g(x_0)}{\Delta^H x}$$

E assim,

$$\frac{d^H h(x)}{d^H x} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{h(x_1) - h(x_0)}{\Delta^H x} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x_1)}{g(x_1)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta^H x} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{1}{\Delta^H x} \frac{f(x_1)g(x_0) - f(x_0)g(x_1)}{g(x_1)g(x_0)}$$

Subtraindo e adicionando  $f(x_0)g(x_0)$  ao numerador, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^H f(x)}{d^H x} &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{1}{\Delta^H x} \frac{f(x_1)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_1)}{g(x_1)g(x_0)} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \left[ \frac{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta^H x} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x_1) - g(x_0)}{\Delta^H x}}{g(x_1)g(x_0)} \right] \\ &= \frac{\lim_{x_1 \rightarrow x_0} g(x_0) \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta^H x} - \lim_{x_1 \rightarrow x_0} f(x_0) \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{g(x_1) - g(x_0)}{\Delta^H x}}{\lim_{x_1 \rightarrow x_0} g(x_1) \lim_{x_1 \rightarrow x_0} g(x_0)} \\ &= \frac{g(x) \frac{d^H f(x)}{d^H x} - f(x) \frac{d^H g(x)}{d^H x}}{g(x)g(x)} = \frac{g(x) \frac{d^H f(x)}{d^H x} - f(x) \frac{d^H g(x)}{d^H x}}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$

## 7) Regra da cadeia

Se  $y = g(u)$ ,  $u = f(x)$  e as derivadas  $dy/du$  e  $d^H u/d^H x$  existem, então a função composta  $y = g[f(x)]$  tem derivada que é dada por

$$\frac{d^H y}{d^H x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^H u}{d^H x}$$

**Prova parcial:** Vamos fazer a demonstração supondo que existe um intervalo  $I$  contendo  $x$ , tal que  $f(x_1) - f(x_0) \neq 0$ .

Como  $y = g[f(x)]$ , e  $g$  é diferenciável, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{d^H g[f(x)]}{d^H x} &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{g[f(x_1)] - g[f(x_0)]}{\Delta^H x} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{g[f(x_1)] - g[f(x_0)]}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta^H x} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{g[f(x_1)] - g[f(x_0)]}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta^H x} = g'(x_0) \cdot \frac{d^H f(x_0)}{d^H x} \end{aligned}$$

## 2.1 Relação entre derivada métrica e meios fractais

Em um trabalho recente, Balankin e Elizarraraz [12] propuseram um modelo de hidrodinâmica no contínuo que descreve o fluxo de fluido em um meio fractal (meios porosos e/ou fraturas). Este modelo é construído à partir de um mapa de operadores no domínio fractal em derivadas métricas no contínuo. À partir deste mapa construído através de argumentos físicos, sem o rigor matemático, os autores obtiveram um modelo

de hidrodinâmica com as derivadas métricas, chamadas de derivadas de Hausdorff, que modela com grande precisão dados experimentais de fluxo de petróleo em meios porosos. Os resultados obtidos justificam um estudo rigoroso da validade do mapa proposto, assim como o potencial de aplicações das derivadas métricas em sistemas definidos em domínios fractais. Neste trabalho vamos revisar brevemente três tipos de derivadas métricas que se mostraram importantes quanto à aplicação.

### Derivada de Hausdorff

Como discutido acima, a derivada de Hausdorff foi utilizada com sucesso para descrever a dinâmica de fluídos em meios fractais. Esta derivada é definida à partir de  $\Delta_x^H = x_1^\zeta - x_0^\zeta$  como:

$$\frac{d^H}{dx^\zeta} f(x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1^\zeta - x_0^\zeta} \equiv^* \left( \frac{x_0}{l_0} + 1 \right)^{1-\zeta} \frac{d}{dx} f = \frac{l_0^{\zeta-1}}{c_1} \frac{d}{dx} f = \frac{d}{d^\zeta x} f \quad (2.3)$$

onde  $f$  é diferenciável,  $l_0$  é o limite inferior ao longo do eixo  $x$ , e o expoente de escala  $\zeta$  caracteriza a densidade ao longo de  $x$ .

\*Esta equivalência foi obtida heurísticamente e descreve com grande precisão os dados que foram obtidos experimentalmente [12].

### Derivada Conformable Fracionária

Recentemente, uma nova definição de derivada fracionária foi proposta [4], chamada derivada fracionária conformable. Diferente da maioria das derivadas fracionárias, neste caso, os operadores são locais e conservam propriedades similares ao do cálculo usual. Essas derivadas são definidas como:

$$T_\alpha f(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \epsilon x_0^{1-\alpha}) - f(x_0)}{\epsilon} \quad (2.4)$$

Se a  $f(x)$  for diferenciável em  $x_0$ , e fizermos a mudança de variável  $x_1 = x_0 + \epsilon x_0^{1-\alpha}$ , obtemos:

$$T_\alpha f(x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} x_0^{1-\alpha} = x_0^{1-\alpha} f'(x_0). \quad (2.5)$$

Agora vejamos uma outra versão de derivada conformable, seja  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $t > 0$ . Então a derivada *Katugampola* de  $f$  de ordem  $\alpha$  é definida por:

$$\mathcal{D}^\alpha(f)(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 e^{\epsilon x_0^{-\alpha}}) - f(x_0)}{\epsilon} \quad (2.6)$$

para  $x_0 > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ .

Se  $f(x)$  for diferenciável em  $x_0$  e se fizermos a mudança de variável  $x_1 = x_0 e^{x_0^{-\alpha}}$  obtemos:

$$\mathcal{D}^\alpha(f)(x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\ln(x_1) - \ln(x_0)} x_0^{-\alpha} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \frac{x_1 - x_0}{\ln(x_1) - \ln(x_0)} x_0^{-\alpha} = x_0^{1-\alpha} f'(x_0). \quad (2.7)$$

Portanto, para funções diferenciáveis as definições são equivalentes.

### q-derivada no contexto não-extensiva

Ao longo das últimas décadas, diversos formalismos novos foram propostos na tentativa de estudar sistemas complexos. Entre esses, podemos citar o q-cálculo na versão de Tsallis da Estatística não-extensiva com seu inegável sucesso quando aplicado à uma ampla classe de sistemas diferentes.

Borges [11] propôs o operador para  $q$ -derivadas como segue:

$$D_{(q)}f(x) \equiv \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x \ominus_q y} = [1 + (1 - q)x] \frac{df(x)}{dx} \quad (2.8)$$

aqui,  $\ominus$  é o operador de diferença deformado,  $x \ominus_q y \equiv \frac{x-y}{1+(1-q)y}$ , ( $y \neq 1/(q-1)$ ).

Recentemente, foi mostrado que em uma primeira aproximação, existe uma relação entre a  $q$ -derivada e a derivada de Hausdorff, onde  $1 - q = \frac{(1 - \zeta)}{l_0}$ .

## 2.2 Exemplos de aplicação

Para ilustrar um exemplo simples de aplicação das derivadas métricas, vamos estudar a equação do crescimento populacional (ou decaimento radioativo) com derivadas métricas. Esta equação é dada por:

$$\frac{d^H y}{d^H x} = ay, \quad (2.9)$$

onde  $a \in \mathbb{R}$  e substituímos a derivada usual por uma derivada métrica na equação.

No caso de  $y(x)$  ser uma função diferenciável esta equação pode ser facilmente resolvida usando o corolário 2.0.1 e o método de separação de variáveis, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^H x}{d^H x} y' &= ay \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{a}{\frac{d^H x}{d^H x}} dx \\ y &= ke^{a \int \left(\frac{d^H x}{d^H x}\right)^{-1} dx}, \end{aligned}$$

onde  $k$  e  $a$  são constantes.

Os gráficos foram obtidos pelo software wxMaxima 12.04.0, o wxMaxima é uma interface para o sistema de álgebra computacional MAXIMA baseada no wxWidgets.

No caso da derivada de Hausdorff temos que:

$$\frac{d^H x}{d^H x} = \left( \frac{x}{l_0} + 1 \right)^{1-\zeta}$$

e portanto a solução da equação 2.9 é:

$$y = ke^{\frac{al_0 \left(1 + \frac{x}{l_0}\right)^\zeta}{\zeta}} \quad (2.10)$$

Vemos na figura 11 uma comparação entre a solução 2.10 para derivadas de Hausdorff com a solução  $y(x) = ke^{ax}$  para derivadas usuais. Podemos notar que a solução da equação do crescimento populacional com derivada de Hausdorff cresce mais lentamente que a solução clássica. Além disso, a solução com derivada de Hausdorff (2.10) é limitada ao domínio  $x \geq -l_0$ , enquanto no caso clássico o domínio é o conjunto de todos os reais.

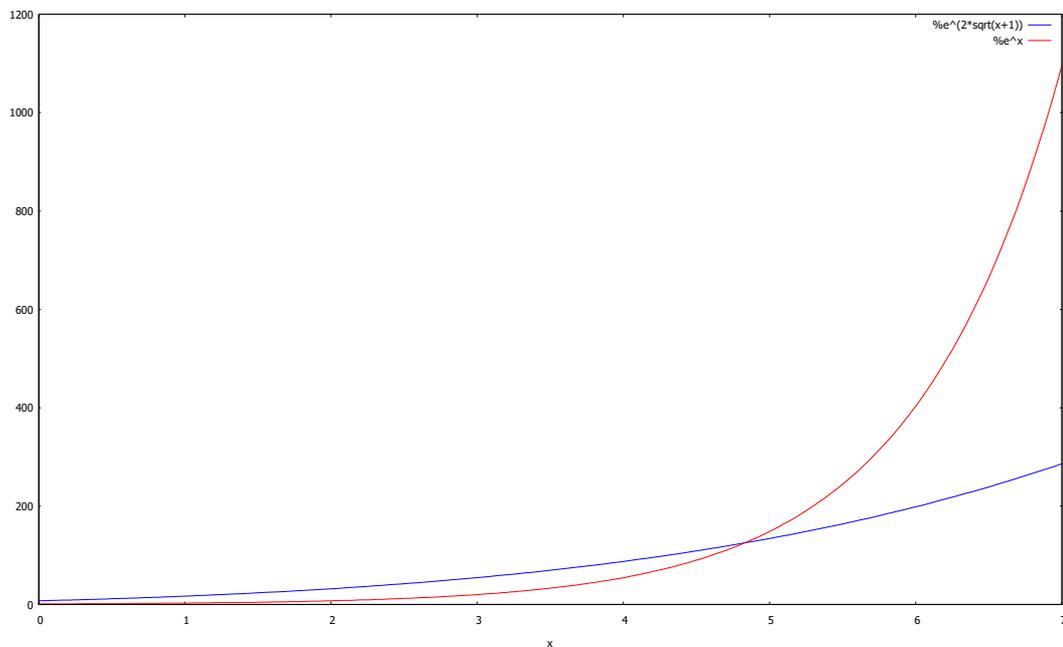


Figura 11 – Gráfico da solução da derivada de Hausdorff com  $k = a = 1$ ,  $l_0 = 1$  e  $\zeta = \frac{1}{2}$

Para a derivada conformable, onde,

$$\frac{d^H x}{d^H x} = x^{1-\alpha}$$

a solução é dada por:

$$y = ke^{\left(\frac{ax^\alpha}{\alpha}\right)} \quad (2.11)$$

Apresentamos na figura 12 uma comparação entre a solução 2.11 para as derivadas conformable com a solução  $y(x) = ke^{ax}$  para derivadas usuais. Com  $k = a = 1$  e  $\alpha = 1/2$ , temos que para  $0 \leq x \leq 4$  a solução da equação do crescimento populacional com derivadas conformable é maior que a solução clássica. A situação muda quando  $x > 4$ , neste caso a solução clássica apresenta valores superiores. Além disso, vemos que a solução com derivada conformable (2.11) tem o domínio limitado à  $x \geq 0$ .

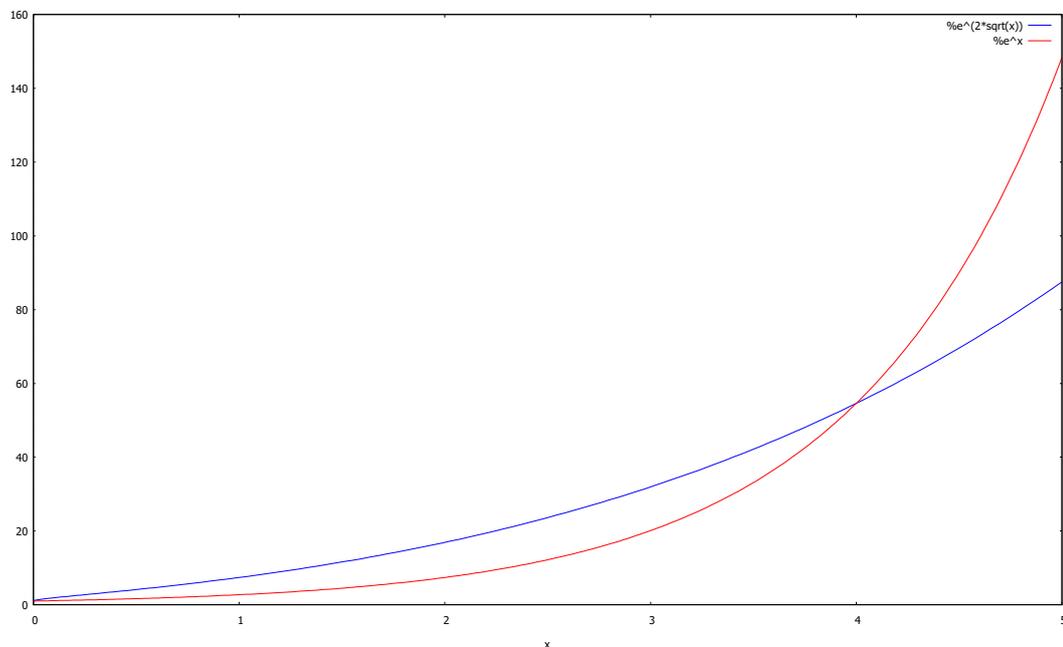


Figura 12 – Gráfico da solução da derivada conformable com  $k = a = 1$  e  $\alpha = \frac{1}{2}$

E finalmente para a  $q$ -derivada, onde temos:

$$\frac{d^H x}{d^H x} = [1 + (1 - q)x]$$

a solução da equação do decaimento é:

$$y = ke^{\frac{a \ln(-qx+x+1)}{1-q}} \quad (2.12)$$

que difere muito da solução com derivada usual (ver figura 13), onde a solução 2.12 com  $k = a = 1$  e  $q = \frac{1}{2}$  se reduz a uma função quadrática.

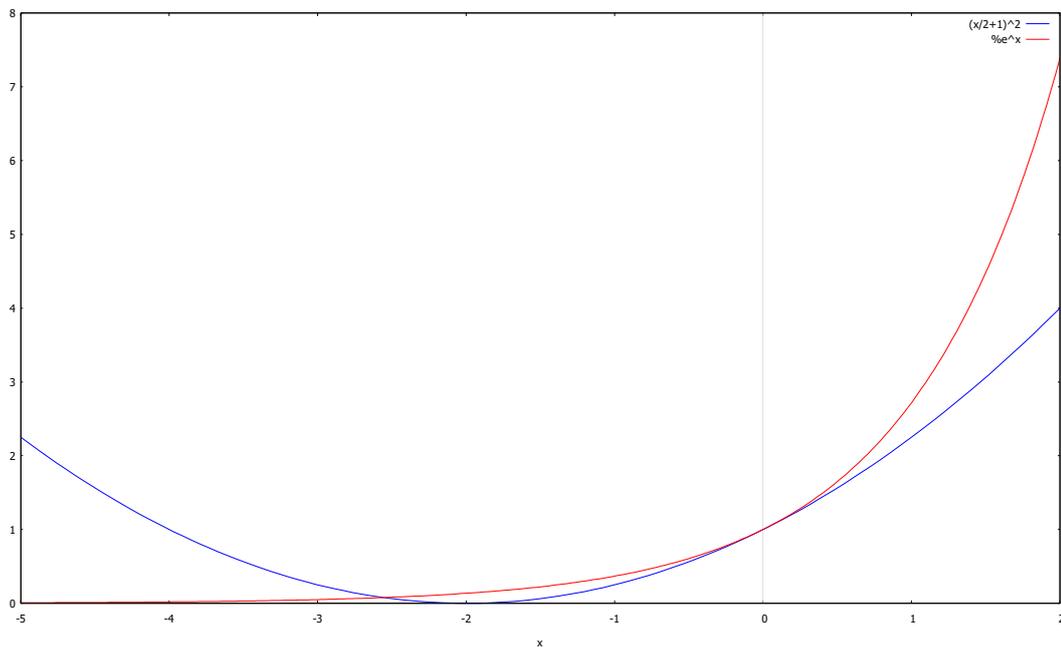


Figura 13 – Gráfico da solução da  $q$ -derivada com  $k = 1$ ,  $a = 1$  e  $q = \frac{1}{2}$

Os gráficos das figuras 11, 12 e 13 foram obtidos pelo software wxMaxima 12.04.0, o wxMaxima é uma interface para o sistema de álgebra computacional MAXIMA baseada no wxWidgets.

## 3 Conclusão

O objetivo deste trabalho foi apresentar uma breve introdução à teoria dos fractais e às derivadas métricas.

Conforme foi constatado por diversos cientistas, podemos verificar que as ferramentas da geometria euclidiana e do cálculo clássico não são aptas para o estudo dos objetos fractais, pelo fato de terem formas muito fragmentadas e irregulares, o que justificou a introdução de novos conceitos como o de medida e dimensão de Hausdorff e as derivadas métricas. A medida de Hausdorff é essencial para que possamos calcular a dimensão fractal do objeto, que no caso é dada pela dimensão de Hausdorff.

O estudo das derivadas métricas, nos possibilitou perceber que, de acordo com a métrica escolhida, obtemos resultados diferentes do resultado usual, possibilitando assim, que alguns fenômenos possam ser descritos com maior precisão, como por exemplo, no caso de crescimento populacional, já foi mostrado que nem toda espécie cresce de forma exponencial. Então tomando uma métrica adequada é possível modelar com grande precisão diversos fenômenos da natureza.

É importante salientar que diversos trabalhos recentes mostraram um grande potencial de aplicação das derivadas métricas na modelagem de sistemas complexos com estrutura fractal. Como exemplo, podemos citar um modelo de hidrodinâmica no contínuo [12] que descreve o fluxo de fluido em um meio fractal (meios porosos e/ou fraturas). Este modelo é construído à partir de um mapa de operadores no domínio fractal em derivadas métricas no contínuo. À partir deste mapa construído através de argumentos físicos, sem o rigor matemático, os autores obtiveram um modelo de hidrodinâmica com as derivadas métricas, chamadas de derivadas de Hausdorff, que modela com grande precisão dados experimentais de fluxo de petróleo em meios porosos. Os resultados obtidos justificam um estudo rigoroso da validade do mapa proposto, assim como explorar o potencial de aplicações das derivadas métricas em sistemas definidos em domínios fractais, como por exemplo, a turbulência de fluidos.

# Referências

- [1] Falconer, Kenneth. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*, John Wiley & Sons, 2004.
- [2] Serra, Celso P. *Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos*, Celso Penteado Serra; Elizabeth Wegner Karas, Curitiba, Champagnat, 1997.
- [3] Domingues, Hygino Hugueros. *Espaços métricos e introdução à topologia*, São Paulo, Atual, 1982.
- [4] Khalil R., Al Horani M., Yousef A. and Sababheh M., *A new definition of fractional derivative*, J. Comput. Appl. Math. volume 264, 65–70, 2014.
- [5] Lima, Elon Lages *Espaços métricos*, Rio de Janeiro, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003.
- [6] Protter, M.H. *Basic elements of real analysis*, Springer, 1991.
- [7] Bassalo, Jose Maria F. *Crônicas da física*, Belem, UFP, 1994.
- [8] Mandelbrot, Benoit. *Objetos fractais: forma, acaso e dimensão*, Lisboa, Gradiva, 1991.
- [9] Mandelbrot, Benoit. *The fractal geometry of nature*, New York, W. H. Freeman, 1983
- [10] Hunt, Brian R. *The Hausdorff dimension of graphs of weierstrass functions*, Proceeding of the American Mathematical Society Volume 126, number 3, March 1998, Pages 791-800, S 0002-9939(98)04387-1
- [11] Weberszpil, J. *Variational Approach and Deformed Derivatives*, J. Weberszpil; J. A. Helayël-Neto, Rio de Janeiro, UFRRJ-IM/PPGMMC, CBPF, 2015.
- [12] Balankin, Alexander S. *Map of fluid flow in fractal porous medium into fractal continuum flow*, Alexander S. Balankin; Benjamim Espinoza Elizarráz, Grupo "Mecánica Fractal", Instituto Politécnico Nacional, México, 2012.
- [13] West, Bruce J. *Colloquium: Fractional calculus view of complexity: A tutorial*, Reviews of modern physics, volume 86, outubro-dezembro 2014.