

Caroline de Alvarenga Vaz

**Os Fundamentos Matemáticos do Algoritmo
Especializado para Redes de Custo Mínimo
Implementado na Ferramenta Computacional
*Grafos***

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Dezembro, 2017

Caroline de Alvarenga Vaz

**Os Fundamentos Matemáticos do Algoritmo
Especializado para Redes de Custo Mínimo
Implementado na Ferramenta Computacional *Grafos***

Trabalho de Conclusão de Curso, Matemática Aplicada Bacharelado, submetido por Caroline de Alvarenga Vaz junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Matemática Aplicada Bacharelado

Orientador: Dra. Catia Maria dos Santos Machado

Coorientador: Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Dezembro, 2017

Dedico este trabalho aos meus pais, minha irmã e meu noivo, que sempre me deram todo amor e apoio para que este sonho fosse realizado.

Agradecimentos

A Deus, por me dar força e saúde para que este momento tão importante fosse realizado.

Aos meus pais Maria Eunice e Carlos Alberto, minha irmã Milena e meu noivo Deivid. Agradeço por todo amor, carinho e companheirismo. Por me darem todo apoio e incentivo para que eu nunca desistisse e fosse capaz de vencer todas as dificuldades. Este sonho é nosso! Obrigada por tudo!

Aos meus amigos Cibelle, Kelvin e Hellen. A amizade de vocês com certeza foi um dos melhores presentes que a graduação me proporcionou. Obrigada por todos os momentos compartilhados e pelo imenso apoio durante estes anos de formação. Sou muito grata por ter vocês em minha vida e por vencermos esta conquista juntos.

A minha orientadora querida, Catia Maria dos Santos Machado, que nunca mediu esforços para que eu pudesse desenvolver este trabalho. Sempre muito atenciosa e dedicada, obrigada de coração, por todos os conselhos e ensinamentos.

A minha família e amigos que, de uma forma ou de outra, me ajudaram para que eu pudesse chegar até aqui. Entendendo os momentos ausentes e sempre torcendo para que esta vitória fosse alcançada.

Por fim, gostaria de agradecer pela disponibilidade da banca avaliadora, composta pelas professoras Bárbara e Diana. Assim como as contribuições feitas para melhoria do trabalho.

Resumo

O desenvolvimento de aplicativos comerciais especializados ainda é lento, pela incapacidade de acompanhar a demanda da comunidade científica. Disciplinas como a Teoria dos Grafos, ainda carecem de desenvolvimento e ferramentas computacionais especializadas, para a solução de problemas computacionais específicos. Nesse sentido, é preciso aprofundar os estudos dos fundamentos matemáticos, da Teoria dos Grafos, que governam os algoritmos desenvolvidos nos produtos voltados para essas aplicações. Esse trabalho tem como objetivo geral um estudo sobre a fundamentação matemática do algoritmo, para o problema de fluxo em rede de custo mínimo, enfatizando uma técnica de solução especializada, implementada na ferramenta computacional *Grafos*. Paralelamente, através de uma técnica de uso geral, implementada em um aplicativo comercial, também é mostrado como o problema de rede de custo mínimo pode ser solucionado. O algoritmo especializado também é aplicado utilizando a planilha eletrônica Excel. O trabalho mostra que ambas ferramentas computacionais resolvem o problema de forma prática. No entanto, a ferramenta *Grafos* é a mais indicada quando trata-se de modelos de rede de custo mínimo. Além disso, o trabalho busca incentivar o leitor a desenvolver seus próprios aplicativos.

Palavras-chaves: Problemas, Grafos, Custo, Ferramenta Computacional.

Abstract

The development of specialized business applications is still slow, due to the inability to keep up with the demand of the scientific community. The discipline as the Theory of Graphs, still lacks development and specialized computational tools, for the solution of specific computational problems. In this sense, it is necessary to deepen the studies of the mathematical fundamentals, of Theory of Graphs, that govern the algorithms developed in the products directed to these applications. This work has as general objective a study on the mathematical foundation of the algorithm, for the problem of flow in network of minimum cost, emphasizing a technique of specialized solution, implemented in the computational tool. In parallel, through a general-purpose technique implemented in a commercial application, it is also shown how the least cost network problem can be solved. The work shows that, depending on the instance and the complexity of the problem, the *Graph* tool becomes more appropriate for modeling and solving real problems. In addition, the work also encourages the reader to develop their own applications.

Key-words: Problems, Graphs, Cost, Computational Tool.

Lista de ilustrações

| | |
|--|----|
| Figura 1 – Representação de uma Rede Multimodal de Transportes | 9 |
| Figura 2 – Arco j descrito como um par $(F(j), T(j))$ | 12 |
| Figura 3 – Representação de uma rede através de um grafo G | 12 |
| Figura 4 – Representação de um subgrafo de G | 12 |
| Figura 5 – (a) Caminho do grafo G ; (b) Ciclo do grafo G | 13 |
| Figura 6 – (a) Representação de uma árvore τ de G | 16 |
| Figura 7 – Representação de uma árvore τ de G com um nó raiz \mathbf{l} | 16 |
| Figura 8 – Representação do grafo G | 23 |
| Figura 9 – Árvore básica τ_B do grafo G | 24 |
| Figura 10 – Ciclo formado na árvore com a entrada do arco a_3 | 25 |
| Figura 11 – Árvore básica x^B do grafo G | 26 |
| Figura 12 – Ciclo formado na árvore com a entrada do arco a_2 | 27 |
| Figura 13 – Árvore básica x^B do grafo G | 28 |
| Figura 14 – Novo documento | 31 |
| Figura 15 – Opção Tabela | 32 |
| Figura 16 – Total de nós | 33 |
| Figura 17 – Valor dos nós | 34 |
| Figura 18 – Valor dos custos | 35 |
| Figura 19 – Limite inferior | 36 |
| Figura 20 – Limite superior | 37 |
| Figura 21 – Opção Gráfico | 38 |
| Figura 22 – Gráfico do problema proposto | 39 |
| Figura 23 – Análise final do problema | 40 |
| Figura 24 – Problema proposto | 44 |
| Figura 25 – Primeira Iteração | 44 |
| Figura 26 – Atualização dos Fluxos | 45 |
| Figura 27 – Segunda Iteração | 45 |
| Figura 28 – Atualização dos Fluxos | 45 |
| Figura 29 – Terceira Iteração | 46 |
| Figura 30 – Exemplo desenvolvido no Solver | 47 |

Sumário

| | | |
|-----|---|-----------|
| | Introdução | 8 |
| 1 | OBJETIVOS | 10 |
| 1.1 | Objetivo Geral | 10 |
| 1.2 | Objetivos Específicos | 10 |
| 2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA | 11 |
| 2.1 | O Algoritmo para o Problema de Fluxo em Redes de Custo Mínimo | 11 |
| 2.2 | Caracterização de uma matriz básica para o Problema de Fluxo em Rede | 15 |
| 2.3 | Algoritmo Especializado para o Problema de Fluxo em Redes | 18 |
| 2.4 | Uma prova conceitual para verificar a teoria matemática do algoritmo especializado | 22 |
| 3 | GRAFOS: FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA APRENDIZAGEM E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS REAIS DA TEORIA DOS GRAFOS | 30 |
| 3.1 | Ferramenta Computacional <i>Grafos</i> | 30 |
| 3.2 | Tutorial para Ferramenta Computacional <i>Grafos</i> | 30 |
| 4 | CONCLUSÃO | 41 |
| | REFERÊNCIAS | 42 |
| A | EXEMPLO PARA MINIMIZAR O PROBLEMA DE TRANSPORTE NA PLATAFORMA EXCEL | 44 |
| B | EXEMPLO PARA MINIMIZAR O PROBLEMA DE TRANSPORTE ATRAVÉS DO <i>SOLVER</i> | 47 |

Introdução

De acordo com (COELHO, 2007), no desenvolvimento de softwares científicos existem dois modos principais de produção: o desenvolvimento de softwares comerciais, feitos por empresas de software que contratam programadores profissionais para o desenvolvimento de produtos voltados para uma determinada aplicação científica e o desenvolvimento feito por cientistas (matemáticos, físicos, biólogos, etc., que não são programadores profissionais), geralmente de forma colaborativa através do compartilhamento de código fonte.

Assim, como a Estatística, a disciplina Teoria dos Grafos, por exemplo, carece de massa crítica (em termos de número de profissionais) para estimular o desenvolvimento de pacotes comerciais para a solução dos seus problemas computacionais específicos. Além disso, o desenvolvimento desse tipo de pacote, ainda é lento para acompanhar a demanda da comunidade científica devido o aumento significativo das disciplinas que necessitam se utilizar de ferramentas computacionais. Assim, para quem estuda Matemática Aplicada, é imprescindível e interessante estudar os fundamentos matemáticos da Teoria dos Grafos que governam os algoritmos de solução implementados nesses pacotes.

Esse trabalho tem como objetivo geral mostrar a fundamentação matemática da teoria e da técnica de solução para o problema de fluxo em redes de custo mínimo aliada a utilização da ferramenta computacional *Grafos*, desenvolvida por Alejandro Rodríguez Villalobos e da planilha eletrônica excel, que acompanha o OFFICE, um produto da Microsoft Corporation, uma visão mais prática. A escolha sobre essas ferramentas foi por ser *Grafos*, a ferramenta mais adequada ao objetivo do trabalho e a planilha excel, pela sua popularidade e facilidade de acesso.

Os problemas reais de fluxos em redes de custo mínimo, modelado por grafos, envolvem uma variedade de aplicações, como determinar um plano de transporte para transportar bens a partir das fontes (fábricas e etc.) para locais de armazenagem intermediários (quando necessário) e então para os clientes (demandas), (GOLDBARG; LUNA, 2000).

A seguir é apresentado um mapa mostrando a realidade complexa de um modelo de rede multimodal de transportes.



Figura 1 – Representação de uma Rede Multimodal de Transportes

A modelagem através de grafos possibilita traduzir a realidade complexa. Além disso, os modelos de rede possuem uma estrutura especial, logo é possível implementar algoritmos especializados que operam diretamente no grafo, sem o peso computacional das operações matriciais utilizadas geralmente pelos pacotes comerciais, (MACHADO; MAYERLE; TREVISAN, 2010). Nesse sentido, o trabalho traz uma contribuição importante, o olhar sobre os fundamentos matemáticos dos algoritmo especializado de solução, implementado na ferramenta *Grafos*, uma ferramenta de aprendizagem de problemas reais da Teoria dos Grafos.

1 Objetivos

1.1 Objetivo Geral

O presente trabalho tem por objetivo geral mostrar os fundamentos matemáticos da teoria e da técnica de solução do problema de fluxo em redes de custo mínimo aliada a utilização da ferramenta computacional Grafos e a planilha excel. Para alcançar o objetivo geral os seguintes objetivos específicos são considerados.

1.2 Objetivos Específicos

- Mostrar as propriedades matemáticas da topologia dos grafos;
- Apresentar a estrutura especial do modelo para o problema de rede de custo mínimo;
- Mostrar que o cálculo da inversa da matriz para o problema de rede, na resolução dos sistemas lineares, não se faz necessário;
- Mostrar que as operações matriciais podem ser realizadas diretamente no grafo que modela o problema;
- Utilizar a ferramenta Grafos e a planilha excel na resolução do problema;
- Mostrar que a ferramenta Grafos é a mais indicada para problemas modelados por grafos;
- Incentivar aqueles que desejam fazer seu próprios aplicativos.

2 Fundamentação Teórica

Esse capítulo mostra a fundamentação matemática, do algoritmo implementado na ferramenta Grafos, para o problema de fluxo de custo mínimo em redes de transporte. Os fundamentos matemáticos do algoritmo encontram-se na Teoria dos Grafos, Álgebra linear e na Geometria n-dimensional.

2.1 O Algoritmo para o Problema de Fluxo em Redes de Custo Mínimo

As notações e convenções utilizadas no decorrer do trabalho são as mesmas adotadas por (KENNINGTON, 1980). A notação $\sigma(x)$ é utilizada para denotar o sinal de uma função, definida por:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Considere a seguinte formulação para o problema

$$\text{Min} \quad c^T x \quad (2.1)$$

$$\text{s.a.} \quad Ax = r \quad (2.2)$$

$$l \leq x \leq u \quad (2.3)$$

onde A é a matriz de incidência nó-arco, r o vetor de ofertas e demandas associados aos nós da rede, c o vetor de custos, l e u representando as capacidades mínimas e máximas de fluxo nos arcos da rede, respectivamente.

Resultados a partir da teoria de grafos são utilizados para implementação do algoritmo que resolve o problema de rede de custo mínimo. Considera-se uma rede contendo \bar{I} nós e \bar{J} arcos, uma matriz de incidência nó-arco A associada à esta rede. Para cada arco j , tem-se $F(j) = i$, onde $A_{ij} = 1$, $T(j) = k$, e $A_{kj} = -1$. O arco j é formalmente descrito como um par $(F(j), T(j))$ tal que $F(j) \neq T(j)$.

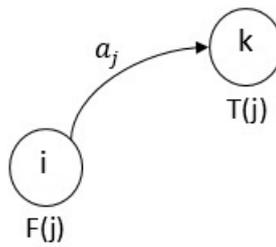


Figura 2 – Arco j descrito como um par $(F(j), T(j))$

Uma rede pode ser representada por um grafo G que consiste de um conjunto $[N, R]$, onde $N = \{1, \dots, \bar{I}\}$ é o conjunto de nós e $R = \{a_1, a_2, \dots, a_j\}$ é o conjunto de arcos, onde $a_j = (F(j), T(j))$. Um grafo G é dito ser um grafo próprio se $\bar{I} \geq 2$ e $\bar{J} \geq 1$.

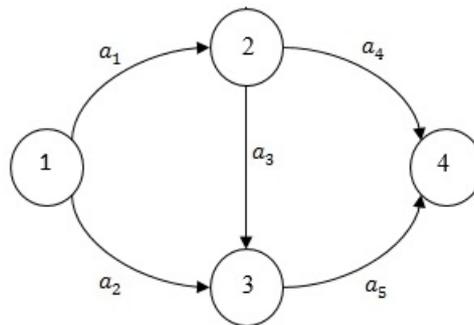


Figura 3 – Representação de uma rede através de um grafo G .

Um grafo $\hat{G} = [\hat{N}, \hat{R}]$ é subgrafo de G se $\hat{N} \subset N$ e $\hat{R} \subset R$. Se $\hat{N} = N$, então \hat{G} gera G .

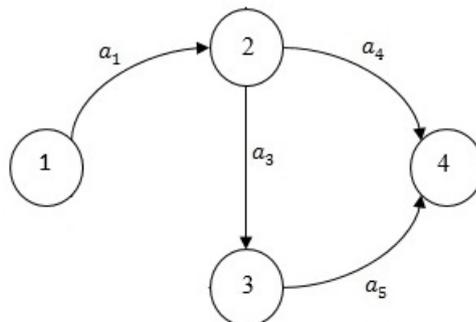


Figura 4 – Representação de um subgrafo de G .

Um caminho em um grafo G é definido por ser uma sequência finita

$$P = \{n_1, a_{j_1}, n_2, a_{j_2}, \dots, n_n, a_{j_n}, n_{n+1}\}$$

No grafo da Figura 4 (a), o exemplo de um caminho é $P = \{1, a_1, 2, a_4, 4, a_5, 3\} = \{1, (1, 2), 2, (2, 4), 4, (3, 4), 3\}$.

Além disso, uma sequência finita $C = \{n_1, a_{j_1}, n_2, a_{j_2}, \dots, n_n, a_{j_n}, n_{n+1}\}$, tendo pelo menos dois arcos, é chamado de um ciclo em G se a subsequência $\{n_1, a_{j_1}, n_2, a_{j_2}, \dots, n_n\}$ é um caminho em G , com $n_1 = n_{n+1}$ e $a_{j_n} \neq a_{j_1}$.

Como pode-se observar na Figura 4 (b), o ciclo de G é descrito por

$$C = \{1, a_1, 2, a_4, 4, a_5, 3, a_7, 1\}$$

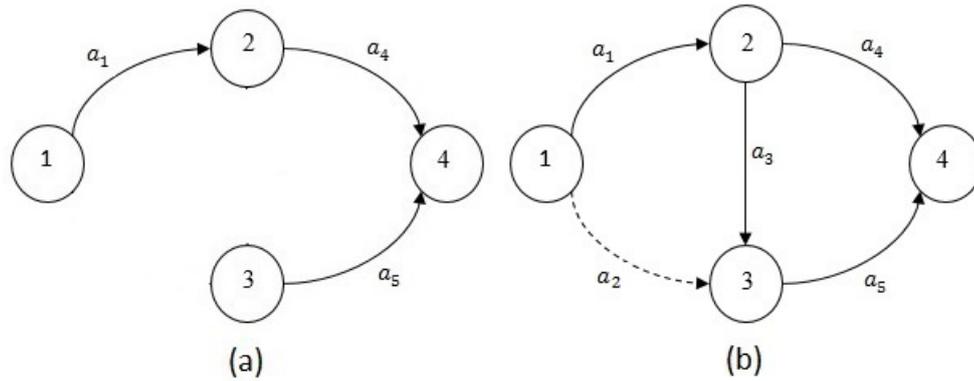


Figura 5 – (a) Caminho do grafo G ; (b) Ciclo do grafo G .

O comprimento de um caminho ou ciclo é o número de arcos no caminho ou ciclo. Para cada caminho ou ciclo P , com comprimento n , a orientação da sequência $O(P)$ de n elementos é definida como segue:

$$O(P) = \begin{cases} +1 & \text{se } a_{j_i} = (n_i, n_{i+1}) \\ -1 & \text{se } a_{j_i} = (n_{i+1}, n_i) \end{cases}$$

Para o caminho $\{1, a_1, 2, a_4, 4, a_5, 3\}$ ilustrado na Figura 3 a orientação da sequência é $\{+1, +1, -1\}$.

Algumas proposições demonstradas em (KENNINGTON, 1980) serão enunciadas a seguir. Essas proposições servem de suporte para resultados teóricos posteriores.

Proposição 2.1.1. Se uma sequência finita $P = \{n_1, a_{j_1}, n_2, a_{j_2}, \dots, n_n, a_{j_n}, n_{n+1}\}$ é um caminho ou ciclo em um grafo próprio G com matriz de incidência A , então:

$$\sum_{i=1}^{n-1} O_i(P)A(j_i) = e^{n_1} - e^{n_{n+1}} \tag{2.4}$$

Segue um exemplo para facilitar a compreensão da proposição 2.1.1:

A Figura 4(a) mostra o caminho $P = \{1, a_1, 2, a_4, 4, a_5, 3\}$ de um grafo G

Sendo assim:

$$\sum_{i=1}^3 O_i(P)A(j_i)$$

$$O_1(P)A_{j_1} + O_2(P)A_{j_2} + O_3(P)A_{j_3}$$

$$1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Atenção: e é o vetor canônico com entrada $+1$ correspondente aos vértices n e $n + 1$.

Proposição 2.1.2. Se $C = \{n_1, a_{j_1}, n_2, a_{j_2}, \dots, n_n, a_{j_n}, n_{n+1}\}$ é ciclo de um grafo próprio G com matriz de incidência A , então:

$$\sum_{i=1}^n O_i(C)A(j_i) = 0 \quad (2.5)$$

Para facilitar o entendimento da proposição 2.1.2, considere o ciclo

$$C = \{1, a_1, 2, a_4, 4, a_5, 3, a_7, 1\}$$

do grafo G representado pela Figura 4 (b).

Neste caso,

$$\sum_{i=1}^4 O_i(P)A(j_i)$$

$$O_1(P)A_{j_1} + O_2(P)A_{j_2} + O_3(P)A_{j_3} + O_4(P)A_{j_4}$$

$$1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Como consequência da proposição 2.1.2 temos que se $C = \{n_1, a_{j_1}, n_2, a_{j_2}, \dots, n_n, a_{j_n}, n_{n+1}\}$ é ciclo de um grafo próprio G com matriz de incidência A , então $\{A(j_i) : i = 1, \dots, n\}$ é linearmente dependente.

O conjunto de arcos $\{A_{j_1}, A_{j_2}, A_{j_3}, A_{j_4}\}$ que são representados por $\{a_1, a_4, a_5, a_7\}$ são linearmente dependentes, pois é possível escrevê-los como uma combinação linear da seguinte forma:

$$a_2 = a_1 + a_4 - a_5.$$

Um grafo $G = [N, R]$ é acíclico se não possui ciclos podendo ser formado a partir de N e R . Um grafo $G = [N, R]$ é conexo se, para cada par de nós distintos (i, j) um caminho pode ser formado a partir de i até j . Uma árvore τ é um grafo conexo e acíclico. Uma árvore τ é um subgrafo gerador de G , também chamada de árvore geradora para G .

Proposição 2.1.3. Seja A uma matriz de incidência nó-arco para um grafo próprio G . Seja $\tau = [N, R]$ um subgrafo de G , isto é, uma árvore contendo pelo menos dois nós. Então $\{A(j) : a_j \in R\}$ é linearmente independente.

Proposição 2.1.4. Seja A uma matriz de incidência nó-arco para um grafo próprio G conexo e com n nós. Então o posto da matriz A , número de linhas ou colunas linearmente independentes, é $n - 1$.

Proposição 2.1.5. Seja A uma matriz de incidência nó-arco para um grafo próprio $G = [N, R]$, onde G possui n nós. Seja \hat{R} um subconjunto de R tal que $\{A(j) : a_j \in \hat{R}\}$ é linearmente independente com \hat{R} tendo $n - 1$ arcos. Então, $\tau = [N, \hat{R}]$ é uma árvore.

2.2 Caracterização de uma matriz básica para o Problema de Fluxo em Rede

Pela Proposição 2.1.4, a matriz de restrição para o problema não possui posto completo. Então o problema (2.1)-(2.3) passa ter a seguinte formulação:

$$\text{Min} \quad c^T x \quad (2.6)$$

$$\text{s.a.} \quad Ax + \mathbf{a}e^l = r \quad (2.7)$$

$$l \leq x \leq u \quad (2.8)$$

$$0 \leq \mathbf{a} \leq 0 \quad (2.9)$$

onde, l é um inteiro positivo não maior que o número de nós n com \mathbf{a} estritamente igual a zero. A solução ótima para (2.1) também será solução ótima para (2.6).

Proposição 2.2.1. Seja A uma matriz de incidência nó-arco para um grafo próprio conexo $G = [N, R]$ possuindo n nós. Seja $\tau = [N, \hat{R}]$ uma árvore geradora para G . Então, $v = \{A(j) : a_j \in \hat{R}\} \cup \{e^l\}$ gera E^n , isto é, existe um conjunto de colunas n a partir de $[A|e^l]$ que gera E^n .

Considere a seguinte árvore τ , representada na Figura 6:

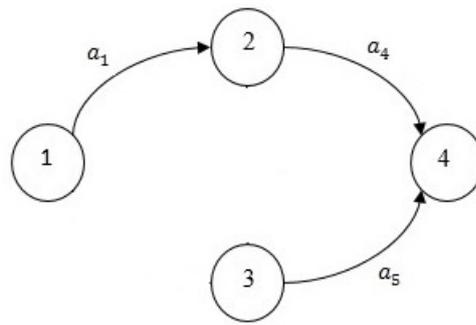


Figura 6 – (a) Representação de uma árvore τ de G .

Assim, o conjunto de vetores $v = \{a_1, a_4, a_5\}$ é linearmente independente mas não gera E^n .

Por outro lado, quando inclui-se um nó raiz a na árvore τ , tem-se:

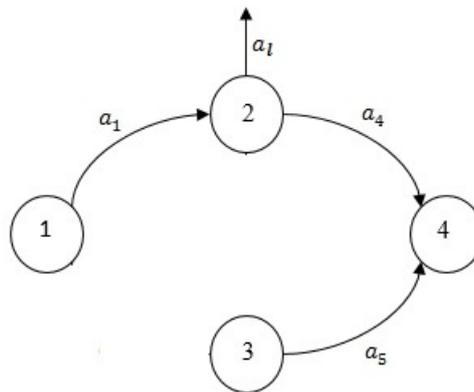


Figura 7 – Representação de uma árvore τ de G com um nó raiz $\mathbf{1}$.

Com isso, o conjunto de vetores $v = \{a_1, a_4, a_5, a\}$ é linearmente independente e gera E^n . Portanto é base.

Proposição 2.2.2. Seja A uma matriz de incidência nó-arco para um grafo próprio conexo $G = [N, R]$ com nó raiz $\mathbf{1}$. Se v é uma base para $[A|e^{\mathbf{1}}]$, então $e^{\mathbf{1}} \in v$ e $\tau = [N, \hat{R}]$ é uma árvore geradora para G , onde $\hat{R} = \{a_j : A(j) \in v\}$.

A partir das proposições acima, pode-se caracterizar bases para a equação (2.6).

Proposição 2.2.3. Seja A uma matriz de incidência nó-arco para um grafo próprio, conexo e enraizado com nó raiz $\mathbf{1}$. Uma base para $[A|e^{\mathbf{1}}]$ é um conjunto de arcos que compõe as colunas da matriz A correspondente a árvore geradora τ para G .

Proposição 2.2.4. Seja A uma matriz de incidência nó-arco para um grafo próprio, conexo e enraizado com nó raiz $\mathbf{1}$. Seja B uma base a partir de $[A|e^{\mathbf{1}}]$. Então, B pode ser colocada sempre na forma de uma matriz triangular. O algoritmo 2.2.1 descrito abaixo opera diretamente na árvore τ associada a matriz básica B .

Algoritmo 2.2.1. Algoritmo para triangularizar uma matriz básica B associada a τ

1. *Inicialização*

Faça \overline{B} ser uma base qualquer para o problema de fluxo em redes. Associe a essa \overline{B} uma árvore geradora $\tau(N, R)$ com nó raiz $\mathbf{1}$. Seja n o número de nós da árvore τ . Faça $i \leftarrow 1$.

2. *Encontre uma folha da árvore que não seja um nó raiz*

Faça $r \neq \mathbf{1}$, uma folha qualquer de τ , e faça a_s ser o arco da árvore τ incidente em r .

3. *Insira i – ésima linha e coluna*

Faça a i – ésima linha de \overline{B} corresponder ao nó r e faça a i – ésima coluna de \overline{B} corresponder ao arco a_s

4. *Reduza a árvore*

Se $i = n - 1$, vá para o passo 5; senão $\tau \leftarrow [N - \{r\}, R - \{a_s\}]$, $i \leftarrow i + 1$, e vá para o passo 2.

5. *Insira o nó e arco raiz*

Faça a n – ésima linha de \overline{B} corresponder ao nó $\mathbf{1}$, e faça a n – ésima coluna de \overline{B} ser e^n .

Para exemplificar, considere a matriz básica B (não triangular) associada a árvore τ da Figura 7.

Seja, por exemplo, a matriz básica B (não triangular) associada a τ :

$$\mathbf{B} = \begin{matrix} & a_4 & a_l & a_1 & a_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Aplicando o Algoritmo 2.2.1, obtêm-se a matriz básica B na forma triangular:

$$B = \begin{matrix} & a_5 & a_1 & a_4 & a_l \\ \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

2.3 Algoritmo Especializado para o Problema de Fluxo em Redes

A ideia do algoritmo de resolução para o problema de fluxo em redes de custo mínimo é melhorar a cada iteração o valor da função objetivo, conduzindo-a a diminuir (caso minimização) o valor da função objetivo. O algoritmo pesquisa somente as soluções básicas até encontrar a solução básica ótima viável, (LOESCH; HEIN, 1999), (LONGARAY, 2013). O algoritmo é inicializado a partir de uma solução básica viável conhecida. Particionando as matrizes A, c, x, l, u em variáveis básicas e não básicas tem-se:

$$A = [B|N], c = [c^B|c^N], x = [x^B|x^N], l = [l^B|l^N], e u = [u^B|u^N]$$

Então:

$$\text{Min} \quad c^B x^B + c^N x^N \tag{2.10}$$

$$\text{s.a.} \quad Bx^B + Nx^N = r \tag{2.11}$$

$$l^B \leq x^B \leq u^B \tag{2.12}$$

$$l^N \leq x^N \leq u^N \tag{2.13}$$

Isolando x^B em (2.11) tem-se:

$$x^B = B^{-1}r - B^{-1}Nx^N \tag{2.14}$$

Substituindo (2.14) em (2.10), (2.11) e (2.12) obtêm-se:

$$\text{Min} \quad c^B B^{-1}r + (c^N - c^B B^{-1}N)x^N \tag{2.15}$$

$$\text{s.a.} \quad l^B \leq B^{-1}r - B^{-1}Nx^N \leq u^B$$

$$l^N \leq x^N \leq u^N$$

Em problemas de rede de custo mínimo é garantido pelas proposições anteriores, que o cálculo matricial

$$(c^N - c^B B^{-1}N) \tag{2.16}$$

Da expressão (2.16) pode ser efetuado diretamente no grafo que representa a rede, eliminando o peso computacional do cálculo da matriz básica B^{-1} quando o algoritmo não é especializado. Para realizar o cálculo de (2.16) é necessário primeiramente determinar:

$$\pi = c^B B^{-1} \quad (2.17)$$

O que significa determinar os π_i 's relativo aos nós da árvore τ_B .

No entanto, a equação (2.17) é calculada resolvendo o sistema linear:

$$\pi B = c^B \quad (2.18)$$

Logo, o cálculo dos π_i 's, a partir de (2.18) pode ser obtido fazendo uso da árvore τ_B , com nó raiz **1** e resume-se a determinar :

$$\begin{cases} \pi_l = 0 \\ \pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} = c_j \quad \forall a_j \in \tau_B \end{cases}$$

Todos os π_i 's são unicamente determinados porque a árvore é enraizada, conexa e não possui ciclos. Salienta-se que o cálculo da matriz B^{-1} é desnecessário.

Substituindo (2.17) em (2.16) tem-se:

$$c^N - \pi N \quad (2.19)$$

Equivalente a:

$$c_j - \pi_{F(j)} + \pi_{T(j)} \quad (2.20)$$

O cálculo (2.20) é realizado para determinar se a função objetivo pode ser melhorada com a entrada da variável não básica x^N .

Assim, são definidos dois conjuntos:

$$\Psi_1 = \{a_j : x_j = l_j \quad \text{e} \quad -\pi_{F(j)} + \pi_{T(j)} + c_j < 0\}$$

e

$$\Psi_2 = \{a_j : x_j = u_j \quad \text{e} \quad -\pi_{F(j)} + \pi_{T(j)} + c_j > 0\}$$

Se existir algum x^N pertencente à $\Psi_1 \cup \Psi_2$, então a função objetivo pode ser melhorada.

Somente quando $\Psi_1 \cup \Psi_2 = \emptyset$ a solução ótima será encontrada.

NOTA: De acordo com a literatura, a fim de padronizar a notação as desigualdades apresentadas nos conjuntos Ψ_1 e Ψ_2 , as desigualdades serão multiplicadas por -1 .

Considerando $\Psi_1 \cup \Psi_2 \neq \emptyset$, uma variável não básica $x_k \in \Psi_1 \cup \Psi_2$ é selecionada a entrar na base.

O i –ésimo elemento do produto matricial $c^B B^{-1} N$ é dado por:

$$c^B B^{-1} N(i) \quad (2.21)$$

Como a coluna $N_{(i)} = A_{(k)}$ então

$$c^B B^{-1} A_{(k)} \quad (2.22)$$

A expressão (2.22) pode ser efetuada diretamente no grafo que representa a rede, eliminando o peso computacional do cálculo da matriz básica B^{-1} quando o algoritmo não é especializado. Para realizar o cálculo de (2.22) é necessário primeiro determinar:

$$y = B^{-1} A_{(k)} \quad (2.23)$$

O que significa determinar $O_i(P)$, a orientação dos arcos na árvore τ_B .

No entanto, a equação (2.23) é calculada resolvendo o sistema linear:

$$By = A_{(k)} = e^{F(k)} - e^{T(k)} \quad (2.24)$$

Fazendo o uso da árvore τ_B o sistema linear (2.24) pode ser resolvido, sendo desnecessário o cálculo da matriz B^{-1} .

Substituindo (2.23) em (2.22) tem-se:

$$c^B y \quad (2.25)$$

Equivalente a:

$$\sum_{i=1}^{i-n} c_{j_i} O_i(P) \quad (2.26)$$

Pela proposição 2.1.1 a equação (2.4) indica que o teste de razão pode ser especializado, no cálculo de $y = B^{-1} A_{(k)}$. Se os arcos na árvore τ_B são ordenados como:

$a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kI}$ correspondendo as colunas \bar{I} de B . Então, as componentes de y podem ser determinadas pela orientação da sequência

$$y_n = \begin{cases} O_i(P) & \text{se } a_{kn} = a_{ji} \in P \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.27)$$

E o cálculo de Δ_1 e Δ_2 no teste de razão é especializado como:

$$\Delta_1 \leftarrow \min_{O_i(P)=\delta} \{x_{ji} - l_{ji}, \infty\} \quad (2.28)$$

$$\Delta_2 \leftarrow \min_{-O_i(P)=\delta} \{u_{ji} - x_{ji}, \infty\} \quad (2.29)$$

onde

$$\Delta \leftarrow \min\{\Delta_1, \Delta_2, u_k - l_k\} \quad (2.30)$$

O teste de razão determina o valor Δ , que será adicionado ou subtraído, ao fluxo do arco que entra (arco que encontra-se na sua capacidade mínima ou máxima respectivamente). Esse valor Δ é então repassado para todos arcos básicos que formam ciclo com o arco que entra. Cabe salientar, que no cálculo do Δ é preciso levar em consideração o sentido de fluxo dos arcos básicos formados com o arco que entra.

Assim o algoritmo para o problema de rede de custo mínimo pode ser desenhado:

Algoritmo 2.3.1. Algoritmo Especializado para Problemas de Rede de Custo Mínimo

1. *Inicialização*

Seja $[x^B|x^N]$ uma solução básica viável com árvore τ_B . Calcule π através de 2.18 utilizando τ_B com nó raiz **1**.

2. *Variável candidata a entrar na base.*

Sejam os conjuntos:

$$\Psi_1 = \{a_j : x_j = l_j \text{ e } \pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} - c_j > 0\}$$

e

$$\Psi_2 = \{a_j : x_j = u_j \text{ e } \pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} - c_j < 0\}$$

Se $\Psi_1 \cup \Psi_2 = \emptyset$, o algoritmo termina com a solução ótima. Caso contrário, seleciona-se $a_k \in \Psi_1 \cup \Psi_2$ para entrar na base.

$$\text{Assim, } \delta \leftarrow \begin{cases} +1 & \text{se } k \in \Psi_1 \\ -1 & \text{se } k \in \Psi_2 \end{cases}$$

indicando se o fluxo aumenta ou diminui de acordo com a capacidade mínima ou máxima dos arcos, respectivamente.

3. *Teste de Razão.*

Seja, $P = \{n_1, a_{j1}, n_2, a_{j2}, \dots, n_n, a_{jn}, n_{n+1}\}$, o caminho na árvore τ_B unindo $F(k)$ ao $T(k)$.

Faça

$$\Delta_1 \leftarrow \min_{O_i(P)=\delta} \{x_{ji} - l_{ji}, \infty\}$$

$$\Delta_2 \leftarrow \min_{-O_i(P)=\delta} \{u_{ji} - x_{ji}, \infty\}$$

$$\Delta \leftarrow \min\{\Delta_1, \Delta_2, u_k - l_k\}$$

4. *Atualização dos Fluxos.*

Faça $x_k \leftarrow x_k + \Delta\delta$. Para todo $a_j \in P$, faça $x_{ji} \leftarrow x_{ji} - \Delta\delta O_i(P)$. Se $\Delta = u_k - l_k$, retorne ao item 2.

5. *Atualização da Árvore e Variáveis Duais.*

Sejam os conjuntos:

$$\Psi_3 = \{a_{ji} : x_{ji} = l_{ji} \text{ onde } O_i(P) = \delta\}$$

e

$$\Psi_4 = \{a_{ji} : x_{ji} = u_{ji} \text{ onde } -O_i(P) = \delta\}$$

Selecione algum $a_m \in \Psi_3 \cup \Psi_4$. Permute a_m em τ_B com a_k , atualize as variáveis duais e retorne a item 2.

A seguir será mostrado, através de um exemplo, o algoritmo especializado 2.3.1 descrito anteriormente:

2.4 Uma prova conceitual para verificar a teoria matemática do algoritmo especializado

Seja o problema de minimizar a função:

$$\text{Min}Z = x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5$$

Com as seguintes restrições:

s.a:

$$x_1 + x_2 = 10$$

$$-x_1 + x_3 + x_4 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + x_5 = 0$$

$$-x_4 - x_5 = -10$$

Onde cada variável é limitada inferiormente e superiormente pelos seguintes valores:

$$0 \leq x_1 \leq 10; 0 \leq x_2 \leq 5; 0 \leq x_3 \leq 9; 0 \leq x_4 \leq 10; 0 \leq x_5 \leq 8$$

A Figura 8 representa o modelo de rede do problema descrito anteriormente

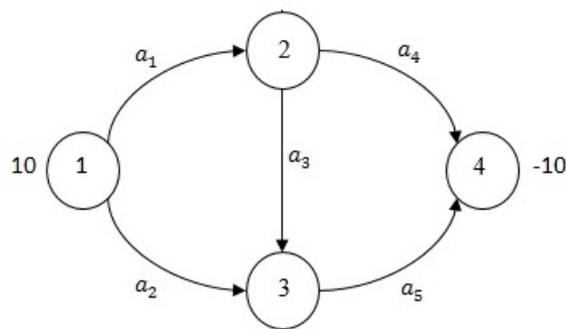


Figura 8 – Representação do grafo G

A partir de uma solução básica inicial $x_1 = 5$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 5$ e $x_5 = 5$ o valor da função objetivo é:

$$Z = 1(5) + 4(5) + 2(0) + 6(5) + 3(5) = 70$$

1ª ITERAÇÃO:

1. Inicialização

Seja $x^B = [x_1 \ x_4 \ x_5]$ e $x^N = [x_2 \ x_3]$ com a árvore τ_B representada na Figura 9:

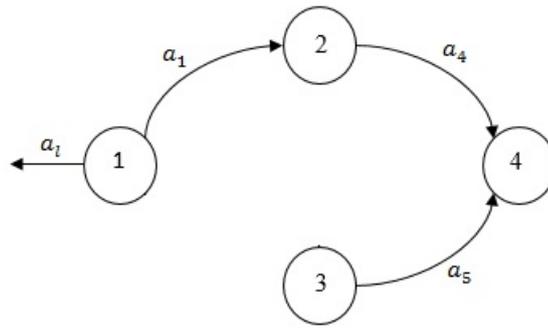


Figura 9 – Árvore básica τ_B do grafo G

Cálculo dos π_i 's de acordo com (2.18)

$$\pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} = c_j$$

$$\pi_1 = 0$$

$$\pi_1 - \pi_2 = 1 \implies \pi_2 = -1$$

$$\pi_2 - \pi_4 = 6 \implies \pi_4 = -7$$

$$-\pi_4 + \pi_3 = 3 \implies \pi_3 = -4$$

2. Variável candidata a entrar na base

Através de (2.20) determina-se:

$$a_j : x_j = l_j \text{ e } \pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} - c_j > 0 \text{ ou } a_j : x_j = u_j \text{ e } \pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} - c_j < 0$$

$$a_2 : x_2 = 5 \text{ e } \pi_1 - \pi_3 - c_{a_2} = 0 + 4 - 4 = 0$$

$$a_3 : x_2 = 0 \text{ e } \pi_2 - \pi_3 - c_{a_3} = -1 + 4 - 2 = +1 > 0$$

Como $a_3 : \pi_{F(3)} - \pi_{T(3)} - c_3 > 0$ e a_3 está no limite inferior, então $a_3 \in \Psi_1$

Logo, a_3 é a variável que irá entrar na base.

Portanto,

$$\delta \leftarrow 1$$

Isso implica que a variável a_3 aumentará de valor, já que encontra-se no seu limite inferior.

3. Teste de Razão

A Figura 10, representa o ciclo formado com o arco a_3 que entra na base. O ciclo é formado pelo caminho $P = \{2, a_4, 4, a_5, 3\}$ na árvore unindo o nó 2 ao nó 3.

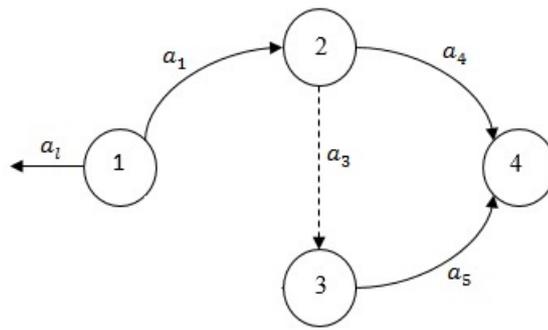


Figura 10 – Ciclo formado na árvore com a entrada do arco a_3

A orientação dos arcos básicos a_4 e a_5 no caminho P unindo o nó 2 ao nó 3 são:

$$O_4(P) = 1$$

$$O_5(P) = -1$$

Cálculo dos Deltas de acordo com (2.28), (2.29) e (2.30):

$$\Delta_1 = \min_{O_i(P)=\delta} \{5 - 0, \infty\} = 5$$

$$\Delta_2 = \min_{-O_i(P)=\delta} \{8 - 5, \infty\} = 3$$

$$\Delta = \min\{\Delta_1, \Delta_2, 9 - 0\} = 3$$

4. Atualização dos Fluxos

$$x_k \leftarrow x_k + \Delta\delta$$

$$x_3 \leftarrow 0 + 3.1 \implies x_3 \leftarrow 3$$

$$x^B \leftarrow x^B - \Delta\delta O_i(P)$$

$$x_4 \leftarrow 5 - 3.1.1 \implies x_4 \leftarrow 2$$

$$x_5 \leftarrow 5 - 3.1.(-1) \implies x_5 \leftarrow 8$$

Como a variável x_5 atingiu seu limite superior ela é candidata a sair da base.

5. Atualização da Árvore e Variáveis Duais

Como a variável a_5 atingiu seu limite superior ela irá sair da base.

Assim, tem-se a nova solução:

$$\text{Solução: } x_1 = 5, x_2 = 5, x_3 = 3, x_4 = 2, x_5 = 8.$$

$$x^B = [x_1 \quad x_4 \quad x_3] \text{ e } x^N = [x_2 \quad x_5], \text{ com o valor da função objetivo } Z=67.$$

2ª ITERAÇÃO:

1. Inicialização

Seja $x^B = [x_1 \ x_4 \ x_3]$ e $x^N = [x_2 \ x_5]$ com a árvore τ_B representada na Figura 11:

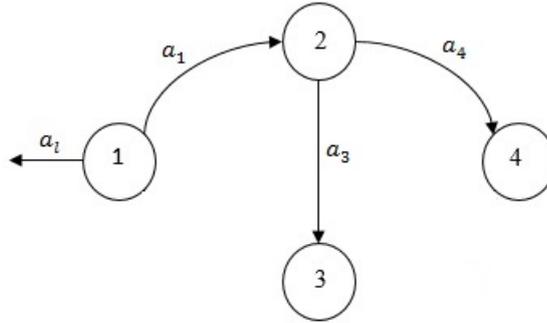


Figura 11 – Árvore básica x^B do grafo G

Cálculo dos π_i 's:

$$\pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} = c_j$$

$$\pi_1 = 0$$

$$\pi_1 - \pi_2 = 1 \implies \pi_2 = -1$$

$$\pi_2 - \pi_3 = 2 \implies \pi_3 = -3$$

$$\pi_2 - \pi_4 = 6 \implies \pi_4 = -7$$

2. Variável candidata a entrar na base

$$a_j : x_j = l_j \text{ e } \pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} - c_j > 0 \text{ ou } a_j : x_j = u_j \text{ e } \pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} - c_j < 0$$

$$a_2 : x_2 = 5 \text{ e } \pi_1 - \pi_3 - c_{a_2} = 0 + 3 - 4 = -1 < 0$$

$$a_5 : x_5 = 8 \text{ e } \pi_3 - \pi_4 - c_{a_5} = -3 + 7 - 3 = +1 > 0$$

Como $a_2 : \pi_{F(2)} - \pi_{T(2)} - c_2 < 0$ e a_2 está no limite superior, então $a_2 \in \Psi_2$

Logo, a_2 é a variável que irá entrar na base.

Portanto,

$$\delta \leftarrow -1$$

Isso implica que a variável a_2 terá seu valor reduzido, já que encontra-se no seu limite superior.

3. Teste de Razão

Ao entrar o arco a_2 , representado pela Figura 12, obtêm-se o caminho $P = \{1, a_1, 2, a_3, 3\}$ na árvore unindo o nó 1 ao nó 3.

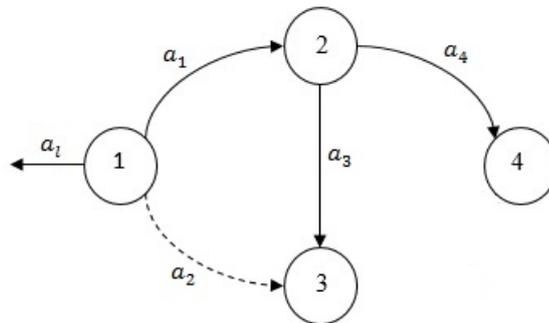


Figura 12 – Ciclo formado na árvore com a entrada do arco a_2

A orientação dos arcos básicos a_1 e a_3 quando o arco a_2 entra na base são:

$$O_1(P) = 1$$

$$O_3(P) = 1$$

Cálculo dos Deltas:

$$\Delta_2 = \min_{-O_i(P)=\delta} \{10 - 5, 9 - 3, \infty\} = 5$$

$$\Delta = \min\{\Delta_1, \Delta_2, 5 - 0\} = 5$$

4. Atualização dos Fluxos

$$x_k \leftarrow x_k + \Delta\delta$$

$$x_2 \leftarrow 5 + 5 \cdot (-1) \implies x_2 \leftarrow 0$$

$$x^B \leftarrow x^B - \Delta\delta O_i(P)$$

$$x_1 \leftarrow 5 - 5 \cdot (-1) \cdot 1 \implies x_1 \leftarrow 10$$

$$x_3 \leftarrow 3 - 5 \cdot (-1) \cdot 1 \implies x_3 \leftarrow 8$$

5. Atualização da Árvore e Variáveis Duais

Como a variável a_1 atingiu seu limite superior ela irá sair da base.

Assim, tem-se a nova solução:

Solução: $x_1 = 10, x_2 = 0, x_3 = 8, x_4 = 2, x_5 = 8$.

$$x^B = [x_2 \quad x_4 \quad x_3] \text{ e } x^N = [x_1 \quad x_5]$$

$$Z = 62$$

3ª ITERAÇÃO:

1. Inicialização

Seja $x^B = [x_2 \ x_4 \ x_3]$ e $x^N = [x_1 \ x_5]$ com a árvore τ_B representada na Figura 13:

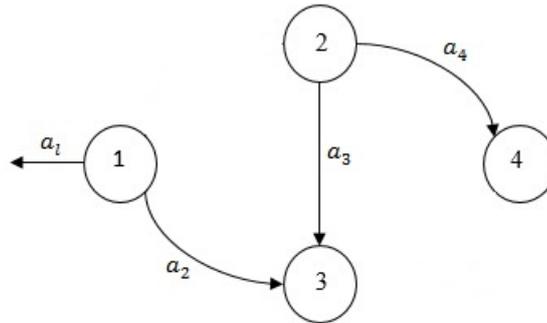


Figura 13 – Árvore básica x^B do grafo G

Cálculo dos π_i 's:

$$\pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} = c_j$$

$$\pi_1 = 0$$

$$\pi_1 - \pi_3 = 4 \implies \pi_3 = -4$$

$$\pi_2 - \pi_3 = 2 \implies \pi_2 = -2$$

$$\pi_2 - \pi_4 = 6 \implies \pi_4 = -8$$

2. Variável candidata a entrar na base

$$a_j : x_j = l_j \text{ e } \pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} - c_j > 0 \text{ ou } a_j : x_j = u_j \text{ e } \pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} - c_j < 0$$

$$a_1 : x_1 = 10 \text{ e } \pi_1 - \pi_2 - c_{a_1} = 0 + 2 - 1 = 1 > 0$$

$$a_5 : x_5 = 8 \text{ e } \pi_3 - \pi_4 - c_{a_5} = -4 + 8 - 3 = +1 > 0$$

Como o cálculo das variáveis a_1 e a_2 resulta em $\pi_{F(j)} - \pi_{T(j)} - c_j > 0$ e ambas estão no limite superior, isso implica que elas não pertencem ao Ψ_1 e portanto, não podem entrar na base.

Sendo assim, a solução ótima do problema é dada por:

$$\text{Solução: } x_1 = 10, x_2 = 0, x_3 = 8, x_4 = 2, x_5 = 8.$$

$$Z = 62$$

O exemplo apresentado foi resolvido na planilha eletrônica Excel e também utilizando a ferramenta solver.

O **Apêndice A** mostra os cálculos matriciais utilizados quando o algoritmo aplicado não é especializado.

O **Apêndice B** mostra a ferramenta solver, como o problema de rede pode ser resolvido de uma maneira mais prática.

3 *Grafos*: ferramenta computacional para aprendizagem e resolução de problemas reais da Teoria dos Grafos

Nesse capítulo será apresentado uma breve introdução à Ferramenta Computacional *Grafos* e sua utilização na resolução do problema de fluxos em redes.

3.1 Ferramenta Computacional *Grafos*

A ferramenta *Grafos* foi desenvolvida por Alejandro Rodríguez Villalobos e tem como principal objetivo o desenvolvimento de uma ferramenta computacional que facilita a aprendizagem e a resolução de problemas reais em Teoria dos Grafos. O projeto *Grafos* começou no ano de 2003 como parte de um projeto de pesquisa e desenvolvimento de aplicações de software de design modular voltado para o ensino, pesquisa e trabalho profissional de engenharia de organização industrial. E segue ativo em processo de programação de novos algoritmos, incorporação de novas funções e geração de documentação atualizada.

Segundo (VILLALOBOS, 2006), um grafo pode representar o modelo de uma realidade empresarial em forma de rede e este modelo poderá ser analisado de diferentes pontos de vista, graças aos algoritmos e funções implementadas na ferramenta. É possível com a ferramenta desenhar, modelar, resolver e analisar, fazendo com que o usuário tenha liberdade absoluta para tratar e abordar os problemas de Teoria dos Grafos.

3.2 Tutorial para Ferramenta Computacional *Grafos*

Nesta seção será apresentado um breve tutorial sobre a utilização da ferramenta computacional *Grafos* para análise de fluxos, obtendo um custo mínimo em problemas de transporte, tendo como referência o exemplo estudado no capítulo 2.

1. Criar um novo documento

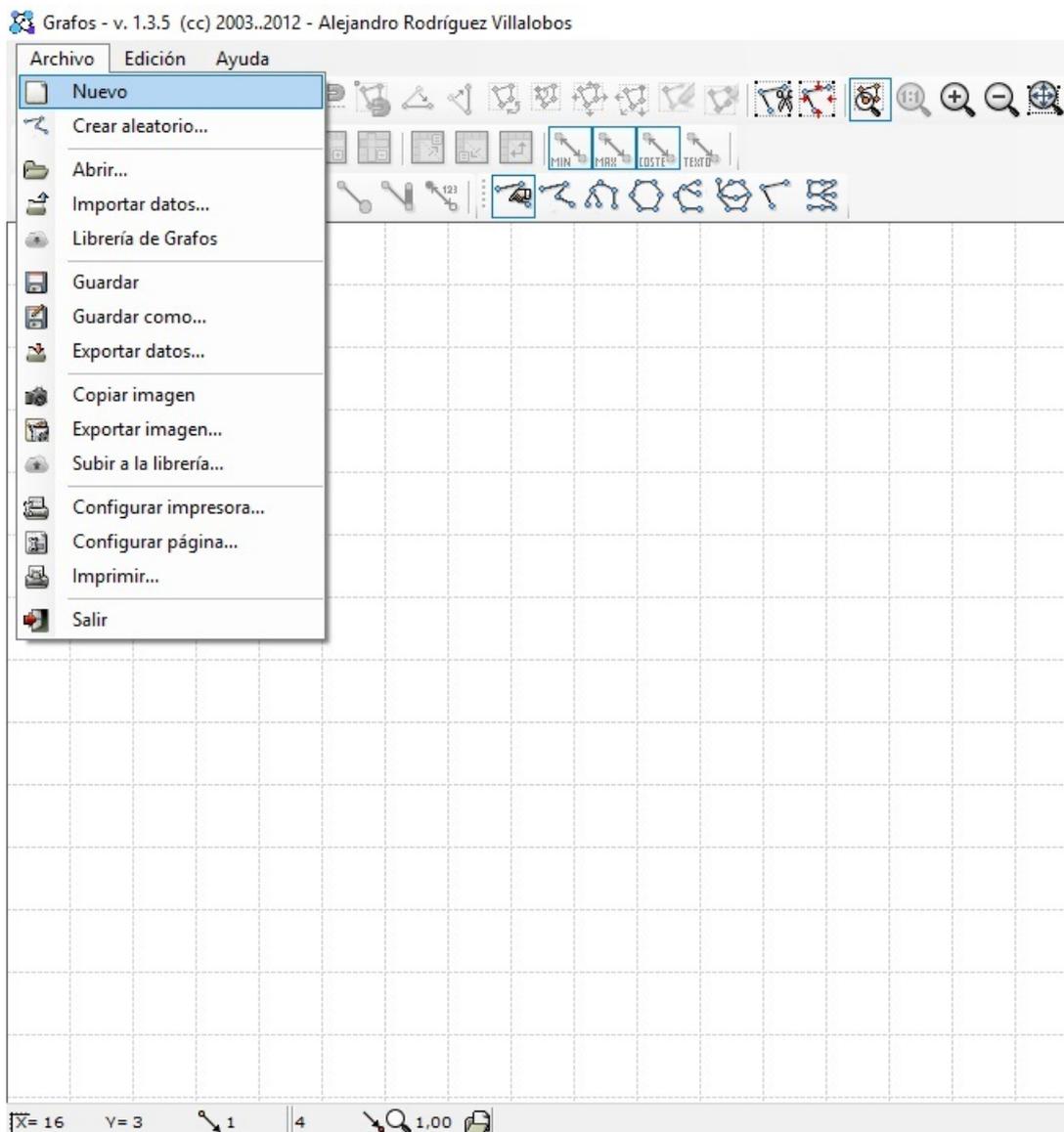


Figura 14 – Novo documento

2. Seleccionar a opção “tabla” para inserir os dados do problema de transporte

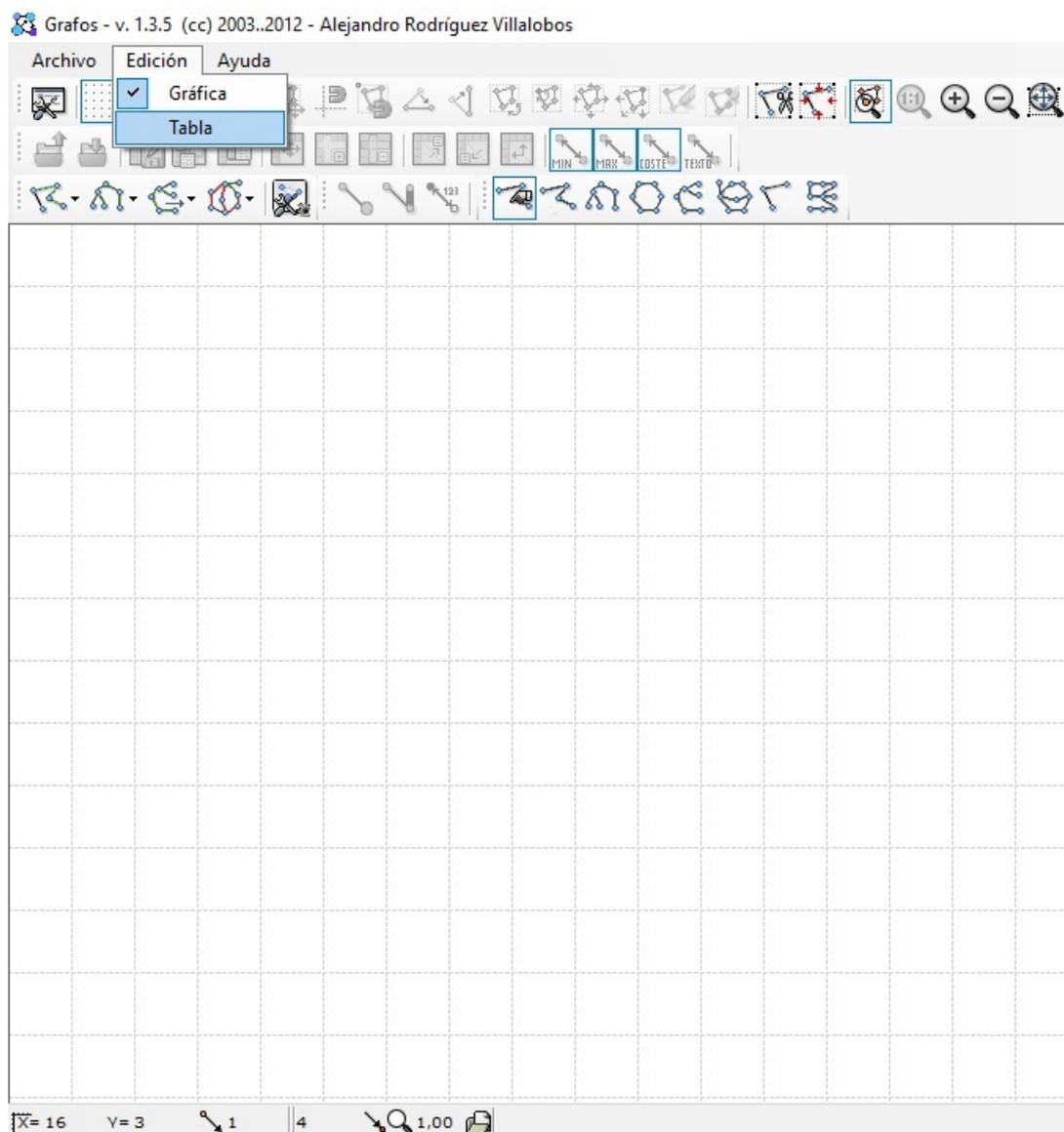


Figura 15 – Opção Tabela

3. Inserir “Total Nodos”, no eemplo da seção 2.4

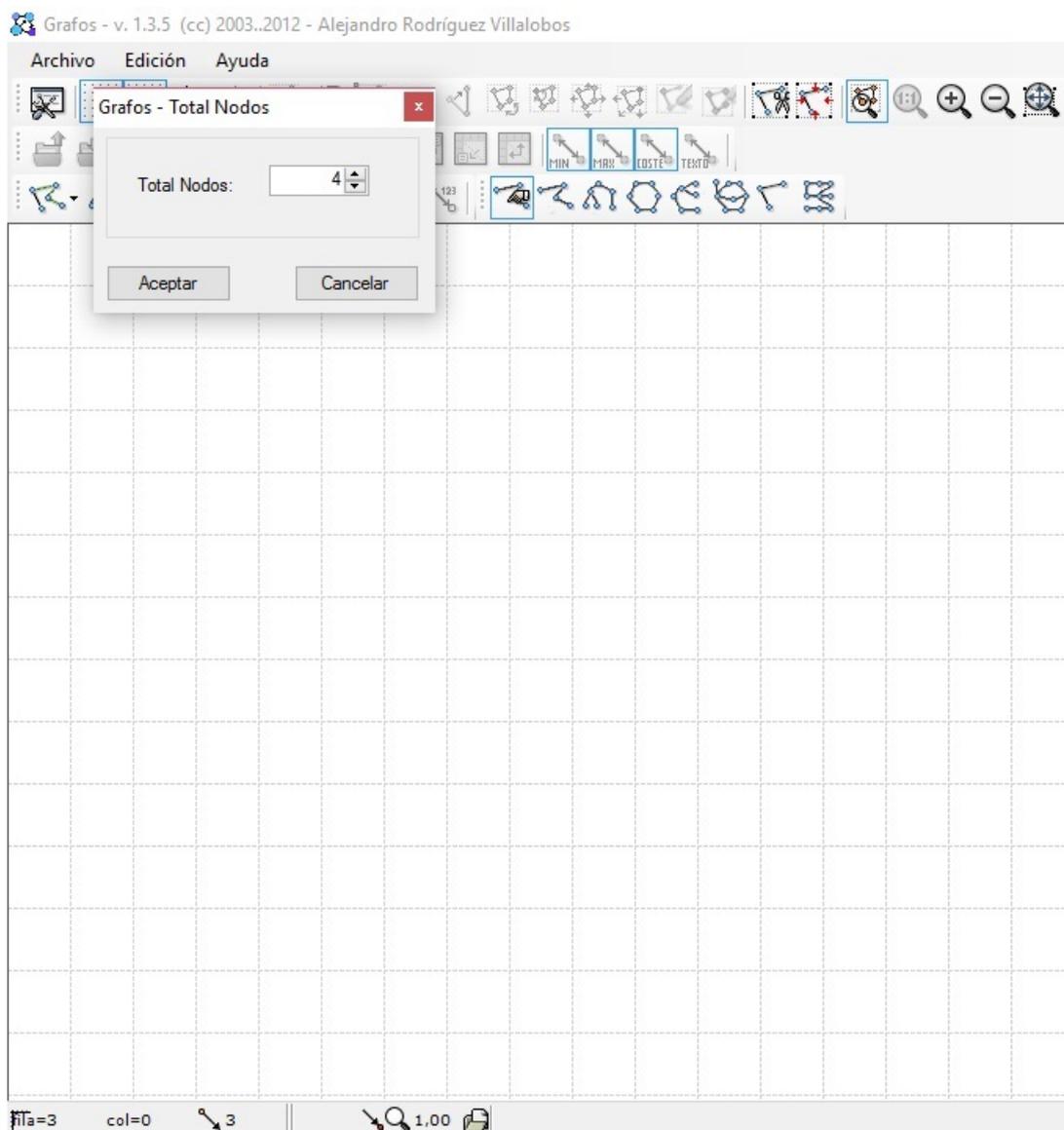


Figura 16 – Total de nós

4. Inserir o valor dos nós, sendo negativo o valor dos nós “origem” e positivo o valor dos nós “destino”

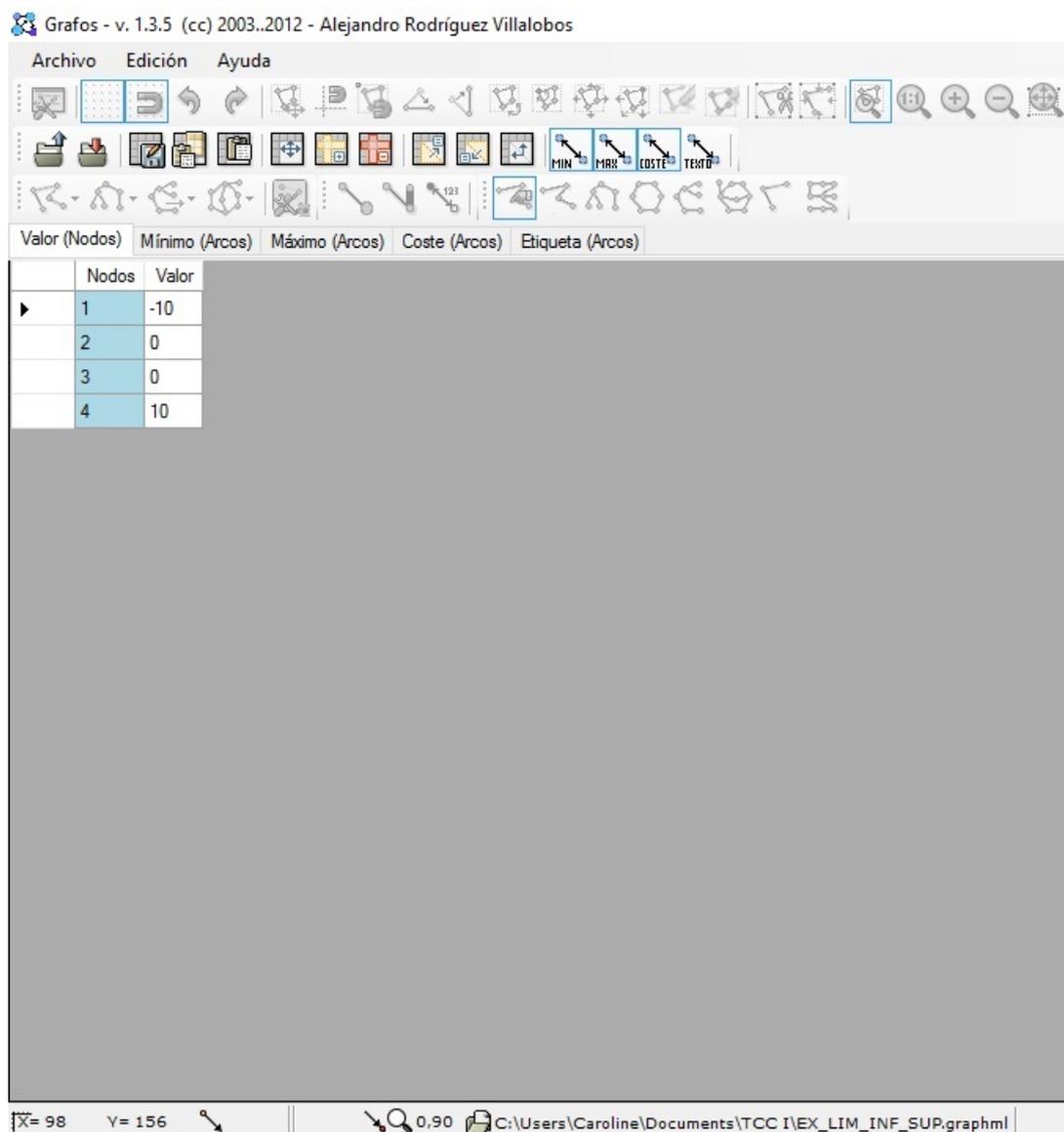


Figura 17 – Valor dos nós

5. Inserir o valor dos custos dos arcos de acordo com a Função Objetivo

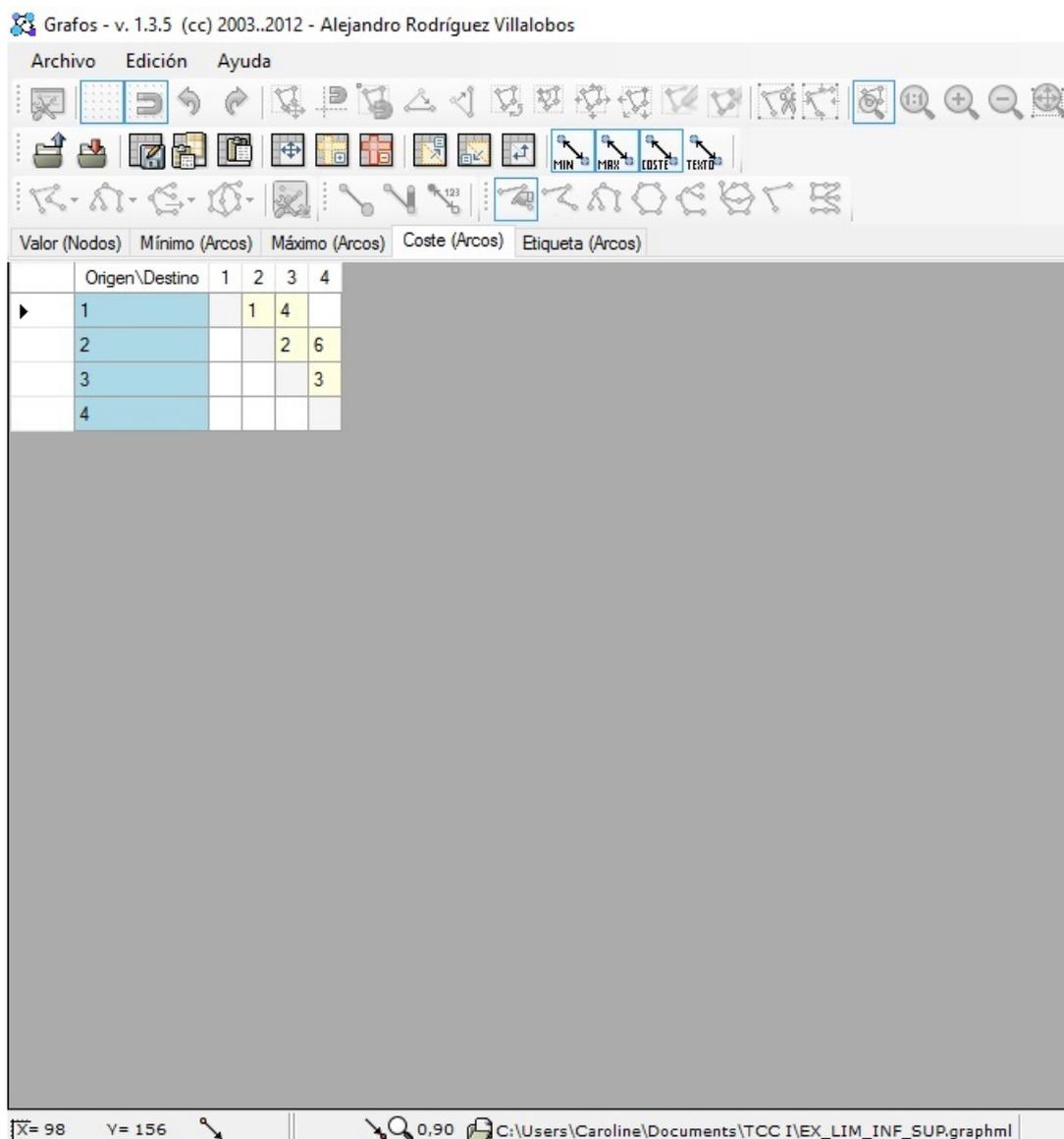


Figura 18 – Valor dos custos

6. Inserir o limite inferior dos arcos

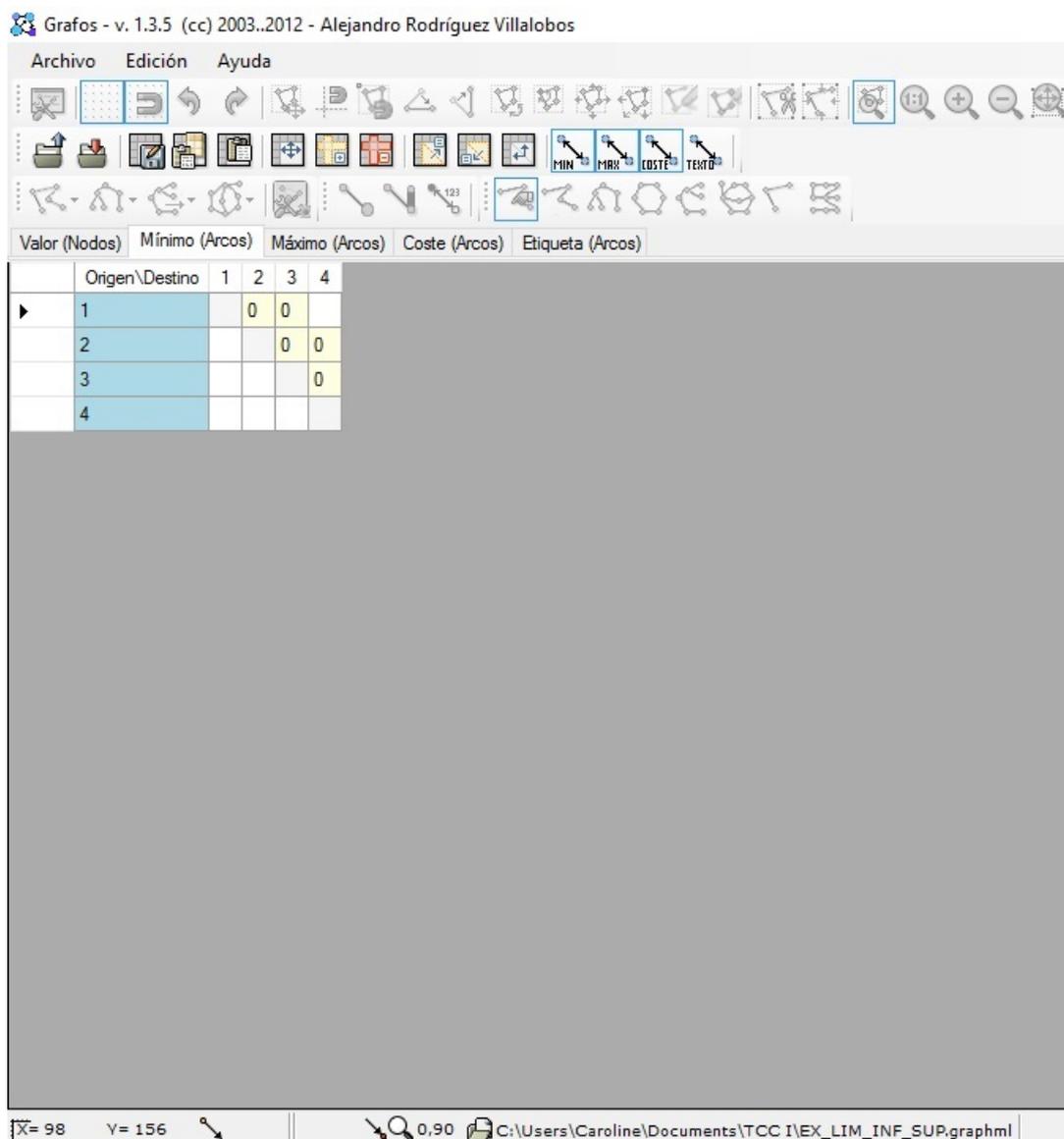


Figura 19 – Limite inferior

7. Inserir o limite superior dos arcos

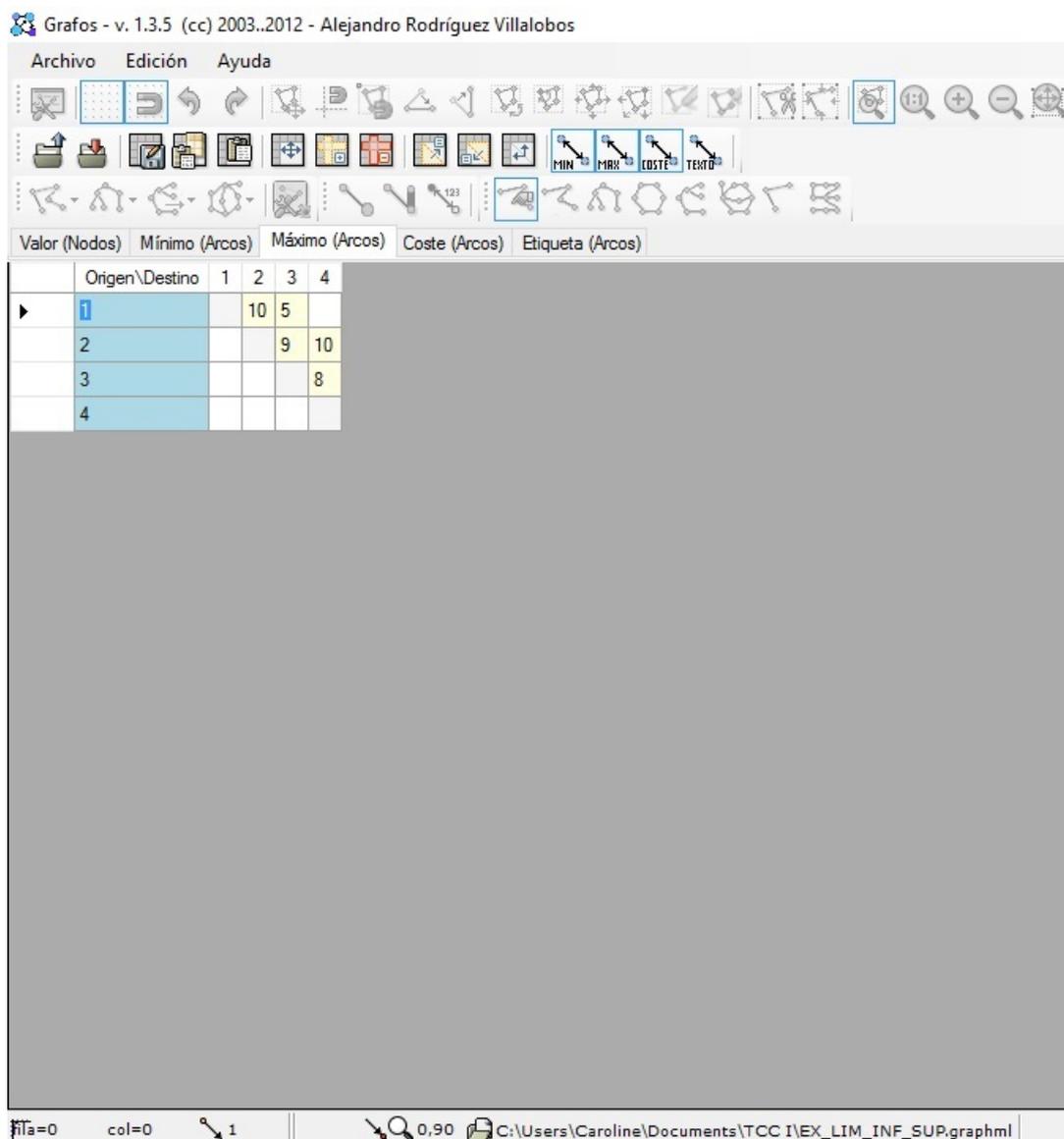


Figura 20 – Limite superior

8. Clicar no botão “Edición” e em seguida “Gráfica”

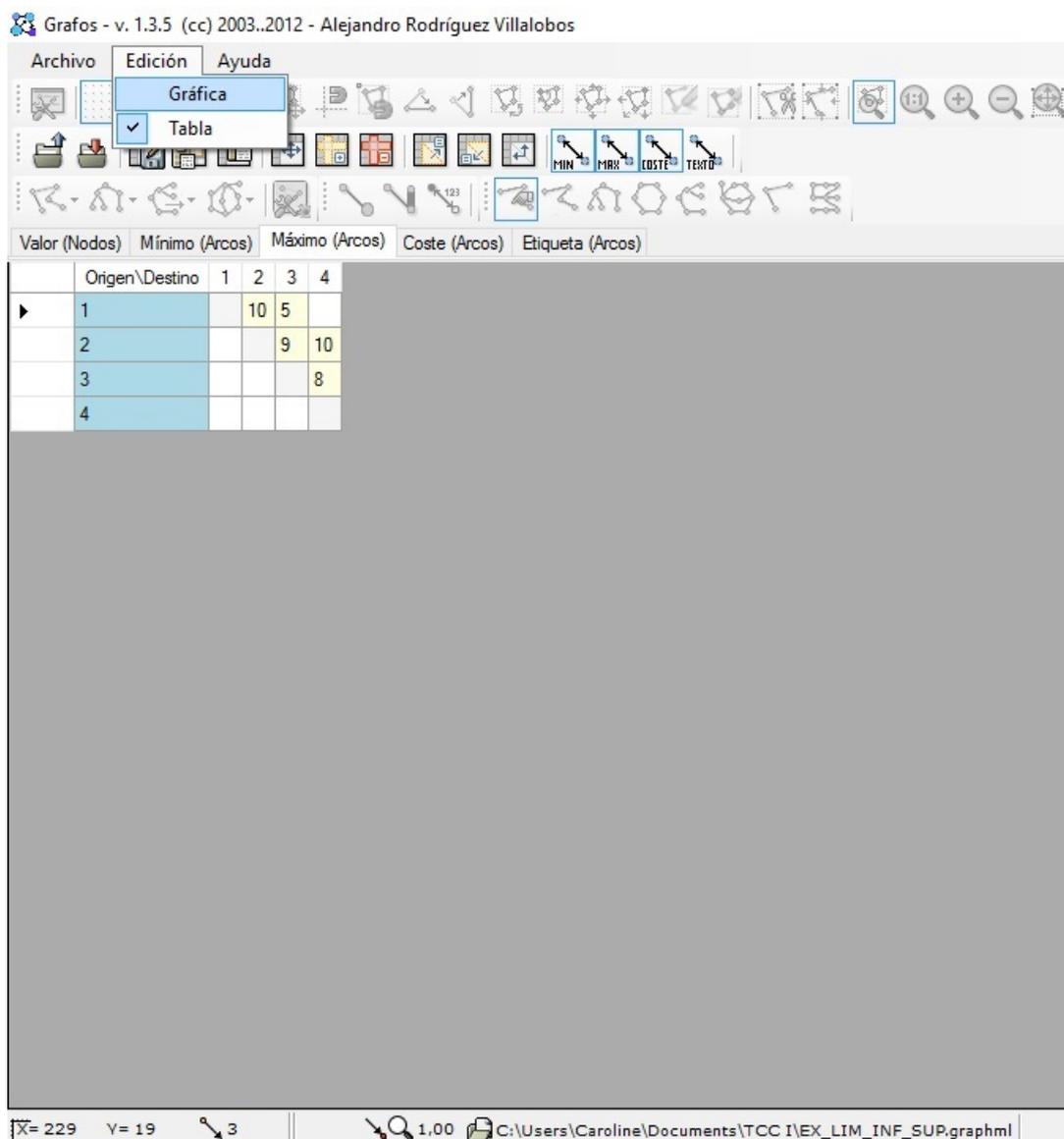


Figura 21 – Opção Gráfico

9. Visualizar graficamente o problema de transporte proposto

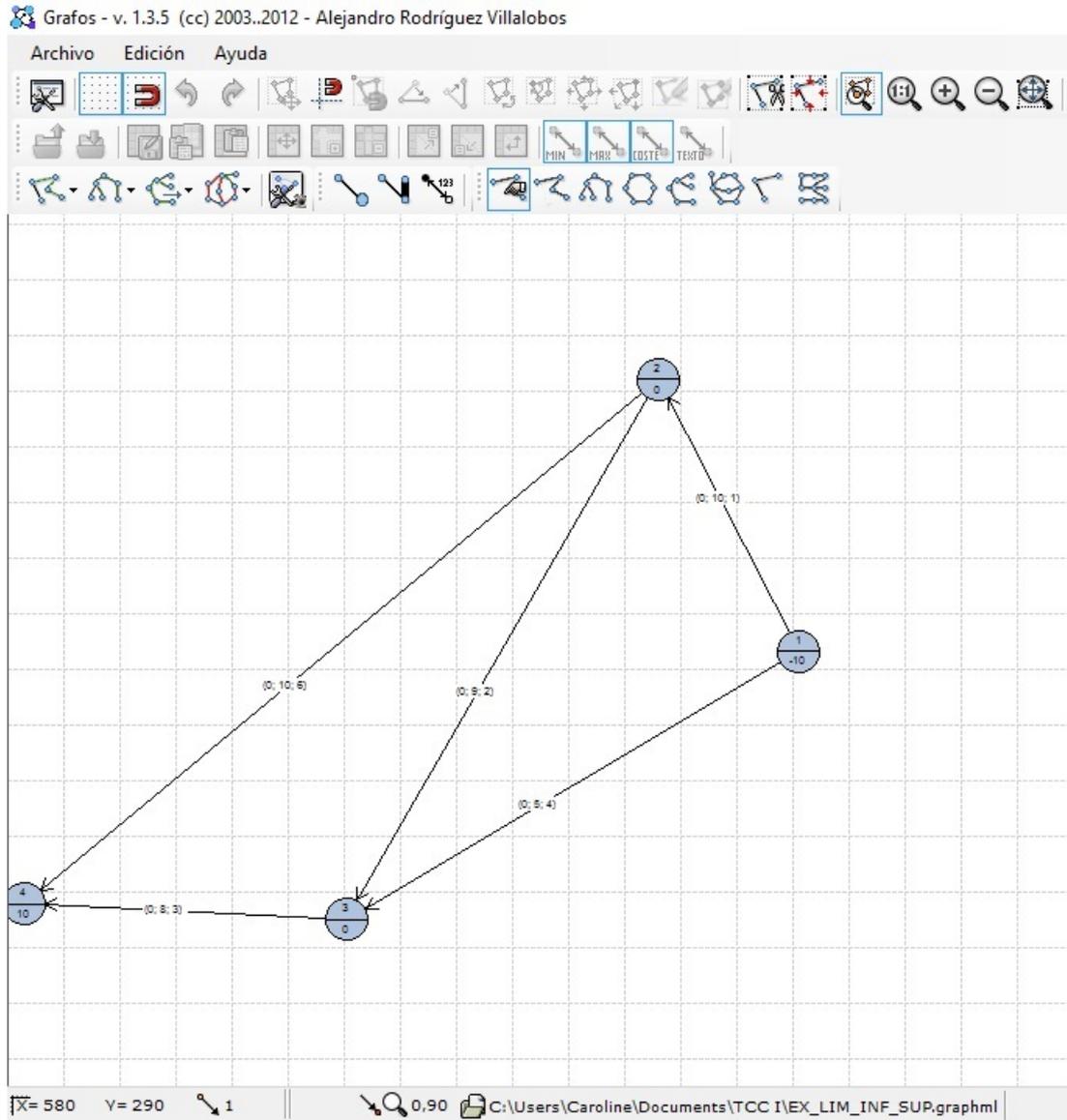


Figura 22 – Gráfico do problema proposto

10. Para obter a análise final do problema de transporte e o custo mínimo da função objetivo clicamos no botão “Análisis de flujos” e em seguida na opção “Transbordo equilibrado a coste mínimo – MILP”

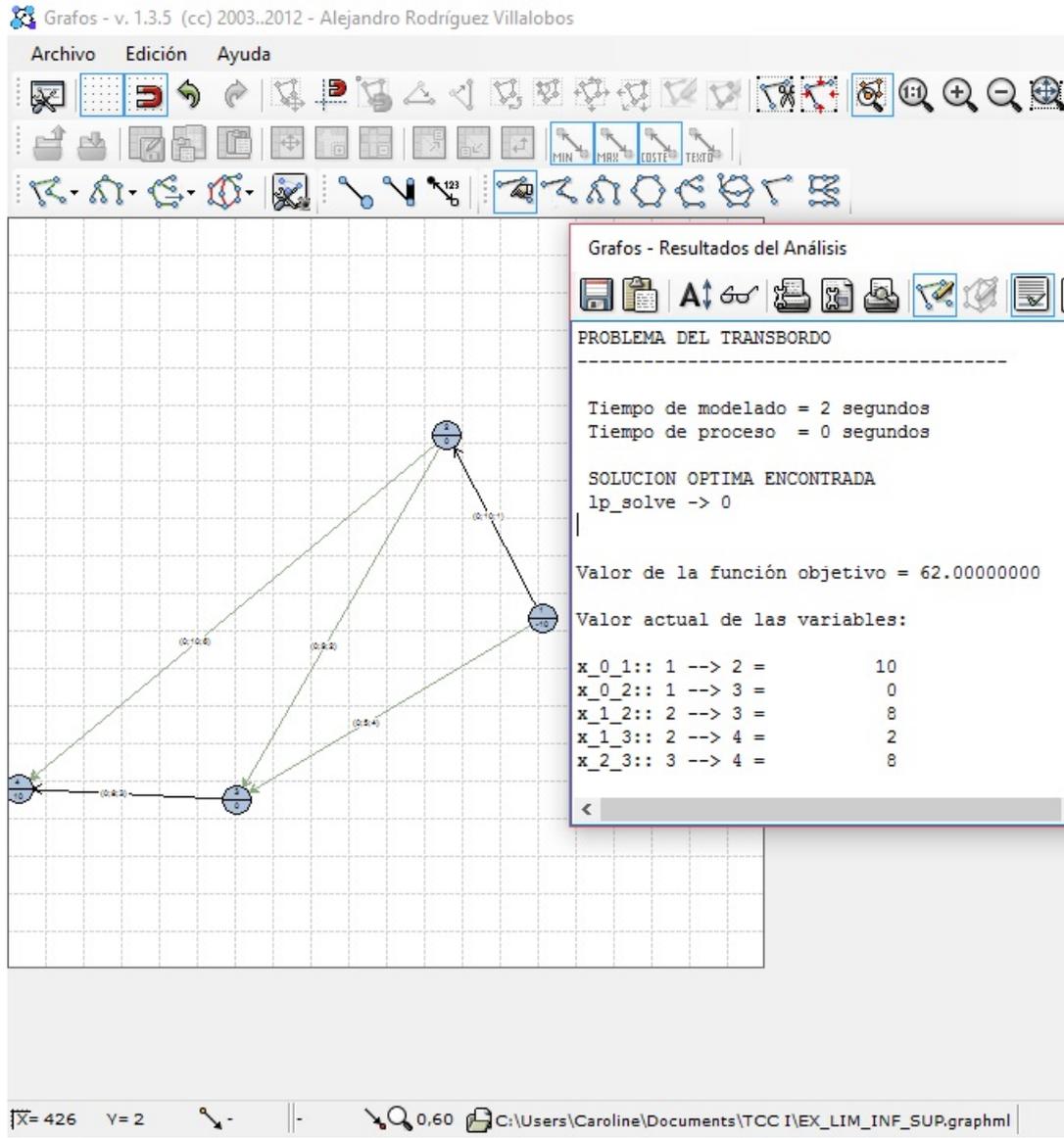


Figura 23 – Análise final do problema

4 Conclusão

O trabalho mostrou ser possível, a partir da utilização de propriedades matemáticas, o desenvolvimento de um algoritmo especializado que opera diretamente no grafo, sem a necessidade de operações matriciais. Assim, pode-se afirmar que o tempo computacional gasto, na resolução de problemas de rede de grande porte, tende a ser significativamente menor quando o algoritmo especializado é utilizado.

Além disso, o trabalho através de um modelo de rede, realizou uma prova conceitual explorando de maneira útil a ferramenta *Grafos* e a planilha eletrônica Excel, verificando conceitos e propriedades importantes da Teoria dos Grafos.

A ferramenta *Grafos*, é uma ferramenta livre e de fácil acesso para todos aqueles que queiram aprender com maior profundidade a Teoria dos Grafos e sua aplicação na realidade empresarial e industrial, logística e transporte, investigação operativa, desenho de redes e etc.

Finalmente, espera-se que esse trabalho seja um ótimo ponto de partida para aqueles que desejam implementar algoritmos especializados para problemas de rede.

Referências

COELHO, F. C. *Computação Científica com Python: Uma introdução à programação para cientistas*. Petrópolis: Edição do Autor, 2007. Citado na página 8.

GOLDBARG, M.; LUNA, H. *Otimização Combinatória e Programação Linear: modelos e algoritmos*. Rio de Janeiro: Campos, 2000. Citado na página 8.

KENNINGTON, J. *Algorithm for Network Programming*. New York: John Willey, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 13.

LOESCH, C.; HEIN, N. *Pesquisa Operacional*. Blumenau: Editora da Furb, 1999. Citado na página 18.

LONGARAY, A. A. *Introdução à Pesquisa Operacional*. Rio Grande: Saraiva, 2013. Citado na página 18.

MACHADO, C. M. dos S.; MAYERLE, S. F.; TREVISAN, V. A linear model for compound multicommodity network flow problems. *Computers and Operations Research*, v. 37, n. 11, p. 1075–1086, 2010. Citado na página 9.

VILLALOBOS, A. R. Grafos: herramienta informática para el aprendizaje y resolución de problemas reales de teoría de grafos. *X Congreso de Ingeniería de Organización*, Valencia, 2006. Citado na página 30.

Apêndices

A Exemplo para Minimizar o Problema de Transporte na Plataforma Excel

Neste anexo será exibido uma breve resolução do exemplo para minimizar o problema de transporte, desenvolvido na plataforma Excel.

| Exemplo para minimizar o problema de transporte | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|
| Min Z= x1 + 4x2 + 2x3 + 6x4 + 3x5 | | | | | |
| Matriz nó-arco: | | | | | |
| | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 |
| Custos: | 1 | 4 | 2 | 6 | 3 |
| Sol Inicial: | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 |
| Z= | 70 | | | | |

Figura 24 – Problema proposto

| 1ª Iteração: | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------|----|----|----|----|----------------------------|---|----|----|----|--------------------------------------|-----------------------|----|----|----|--|
| Base: | x1 | x4 | x5 | x1 | B ⁻¹ (-1): | 0 | -1 | -1 | -1 | CB*B ⁻¹ (-1) | 0 | -1 | -4 | -7 | |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | | 0 | 0 | -1 | -1 | | São os pi's da árvore | | | | |
| | -1 | 1 | 0 | 0 | | 0 | 0 | 1 | 0 | | | | | | |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| | 0 | -1 | -1 | 0 | | | | | | | | | | | |
| CB: | 1 | 6 | 3 | 0 | CB*B ⁻¹ (-1)*N: | 4 | 3 | | | | | | | | |
| N: | x2 | x3 | | | | | | | | | | | | | |
| | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| | -1 | -1 | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | |
| CN: | 4 | 2 | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | Cálculo para ver quem entra na base: | | | | | |
| | | | | | | | | | | (-CN + CB*B ⁻¹ (-1)*N) | | a2 | a3 | | |
| | | | | | | | | | | | | 0 | 1 | | |
| | | | | | | | | | | entra x3 pq pertence ao psi 1 | | | | | |

Figura 25 – Primeira Iteração

| ORIENTAÇÃO NO CAMINHO DO ARCO x3 QUE ENTRA PARA VER QUEM SAI DA BASE | | | | | | | | | |
|--|---|----|----|----|----|------------------|----|-------------------------|-------|
| B ^Λ (-1): | 0 | -1 | -1 | -1 | | Nk(var q entra): | x3 | B ^Λ (-1)*Nk: | |
| | 0 | 0 | -1 | -1 | | | 0 | 0 | y(x1) |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | | | 1 | 1 | y(x4) |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | | | -1 | -1 | y(x5) |
| | | | | | | | 0 | 0 | y(xl) |
| Orientação no caminho das variáveis básicas. | | | | | | | | | |
| ATUALIZAÇÃO DOS FLUXOS | | | | | | | | | |
| deltinha recebe (1) pq x3 pertence ao psi 1 | | | | | | | | | |
| delta recebe 3 | | | | | | | | | |
| x3= x3 + delta*deltinha x3= 3 valor de x3 na nova solução | | | | | | | | | |
| atualização das variáveis básicas | | | | | | | | | |
| xB=xB-delta*deltinha*orientação no caminho x4=5-(3)*(1)*(1) x4=2 | | | | | | | | | |
| x5=5-(3)*(1)*(1) x5=8 x5=8 atingiu seu limite superior e portanto, é a variável que irá sair da base. | | | | | | | | | |
| Nova Solução: | | | | | | | | | |
| | | x1 | x4 | x3 | xl | | | x2 | x5 |
| Xb: | 5 | 2 | 3 | 0 | | Xn: | 5 | 8 | |
| Z=67 | | | | | | | | | |

Figura 26 – Atualização dos Fluxos

| 2ª Iteração: | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------|----|----|----|----|--|---------------------------|---|----|----|----|--|------------------------|---|-------------------------------|----|----|
| Base: | x1 | x4 | x3 | xl | | B ^Λ (-1): | 0 | -1 | -1 | -1 | | CB*B ^Λ (-1) | 0 | -1 | -3 | -7 |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | | | 0 | 0 | 0 | -1 | | | São os pi's da árvore | | | |
| | -1 | 1 | 1 | 0 | | | 0 | 0 | -1 | 0 | | | | | | |
| | 0 | 0 | -1 | 0 | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| | 0 | -1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | |
| CB: | 1 | 6 | 2 | 0 | | CB*B ^Λ (-1)*N: | 3 | 4 | | | | | Cálculo para ver quem entra na base: | | | |
| | | | | | | | | | | | | | (-CN + CB*B ^Λ (-1)*N) | x2 | x3 | |
| | | | | | | | | | | | | | | -1 | 1 | |
| | | | | | | | | | | | | | | entra x2 pq pertence ao psi 2 | | |
| N: | x2 | x5 | | | | | | | | | | | | | | |
| | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | |
| | -1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | -1 | | | | | | | | | | | | | | |
| CN: | 4 | 3 | | | | | | | | | | | | | | |

Figura 27 – Segunda Iteração

| ORIENTAÇÃO NO CAMINHO DO ARCO x3 QUE ENTRA PARA VER QUEM SAI DA BASE | | | | | | | | | |
|---|---|----|----|----|----|------------------|----|-------------------------|-------|
| B ^Λ (-1): | 0 | -1 | -1 | -1 | | Nk(var q entra): | x2 | B ^Λ (-1)*Nk: | |
| | 0 | 0 | 0 | -1 | | | 1 | 1 | y(x1) |
| | 0 | 0 | -1 | 0 | | | 0 | 0 | y(x4) |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | | | -1 | 1 | y(x3) |
| | | | | | | | 0 | 0 | y(xl) |
| Orientação no caminho das variáveis básicas. | | | | | | | | | |
| ATUALIZAÇÃO DOS FLUXOS | | | | | | | | | |
| deltinha recebe (-1) pq x2 pertence ao psi 2 | | | | | | | | | |
| delta recebe 5 | | | | | | | | | |
| x2= x2 + delta*deltinha x2=0 valor de x2 na nova solução | | | | | | | | | |
| atualização das variáveis básicas | | | | | | | | | |
| xB=xB-delta*deltinha*orientação no caminho x1=5-(5)*(-1)*(1) x1=10 | | | | | | | | | |
| x3=3-(5)*(-1)*(1) x3=8 x3=8 atingiu seu limite superior e portanto, é a variável que irá sair da base. | | | | | | | | | |
| Nova Solução: | | | | | | | | | |
| | | x2 | x4 | x3 | xl | | | x1 | x5 |
| Xb: | 0 | 2 | 8 | 0 | | Xn: | 10 | 8 | |
| Z=62 | | | | | | | | | |

Figura 28 – Atualização dos Fluxos

| 3ª Iteração: | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|-----|----|----|----|----|-----|----------------------------|---|----|----|----|--|-------------------------|--|----|----|----|
| Base: | x2 | x4 | x3 | x1 | | | B ⁻¹ (-1): | 0 | -1 | -1 | -1 | | CB*B ⁻¹ (-1) | 0 | -2 | -4 | -8 |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | | | | 0 | 0 | 0 | -1 | | | São os pi's da árvore | | | |
| | 0 | 1 | 1 | 0 | | | | 0 | 1 | 0 | 1 | | | | | | |
| | -1 | 0 | -1 | 0 | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| | 0 | -1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | |
| CB: | 4 | 6 | 2 | 0 | | | CB*B ⁻¹ (-1)*N: | 2 | 4 | | | | | Cálculo para ver quem entra na base: | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | (-CN + CB*B ⁻¹ (-1)*N) | | x1 | x5 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 |
| N: | x1 | x5 | | | | CN: | 1 | 3 | | | | | | Como ambas variáveis estão no limite superior e (-CN + CB*B ⁻¹ (-1)*N) > 0 nenhuma variável é candidata a entrar na base. | | | |
| | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | |
| | -1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | |
| Como não há nenhuma variável candidata a entrar na base a solução ótima é: | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Solução ótima: | | x2 | x4 | x3 | x1 | | | | x1 | x5 | | | Z=62 | | | | |
| | Xb: | 0 | 2 | 8 | 0 | | | | 10 | 8 | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Figura 29 – Terceira Iteração

B Exemplo para Minimizar o Problema de transporte através do *Solver*

Neste anexo o mesmo exemplo para minimizar o problema de transporte será resolvido, mas desta vez, o desenvolvimento foi feito através do *Solver*, que é uma ferramenta da plataforma Excel.

| | | | | | | | | | | |
|----|--------|----|----|----|----|----|-----|--|--------------|--|
| A= | | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | | | | |
| | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 10 | | 10 | |
| | 2 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | | -1,33227E-15 | |
| | 3 | 0 | -1 | -1 | 0 | 1 | 0 | | 0 | |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | -10 | | -10 | |
| | | | | | | | | | | |
| | Custos | 1 | 4 | 2 | 6 | 3 | | | | |
| | Sol In | 10 | 0 | 8 | 2 | 8 | | | | |
| | Z= 70 | | | | | | | | | |
| | 62,00 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| | LI | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | |
| | LS | 10 | 5 | 9 | 10 | 8 | | | | |

Figura 30 – Exemplo desenvolvido no Solver