

Juciara Alves Ferreira

**Equações Diferenciais Ordinárias: uma
abordagem computacional utilizando o software
wxMaxima**

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

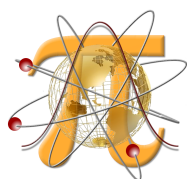
Dezembro, 2017

Colaboradores



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE

<http://www.furg.br>



INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

<http://www.imef.furg.br>

*“O abandono da Matemática
traz dano a todo o conhecimento,
pois aquele que a ignora não pode conhecer
as outras ciências ou as coisas do mundo.”
(Roger Bacon)*

Resumo

Neste trabalho de conclusão de curso é apresentado um estudo sobre as Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira e Segunda Ordem. Onde nos primeiros capítulos são realizados uma revisão sobre a teoria das Equações Diferenciais Ordinárias e aliada a essa teoria são resolvidos dois problemas de aplicação: o problema da administração de glicose e da absorção de remédios. Estes problemas são resolvidos analiticamente e através do software simbólico wxMaxima.

Palavras-chaves: Equações Diferenciais Ordinárias, Administração de glicose, Absorção de remédios, wxMaxima.

Abstract

In this final paper is presented a study of first and second order ordinary differential equations. Where in the first chapters a review is made on the theory of ordinary differential equations and combined with this theory are solved two problems of application: the problem of glucose administration and drug absorption. These problems are solved analytically and through the symbolic software wxMaxima.

Key-words: differential equations, glucose administration, drug absorption, wxMaxima.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Campo de direções	15
Figura 2 – Administração da glicose	37
Figura 3 – Absorção de remédios	41

Lista de tabelas

Tabela 1 – Comandos do wxMaxima	45
---	----

Sumário

1	INTRODUÇÃO	9
2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	11
2.1	Classificação quanto ao tipo	11
2.2	Equações Diferenciais Ordinárias	11
2.3	Classificação quanto à ordem	11
2.3.1	Linearidade das Equações Diferenciais Ordinárias	12
2.3.2	Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias	12
2.3.3	Solução Explícita de uma EDO	12
2.3.4	Solução Implícita de uma EDO	12
2.4	Problemas de Valor Inicial	12
2.4.1	Curvas integrais	13
2.4.2	PVI de Primeira e Segunda Ordem	13
2.5	Campo de Direções	13
3	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM	16
3.1	Obtenção de Soluções de Equações Diferenciais de Primeira Ordem	16
3.1.1	Método de separação de variáveis	16
3.1.2	Equação Exata	17
3.1.3	Equações Diferenciais Não-Exatas - Fator Integrante	18
3.1.4	Equações Homogêneas	20
3.1.4.1	Método de solução	20
3.1.5	Equações Lineares	21
3.1.5.1	Fator Integrante	21
4	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM	23
4.1	Equações Homogêneas e Não-homogêneas	23
4.2	Problemas de Valor Fronteira	23
4.3	Teorema da Existência de Solução Única	24
4.4	Princípio da Superposição: Equações Homogêneas	24
4.5	Dependência Linear e Independência Linear	24
4.6	Teorema do Critério para Independência Linear de Funções	25
4.7	Solução de Equações Homogêneas	26
4.7.1	Equação característica	26
4.8	Equações Diferenciais de Segunda Ordem Não-Homogêneas	28

4.8.1	Solução Particular	28
4.8.2	Solução Geral	28
4.8.3	Princípio de Superposição: equações não-homogêneas	29
4.8.4	Método dos Coeficientes Indeterminados	29
4.8.4.1	Demonstração do Método dos Coeficientes Indeterminados - caso em que $g(x)$ é uma função polinomial	29
4.8.5	Variação de Parâmetros	31
5	APLICAÇÕES COM SOFTWARE Wxmaxima	33
5.1	Software wxMaxima	33
5.2	Problema da administração de glicose	34
5.3	Problema de Absorção de remédios	37
6	CONCLUSÕES	42
	Referências	43
	 ANEXOS	 44
	ANEXO A – COMANDOS DO Wxmaxima	45

1 Introdução

Os conceitos iniciais acerca das equações diferenciais começaram a ser desenvolvidos no final do século XVII com o surgimento da teoria do Cálculo a partir dos estudos de Newton e Leibniz. Suas técnicas de derivação e integração foram utilizadas na solução das chamadas equações diferenciais. Segundo (ZILL, 2003), esta terminologia sugere algum tipo de equação que envolve derivadas. A teoria das equações diferenciais, segundo (DIACU, 2004) foi aplicada inicialmente nas chamadas ciências físicas, posteriormente, foi estendida a outras atividades humanas. O estudo das equações diferenciais é extremamente importante no estudo de crescimento populacional humano, decaimento radioativo, predador-presa, pois tais equações modelam, matematicamente, fenômenos de diversas áreas das ciências. Um modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado, podendo ser considerado como uma síntese da reflexão sobre alguma parte da realidade cujo objetivo é explicar ou entender a situação estudada para, eventualmente, poder agir sobre ela. Assim, para (BASSANEZI; JR., 1988), a partir da solução de uma equação diferencial é possível fazer previsões, tomar decisões, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças.

Desde o século XVII até meados do século XIX, Newton pensava que ao solucionar uma equação diferencial, era possível determinar tal solução de uma forma explícita, ou seja, uma relação clara entre a variável dependente e as variáveis independentes. Entretanto, no decorrer do tempo, os estudiosos perceberam que apenas um pequeno número de equações possuía uma solução possível de ser escrita explicitamente, em termos de funções elementares. Então, (FIGUEIREDO; NEVES, 2001), a partir desta constatação gerou uma busca por novos métodos de solução, surgindo, assim, o uso de séries de funções na resolução das equações diferenciais. Além disso, no decorrer do século XIX, é que a Análise Matemática passa a ganhar rigor e formalismo em suas demonstrações, o que gera dúvidas em relação a confiabilidade dos métodos propostos por Newton para obter soluções. Ainda nessa época, estudos permitiram a elaboração dos teoremas da existência e unicidade da solução, impulsionando o desenvolvimento da teoria das equações diferenciais. Para (FIGUEIREDO; NEVES, 2001) tais teoremas marcam o início da fase moderna, com o surgimento das teorias de Henri Poincaré (1854 - 1912). A partir deste momento, busca-se retirar da equação diferencial informações sobre o comportamento de suas soluções, sem a preocupação de descrevê-las explicitamente.

Assim o presente trabalho tem como tema o estudo das equações diferenciais, expressar suas soluções analiticamente e também obtê-las usando o software de computação simbólica wxMaxima. Este software permite estudar o comportamento das soluções das

equações ordinárias lineares de primeira e segunda ordem de modo qualitativo, através da representação gráfica. Os dois problemas de aplicação apresentados serão resolvidos com o wxMaxima. Embora tais problemas possuam soluções facilmente obtidas de modo analítico, o objetivo deste trabalho é mostrar que este software pode ser considerado um importante auxílio para a resolução das equações diferenciais. Inúmeros trabalhos de conclusão de curso e monografias abordam conceitos acerca de equações diferenciais ordinárias e suas aplicações (NÓBREGA, 2016), (ARAÚJO, 2011), (ALITOLEF, 2011), entretanto abordam problemas clássicos, como o estudo de vibrações, sistema massa-mola ou crescimento populacional e não utilizam o software wxMaxima como recurso computacional para encontrar a solução.

Para atingir o objetivo proposto, este trabalho está organizado da seguinte forma: inicialmente, no capítulo 2, apresenta-se uma introdução ao estudo de equações diferenciais, com definições e teoremas importantes, são também discutidas as condições necessárias para a existência e unicidade de uma solução, os campos de direções e as soluções a partir do problema de valor inicial. No capítulo 3, desenvolvem-se os métodos de resolução e teoremas necessários para determinar as soluções dos problemas de aplicação propostos. Já no capítulo 4, estudam-se as equações diferenciais ordinárias de segunda ordem onde são demonstrados as equações lineares com coeficientes constantes e o Wronskiano. No capítulo 5, faz-se uma breve introdução sobre o software wxMaxima e apresenta-se a solução de dois modelos matemáticos (administração da glicose e absorção de drogas) utilizando o software como ferramenta de auxílio na resolução das equações diferenciais ordinárias. Por fim, no capítulo 6, apresentam-se as conclusões pertinentes a esse trabalho.

2 Equações Diferenciais

Diversos problemas importantes e significativos nas áreas de Engenharia, Física e Ciências Sociais Aplicadas são representados por um modelo matemático e exigem a determinação de uma função que obedece a uma equação que contém uma ou mais derivadas da função desconhecida.

Segundo (ZILL; CULLEN, 2001), uma equação contendo derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é dita uma equação diferencial (ED). Tais equações podem, por exemplo, ser classificadas quanto ao tipo e à ordem.

2.1 Classificação quanto ao tipo

Segundo (ZILL, 2003) existem dois tipos de equações diferenciais. Se uma equação diferencial possui apenas derivadas de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma única variável independente é classificada como Equação Diferencial Ordinária (EDO) (ZILL, 2003).

Uma Equação Diferencial Parcial (EDP) é uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes (ZILL, 2003).

O objetivo deste trabalho é abordar os conceitos acerca das Equações Diferenciais Ordinárias. Portanto, a partir daqui, não é mais discutida a teoria sobre as Equações Diferenciais Parciais.

2.2 Equações Diferenciais Ordinárias

A EDO, descrita por (2.1) é uma equação envolvendo uma função incógnita $y = y(x)$ e suas derivadas (ou diferenciais), onde x é a variável independente, y é a variável dependente e a notação $y^{(n)}$ indica a derivada de ordem n da função $y = y(x)$.

2.3 Classificação quanto à ordem

A ordem de uma equação diferencial (EDO ou EDP) é a ordem da maior derivada na equação. A equação na forma

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0. \quad (2.1)$$

é dita uma equação diferencial ordinária de ordem n .

2.3.1 Linearidade das Equações Diferenciais Ordinárias

Uma EDO de ordem n é dita linear se F for linear em $y, y', \dots, y^{(n-1)}$. Assim uma equação diferencial ordinária de n -ésima ordem é linear quando a equação (2.1) for escrita como,

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x). \quad (2.2)$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_n$ e g são funções de x .

2.3.2 Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias

De acordo com (ZILL, 2003) toda função ϕ definida em um intervalo $I \rightarrow \mathbb{R}$, que tem pelo menos n derivadas contínuas em I , que substituída em uma EDO de ordem n reduz a equação a uma identidade, é denominada uma solução da equação diferencial no intervalo I . Denomina-se o intervalo como Domínio da Solução e este pode ser classificado como aberto (a, b) , fechado $[a, b]$, ilimitado (a, ∞) e limitado $[a, \infty)$ ou $(a, \infty]$.

2.3.3 Solução Explícita de uma EDO

Definição 2.3.1. Solução Explícita é a solução na qual a variável dependente é expressa somente em termos da variável independente e das constantes.

2.3.4 Solução Implícita de uma EDO

Definição 2.3.2. Diz-se que uma relação $G(x, y) = 0$ é uma Solução Implícita de uma equação diferencial ordinária (2.1), em um intervalo I , quando existe pelo menos uma função ϕ que satisfaça a relação, bem como a equação diferencial em I .

2.4 Problemas de Valor Inicial

De acordo com (ZILL, 2003), o problema

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.3)$$

sujeito a $y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, onde $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ são constantes reais especificadas, em algum intervalo I , contendo x_0 , é chamado de **problema de valor inicial (PVI)**.

Os valores de $y(x)$ e suas $n - 1$ derivadas em um único ponto x_0 : $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, são chamados de condições iniciais.

2.4.1 Curvas integrais

A solução da EDO

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.4)$$

é uma família de curvas, chamadas curvas integrais. Existe uma relação de cada ponto (x, y) a reta tangente à curva integral passando pelo ponto tem coeficiente angular $m = f(x, y)$. Cada curva integral está associada a um valor particular de c . Quando resolve essa equação encontram-se as curvas integrais, essas curvas representam o gráfico da solução ϕ de uma EDO.

2.4.2 PVI de Primeira e Segunda Ordem

Os problemas

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \text{ sujeita a } y(x_0) = y_0 \quad (2.5)$$

e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'), \text{ sujeita a } y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 \quad (2.6)$$

são chamados problemas de valor inicial de primeira e segunda ordem, respectivamente. Na equação (2.5), procura-se uma solução da EDO em um intervalo I que contenha x_0 , de tal forma que uma curva integral passe pelo ponto (x_0, y_0) .

Já em (2.6), quer-se determinar uma solução cujo gráfico não passe somente por um ponto (x_0, y_0) , mas também que a inclinação da curva nesse ponto seja y_1 .

O termo condição inicial origina de sistemas físicos e significa que a variável independente é o tempo t e $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y_1$, representam, respectivamente, a posição e a velocidade de um objeto no instante inicial t_0 .

Teorema 2.4.1 (Existência de uma Única Solução). Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ que contém o ponto (x_0, y_0) . Se $f(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em R , existe algum intervalo $I_0 : x_0 - h < x < x_0 + h, h > 0$, contido em $a \leq x \leq b$, e uma única função $y(x)$, definida em I_0 que é uma solução do PVI (2.5).

2.5 Campo de Direções

Segundo (ZILL, 2003), se sistematicamente, a função f for calculada sobre uma malha retangular de pontos (x, y) no plano xy e, em cada ponto (x, y) um elemento linear for desenhado com a inclinação $f(x, y)$, a coleção de todos os elementos lineares

será chamado de **campo de direções** ou **campo de inclinações** da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

Esboçar a mão um campo de direções pode não ser difícil, mas nos toma um certo tempo. Geralmente emprega-se algum software para realizar esse tipo de operação. A Figura 1 foi obtida usando o software simbólico chamado wxMaxima e mostra o campo de direções para $\frac{dy}{dx} = x$ onde se tem como condição inicial, $y(-1) = -2$.

```
(%i1) 'diff(y,x)=x,y,x;
```

```
(%o1)  $\frac{d}{dx} y = x$ 
```

```
(%i2) ode2('diff(y,x)=x,y,x);
```

```
(%o2)  $y = \frac{x^2}{2} + \%c$ 
```

```
(%i3) ic1(y=(x^2/2+%c),y=-2,x=-1);
```

```
(%o3)  $y = \frac{x^2 - 5}{2}$ 
```

```
(%i4) load(plotdf);
```

```
(%o4) C : /PROGRA1/MAXIMA 1.0/share/maxima/5.30.0/share/dynamics/plotdf.lisp
```

```
(%i5) plotdf(x,[trajectory_at,-1,-2]);
```

```
(%o5) 0
```

Observa-se pela saída %o2 que trata-se de uma família de curvas, pois a solução geral da EDO depende da constante c .

No próximo capítulo, discutem-se métodos para a obtenção da solução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

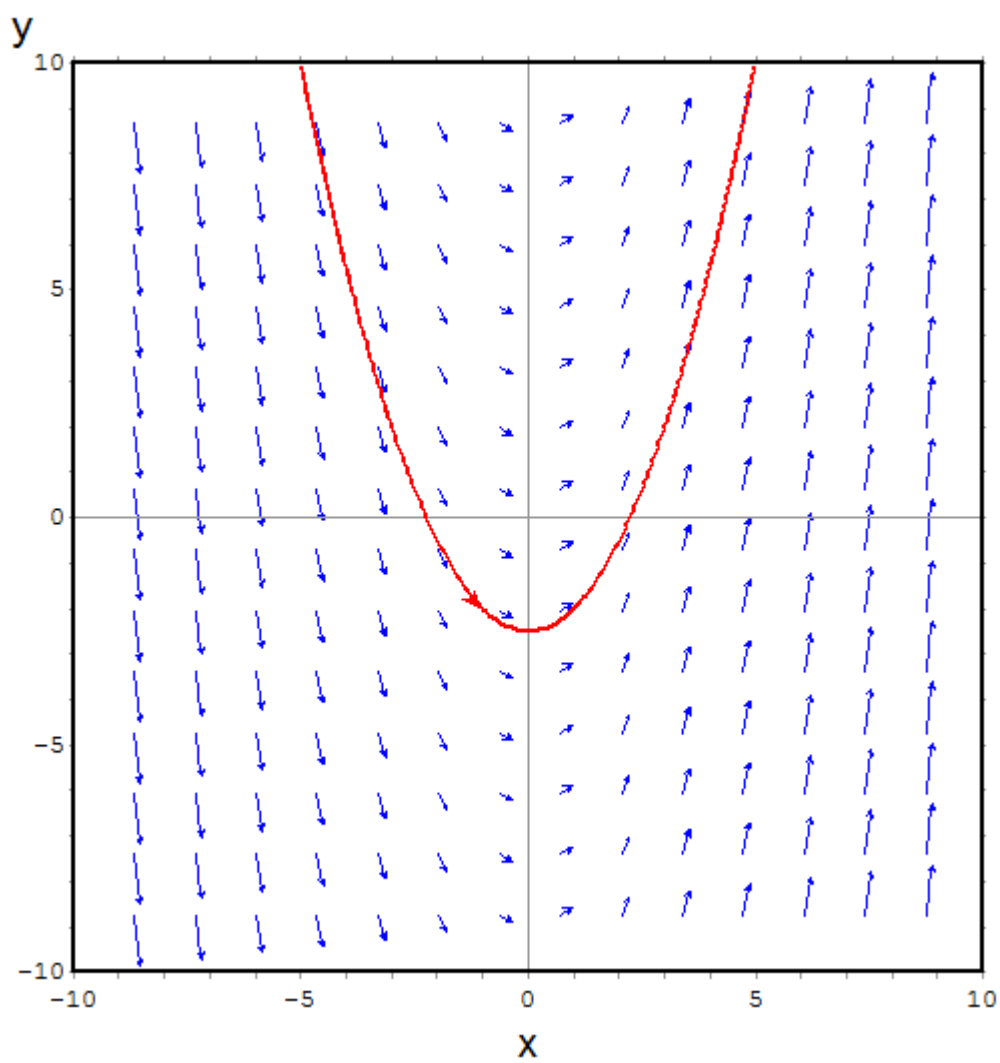


Figura 1 – Campo de direções

3 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Neste capítulo apresentam-se alguns métodos analíticos para a resolução das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Para determinar as suas soluções, em geral, deve-se reconhecer o tipo da equação diferencial, pois um método que funciona para uma equação de primeira ordem pode não se aplicar a outro. As equações diferenciais de primeira ordem, na maioria das vezes, oferecem informações necessárias para prever o comportamento de suas soluções (BASSANEZI; JR., 1988). Dentre as equações estudadas neste trabalho estão as separáveis, exatas, as homogêneas e as lineares.

3.1 Obtenção de Soluções de Equações Diferenciais de Primeira Ordem

3.1.1 Método de separação de variáveis

Definição 3.1.1. Equação separável é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem que pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y). \quad (3.1)$$

O nome separável vem do fato de que a expressão no lado direito pode ser “separável”, isto é, pode ser escrita como produto de duas funções em que uma delas depende somente da variável independente x e a outra depende somente da variável y .

Se $f(y) \neq 0$ na equação (3.1), pode-se escrever

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx. \quad (3.2)$$

Considerando-se a equação diferencial escrita na forma (3.2), pode-se aplicar a integração direta em ambos os lados da equação. Dessa forma, tem-se:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx. \quad (3.3)$$

A equação (3.3) representa o método de separação de variáveis de uma EDO de primeira ordem.

3.1.2 Equação Exata

Segundo (ZILL, 2003), uma expressão diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ é uma diferencial exata em uma região R do plano xy se corresponde à diferencial de alguma função $f(x, y)$. Uma equação diferencial de primeira ordem da forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (3.4)$$

é chamada de equação exata se a expressão à esquerda da equação (3.4) for uma diferencial exata.

Teorema 3.1.1 (Critério para Diferencial Exata (ZILL, 2003)). Sejam $M(x, y)$ e $N(x, y)$ contínuas e com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma região R definida por $a < x < b$ e $c < y < d$. Então uma condição necessária e suficiente para que $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ seja uma diferencial exata é

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Prova. ($\Rightarrow$) Primeiramente mostra-se que se $M(x, y)$ e $N(x, y)$ é uma diferencial exata, então $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Se a expressão $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ for exata, haverá alguma função $f : \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo (x, y) em R ,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \quad (3.6)$$

Logo,

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (3.7)$$

e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (3.8)$$

A igualdade das derivadas parciais mistas é uma consequência da continuidade das derivadas parciais de primeira ordem de $M(x, y)$ e $N(x, y)$.

($\Leftarrow$) Para mostrar que se $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ então $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ é exata, e verifica-se se a igualdade em (3.5) é verdadeira. Em caso afirmativo, queremos encontrar uma função f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad (3.9)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y). \quad (3.10)$$

Para determinar f se ela existir, integra-se $M(x, y)$ em relação a x e mantendo-se y constante, obtém-se:

$$f(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y), \quad (3.11)$$

onde $g(y)$, uma função arbitrária, é a “constante” de integração. Diferenciando (3.11) em relação a y e supondo $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx + g'(y) = N(x, y),$$

o que resulta em

$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx. \quad (3.12)$$

Integra-se (3.12) em relação a y e substitui-se o resultado em (3.11), obtendo-se a solução $f(x, y)$ da equação diferencial exata.

A solução implícita da equação é dada por $f(x, y) = c$. É importante ressaltar que a expressão $N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx$ em (3.12) não depende de x , pois

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx \right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int M(x, y)dx \right). \quad (3.13)$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0, \quad (3.14)$$

pois por hipótese tem-se $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$. A demonstração é análoga, iniciando-se com a hipótese que $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$.

3.1.3 Equações Diferenciais Não-Exatas - Fator Integrante

Em alguns casos é possível converter uma equação diferencial que não é exata em uma exata, multiplicando-se a equação por uma determinada função que é chamada de fator integrante.

Definição 3.1.2. O Fator Integrante é uma função tal que o produto da EDO por ela faz com que o lado esquerdo da equação possa ser visto como a derivada do produto de duas funções.

Multiplicando-se a equação diferencial não-exata

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (3.15)$$

por uma função $\mu(x, y)$, quer-se determinar $\mu(x, y)$ de modo que a equação resultante

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \quad (3.16)$$

seja exata.

A equação (3.16) é exata se e somente se

$$\frac{\partial[\mu(x, y)M(x, y)]}{\partial y} = \frac{\partial[\mu(x, y)N(x, y)]}{\partial x}. \quad (3.17)$$

Como M e N são funções conhecidas, pela equação (3.16) observa-se que o fator integrante μ tem que satisfazer a equação diferencial de primeira ordem

$$M(x, y)\frac{\partial\mu}{\partial y} - N(x, y)\frac{\partial\mu}{\partial x} + \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu(x, y) = 0. \quad (3.18)$$

O objetivo é determinar uma função μ que satisfaça a equação (3.18). Assim a equação (3.16) será exata.

Utilizando o método de resolução das equações exatas pode-se obter a solução da equação (3.16). Esta mesma solução é válida para a equação (3.15), já que é possível dividir a equação (3.16) pelo fator integrante μ . O método de resolução por fator integrante é uma ferramenta útil para a resolução das equações diferenciais, mas ele só pode ser utilizado em alguns casos especiais. Os fatores integrantes simples ocorrem quando μ é uma função dependente apenas de uma das variáveis x ou y . Existem condições necessárias sobre M e N para que a equação (3.15) tenha um fator que só dependa de x . Supondo que μ é uma função de x , tem-se

$$\frac{\partial}{\partial y} [\mu(x)M(x, y)] = \mu(x)\frac{\partial M}{\partial y}(x, y)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} [\mu(x)N(x, y)] = \mu(x)\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) + N(x, y)\frac{d\mu}{dx}(x)$$

Assim, se

$$\frac{\partial}{\partial y} [\mu(x)M(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x} [\mu(x)N(x, y)] \quad (3.19)$$

é necessário que

$$\frac{d\mu}{dx}(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)}{N(x, y)}\mu(x). \quad (3.20)$$

Se o lado de (3.20) é uma função só de x , então existe um fator integrante μ que depende só de x . Analogamente, esse mesmo procedimento pode ser utilizado para

se determinar uma condição sob a qual a equação (3.15) tenha um fator integrante que dependa apenas de y .

3.1.4 Equações Homogêneas

Uma função f é dita homogênea de grau n quando tiver a propriedade $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ para qualquer número real n .

Uma equação diferencial da forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (3.21)$$

é dita homogênea se os coeficientes M e N forem funções homogêneas de mesmo grau, ou seja, se $M(x, y) = \lambda^n M(x, y)$ e $N(x, y) = \lambda^n N(x, y)$. Da mesma maneira, pode-se afirmar que a equação é homogênea se, quando escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

for possível definir uma função g de maneira que $f(x, y)$ possa ser escrita como $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$, então

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right). \quad (3.22)$$

De modo análogo, quando a equação diferencial homogênea estiver na forma $\frac{dx}{dy} = f(x, y)$, define-se uma nova função h tal que $f(x, y)$ seja escrita como $f(x, y) = h\left(\frac{x}{y}\right)$.

3.1.4.1 Método de solução

A equação diferencial homogênea do tipo $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ é resolvida por meio de substituição algébrica. A substituição é feita da seguinte maneira: faz-se $y = ux$ ou $x = vy$, onde u e v são as novas variáveis independentes e a equação homogênea transforma-se em uma equação separável de primeira ordem. Então, seja $y = ux$; logo, sua diferencial será $dy = udx + xdu$. Substituindo em (3.21), tem-se:

$$M(x, ux)dx + N(x, ux)[udx + xdu] = 0. \quad (3.23)$$

Se a função homogênea for de grau n , pode-se escrever:

$$\begin{aligned} x^n M(1, u)dx + x^n N(1, u)[udx + xdu] &= 0 \\ [M(1, u) + uN(1, u)]dx + xN(1, u)du &= 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

assim,

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, u)du}{M(1, u) + uN(1, u)} = 0. \quad (3.25)$$

O método aplicado, com a substituição conveniente transforma uma equação diferencial homogênea em uma equação diferencial separável.

3.1.5 Equações Lineares

A forma geral de uma equação diferencial linear de primeira ordem é dada por

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad (3.26)$$

onde $a_1, a_0, \dots$ são os coeficientes de (3.26) e $g(x)$ é o termo de não-homogeneidade. Dividindo a equação (3.26) pelo coeficiente $a_1(x)$ de $\frac{dy}{dx}$ obtém-se uma forma mais útil da equação diferencial linear. Ou seja,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = F(x), \quad (3.27)$$

onde

$$P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)} \quad \text{e} \quad F(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}. \quad (3.28)$$

Procura-se uma solução para a equação (3.27) em um intervalo I , onde as funções $P(x)$ e $F(x)$ são contínuas.

3.1.5.1 Fator Integrante

Supondo que a equação (3.27) tenha solução, então pode-se escrevê-la como:

$$dy + [P(x)y - F(x)] dx = 0. \quad (3.29)$$

As equações lineares possuem uma propriedade que permite determinar uma função $\mu(x)$, onde

$$\mu(x)dy + \mu(x)[P(x)y - F(x)] dx = 0 \quad (3.30)$$

é uma equação diferencial exata. Pelo critério das equações exatas visto na seção (3.1.2), vale que o lado esquerdo da equação (3.30) é uma diferencial exata, se

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \mu(x) [P(x)y - F(x)], \quad (3.31)$$

ou seja,

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)P(x). \quad (3.32)$$

A equação (3.32) é separável, logo é possível determinar μ agrupando os termos de maneira conveniente, isto é,

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = P(x)dx \quad (3.33)$$

e integrando diretamente ambos os membros de (3.33), tem-se

$$\int \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \int P(x)dx$$

que resulta em

$$\ln |\mu(x)| = \int P(x)dx + c. \quad (3.34)$$

Portanto,

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} \quad (3.35)$$

O resultado (3.35) é o fator integrante para a equação diferencial linear, e $\mu \neq 0$ para todo x em I , é uma função contínua e diferenciável neste intervalo.

Multiplica-se (3.27) por (3.35)

$$e^{\int P(x)dx} \frac{dy}{dx} + yP(x)e^{\int P(x)dx} = e^{\int P(x)dx} f(x) \quad (3.36)$$

de modo que do lado esquerdo da igualdade se tenha a derivada do produto do fator de integração e y , isto é,

$$\frac{d}{dx} [e^{\int P(x)dx} y] = e^{\int P(x)dx} f(x). \quad (3.37)$$

Integrando ambos os membros de (3.37), chega-se a

$$e^{\int P(x)dx} y = \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx + C. \quad (3.38)$$

A solução $y(x)$ da equação diferencial (3.27) é escrita como

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx + Ce^{-\int P(x)dx}. \quad (3.39)$$

No próximo capítulo, discutem-se métodos para a obtenção da solução de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem.

4 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Segunda Ordem

As equações diferenciais lineares de segunda ordem são importantes em aplicações nas áreas de Física e da Matemática, quando estudam-se oscilações harmônicas, dinâmica de partículas ou circuitos elétricos. Neste capítulo são estudados métodos de solução para essas equações.

4.1 Equações Homogêneas e Não-homogêneas

Uma Equação Diferencial Ordinária de segunda ordem tem a forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (4.1)$$

onde f é uma função conhecida. Denota-se x como a variável independente, mas pode-se usar t como variável. Para a variável dependente utiliza-se geralmente y . A equação (4.1) é dita linear quando a função f esta na forma

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = g(x) - p(x)\frac{dy}{dx} - q(x)y. \quad (4.2)$$

Observa-se que na equação (4.2) g, p e q são funções dependentes de x , mas que não dependem de y . Então a equação (4.1) pode ser reescrita, como

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \quad (4.3)$$

Se $g(x) = 0$, então a equação diferencial de segunda ordem (4.3) é chamada de homogênea. Caso contrário, é não-homogênea.

4.2 Problemas de Valor Fronteira

Em geral, as aplicações apresentam condições do tipo $y(P_1) = K_1$ e $y(P_2) = K_2$, onde K_1, K_2 são constantes que pertencem ao reais. Tais condições são conhecidas como condições de fronteira onde P_1 e P_2 são chamados pontos de fronteira em um intervalo I onde a equação (4.3) é considerada. Então, a equação (4.3) e as condições $y(P_1) = K_1$ e $y(P_2) = K_2$ em conjunto são chamadas de Problema de Valor Fronteira.

4.3 Teorema da Existência de Solução Única

Teorema 4.3.1 (Existência de uma Solução Única). Se $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas em um intervalo qualquer I e x_0 pertence a I , então o problema de valor inicial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, $y(x_0) = K_0$ e $y'(x_0) = K_1$ tem uma única solução $y(x)$ no intervalo I .

A demonstração do Teorema 4.3.1 pode ser consultada em (ZILL; CULLEN, 2001).

4.4 Princípio da Superposição: Equações Homogêneas

A superposição de duas ou mais soluções para uma equação diferencial linear homogênea também é uma solução. (ZILL; CULLEN, 2001)

Teorema 4.4.1 (Princípio da Superposição: Equações Homogêneas). Sejam $y_1, y_2, \dots, y_n$ soluções para a equação diferencial linear de n -ésima ordem homogênea (2.2) em um intervalo I . Então a combinação linear

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x). \quad (4.4)$$

em que $c_i, i = 1, 2, \dots, k$, são constantes arbitrárias, é também uma solução (2.2) no intervalo I .

Demonstração. Prova-se o caso em que $n = 2$. Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções para

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (4.5)$$

Define-se $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, então

$$\begin{aligned} & a_2(x)[c_1 y_1'' + c_2 y_2''] + a_1(x)[c_1 y_1' + c_2 y_2'] + a_0(x)[c_1 y_1 + c_2 y_2] \\ &= c_1 \underbrace{[a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1]}_{=0} + c_2 \underbrace{[a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2]}_{=0} \end{aligned}$$

Portanto, $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ é também solução de (4.5). □

4.5 Dependência Linear e Independência Linear

Definição 4.5.1. Diz-se que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ é linearmente dependente em um intervalo I se existem constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ não nulas, tais que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0.$$

para todo x no intervalo. (ZILL; CULLEN, 2001)

Definição 4.5.2. Diz-se que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ é linearmente independente em um intervalo I se ele não é linearmente dependente no intervalo.

Pode-se dizer então que as funções são linearmente independentes se as constantes

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0.$$

para todo x no intervalo, são $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Se as funções são linearmente dependentes no intervalo, então existem constantes c_1 e c_2 não nulas onde para todo x no intervalo, têm-se

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0.$$

Supõe-se que $c_1 \neq 0$, segue-se que

$$f_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} f_2(x).$$

Ou seja, se duas funções são linearmente dependentes, então pode ser escrita como produto da outra por uma constante. Então para alguma constante c , sem perda de generalidade pode-se escrever

$$(-1) \cdot f_1(x) + c f_2(x) = 0.$$

para todo x no intervalo. Logo pelo menos uma das constantes ($c_1 = -1$) não é nula. Portanto, conclui-se que duas funções são linearmente independentes quando não são múltiplas uma da outra em um intervalo.

4.6 Teorema do Critério para Independência Linear de Funções

Teorema 4.6.1 (Critério para Independência Linear de Funções). Suponha-se que $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ sejam diferenciáveis pelo menos $n - 1$ vezes. Se o determinante

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & \cdots & f_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

for diferente de zero em pelo menos um ponto do intervalo I , então as funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ são linearmente independentes no intervalo.

Denota-se o determinante do teorema (4.6.1) por

$$W(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

e chama-se o Wronskiano das funções.

Demonstração. Prova-se um caso particular do teorema (4.6.1) por contradição no caso em que $n = 2$. Suponha-se que $W(f_1(x_0), f_2(x_0)) \neq 0$ para um x_0 fixado no intervalo I e que $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sejam linearmente dependentes no intervalo. Para que as funções sejam linearmente dependentes existem constantes c_1 e c_2 não nulas tais que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$$

para todo x em I . Derivando essa equação, tem-se

$$c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = 0.$$

Obtêm-se então, um sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) &= 0 \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) &= 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Que pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0.$$

□

Mas a dependência linear de f_1 e f_2 implica que (4.6) possui uma solução não trivial para cada x no intervalo. Logo,

$$W(f_1(x), f_2(x)) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = 0$$

para todo x em I . Portanto, contradiz a suposição que $W(f_1(x), f_2(x)) \neq 0$. Então conclui-se que f_1 e f_2 são linearmente dependentes.

Teorema 4.6.2 (Corolário). Se $f_1, f_2, \dots, f_n(x)$ possuem pelo menos $n - 1$ derivadas e são linearmente dependentes em I , então

$$W(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = 0$$

4.7 Solução de Equações Homogêneas

4.7.1 Equação característica

Considere a equação de segunda ordem com coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ constantes

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{4.7}$$

uma solução de (4.7), ela é uma função que satisfaz (4.7). Pode-se supor uma solução na forma exponencial, isto é,

$$y(x) = e^{kx}, \quad (4.8)$$

onde k é constante. Agora, substitui-se a solução (4.8) na equação (4.7)

$$a(k^2 e^{kx}) + b(ke^{kx}) + ce^{kx} = 0.$$

Colocando o fator comum em evidência, tem-se:

$$(ak^2 + bk + c)(e^{kx}) = 0. \quad (4.9)$$

Como e^{kx} não se anula para valores reais de x , para que (4.9) seja verdadeira pode-se determinar um k para que ele seja raiz da equação quadrática, ou seja,

$$ak^2 + bk + c = 0. \quad (4.10)$$

A equação (4.10) é chamada de equação característica da equação diferencial (4.7).

Consideram-se três casos para as possíveis raízes da equação (4.10):

1º Caso: Raízes reais distintas

Supõe-se que a equação (4.10) tenha duas raízes reais distintas, k_1 e k_2 , então, obtêm-se duas soluções:

$$y_1 = e^{k_1 x} \text{ e } y_2 = e^{k_2 x}. \quad (4.11)$$

Pelo Princípio de Superposição, sabe-se que a soma de duas soluções também é uma solução para a equação (4.7) pode ser escrita da forma:

$$y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}. \quad (4.12)$$

2º Caso: Raízes reais iguais

Supõe-se a equação (4.10) tenha duas raízes reais iguais, isto é, $k_1 = k_2$, então obtêm-se uma única solução exponencial para a solução geral.

Pelo Princípio de Superposição e devido à necessidade de independência linear das soluções, tem-se

$$y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}. \quad (4.13)$$

3º caso: Raízes complexas conjugadas

Como k_1 e k_2 são raízes complexas, então define-se $k_1 = \alpha + i\beta$ e $k_2 = \alpha - i\beta$, onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ são reais e $i^2 = -1$. Logo,

$$y(x) = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}. \quad (4.14)$$

Ao invés de trabalhar com funções exponenciais complexas, pode-se utilizar funções reais, utilizando a fórmula de Euler, $e^{i\beta x} = c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)$, pode-se reescrever (4.14) como:

$$y(x) = e^{\alpha x} [A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)]. \quad (4.15)$$

4.8 Equações Diferenciais de Segunda Ordem Não-Homogêneas

4.8.1 Solução Particular

Definição 4.8.1. A função y_p que não depende de parâmetros arbitrários, e que satisfaz a equação

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{(n-1)}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y - b(x) = g(x). \quad (4.16)$$

é chamada de solução particular da equação. Se $y_1, y_2, \dots, y_n$ forem soluções de (2.2) em um intervalo I e se y_p for uma solução particular de (4.16) em I , então a combinação linear

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p. \quad (4.17)$$

é também uma solução da equação (4.16).

4.8.2 Solução Geral

Teorema 4.8.1 (Solução Geral - Equações Não Homogêneas). Seja y_p uma solução particular qualquer da equação diferencial linear não homogênea de ordem n (4.16) em um intervalo I , e seja, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ um conjunto de soluções da equação diferencial homogênea associada a (2.2) em I . Então, a solução geral no intervalo é

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p, \quad (4.18)$$

onde $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ são constantes arbitrárias.

A prova do teorema (4.8.1) pode ser vista no capítulo 4 do livro (ZILL, 2003).

4.8.3 Princípio de Superposição: equações não-homogêneas

Teorema 4.8.2 (Princípio da Superposição: Equações Não Homogêneas). Sejam $y_{p_1}, y_{p_2}, \dots, y_{p_k}$ k soluções particulares da equação diferencial linear não homogênea de ordem n (4.16) em um intervalo I correspondendo, por sua vez, a n funções distintas $g_1, g_2, \dots, g_n$. Isto é, suponha-se que y_p é uma solução particular da equação diferencial correspondente

$$a_n(x)y_{P_k}^{(n)} + a_{(n-1)}(x)y_{P_k}^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y_{P_k}' + a_0(x)y_{P_k} - b(x) = g(x), \quad (4.19)$$

onde $i = 1, 2, \dots, k$. Então,

$$y_p = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \dots + y_{p_k}(x), \quad (4.20)$$

é uma solução particular de

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_k(x). \quad (4.21)$$

A prova do teorema (4.8.2) pode ser consultada no capítulo 4 do livro (ZILL, 2003).

4.8.4 Método dos Coeficientes Indeterminados

O método dos coeficientes indeterminados são aplicados a equações do tipo

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (4.22)$$

com coeficientes constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ para $g(x)$ como funções do tipo exponenciais, polinomiais, cossenos, senos, somas ou produtos de tais funções. Essas funções $g(x)$ têm suas derivadas parecidas a própria função $g(x)$.

O método inicialmente requer uma hipótese inicial sobre a solução particular y_p , mas com coeficientes não determinados. Substitui-se então a função hipotética na equação (4.3) e tenta-se determinar os coeficientes de modo que a equação seja satisfeita. Caso a hipótese esteja correta, então obtêm-se a solução da equação diferencial e pode-se usá-la como solução particular y_p . Se os coeficientes não foram determinados, isso significa que não existe solução da forma que foi suposta. Nesse caso, tem-se que modificar a hipótese e tentar novamente. Este método é usado em equações onde a EDO homogênea associada onde os coeficientes são constantes e o termo não-homogêneo pertence a classes de pequenas funções.

4.8.4.1 Demonstração do Método dos Coeficientes Indeterminados - caso em que $g(x)$ é uma função polinomial

O modo geral da resolução do método pode ser utilizado para resolver diversos casos e formas do termo não homogêneo $g(x)$.

$$g(x) = P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n. \quad (4.23)$$

Então a equação (??) fica

$$ay'' + by' + cy = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n. \quad (4.24)$$

Para obter uma solução particular, supõe-se que

$$Y(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-2}x^2 + A_{n-1}x + A_n. \quad (4.25)$$

Substituindo na equação (4.25), obtêm-se

$$a[n(n-1)A_0x^{n-2} + \dots + 2A_{n-2}] + b(nA_0x^{n-1} + \dots + A_{n-1}) \quad (4.26)$$

$$+ c(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1} + A_n) = a_0x^n + \dots + a_n. \quad (4.27)$$

Igualando as potências iguais de x , obtêm-se

$$cA_0 = a_0, \quad (4.28)$$

$$cA_1 + nbA_0 = a_1 \quad (4.29)$$

$$\vdots \quad (4.30)$$

$$cA_n + bA_{n-1} + 2aA_{n-2} = a_n. \quad (4.31)$$

Quando $c \neq 0 \implies A_0 = \frac{a_0}{c}$.

Quando $c = 0$ e $b \neq 0$ então a equação não pode ser satisfeita, pois o grau do polinômio na equação (4.31) é $n-1$, para garantir um polinômio de grau n na equação $aY''(x) + bY(x)$ é preciso escolher um polinômio de grau $n+1$ para $Y(x)$. Então

$$Y(x) = x(A_0x^n + \dots + A_n). \quad (4.32)$$

Se c e b são iguais a zero então tem-se a equação

$$Y(x) = x^2(A_0x^n + \dots + A_n) \quad (4.33)$$

Portanto, $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ onde $y(x)$ é a solução da EDO homogênea associada. Existem outros casos, como o exponencial e trigonométrico, mas aqui é mostrado apenas o polinomial.

4.8.5 Variação de Parâmetros

Um outro método para encontrar uma solução particular de uma equação não-homogênea é o método da variação de parâmetros. A variação de parâmetros se destaca pelo fato de ser um método geral. Isto é, ele pode ser aplicado a qualquer equação e não precisa de hipóteses detalhadas sobre a forma de solução. Mas por outro lado, este método pode-se tornar-se um pouco mais complicado pois em alguns casos será preciso que seja feito o cálculo de integrais envolvendo o termo não-homogêneo da equação diferencial.

O método de variação de parâmetros é um método que pode ser utilizado para obter a solução geral(ou a solução particular) de uma equação diferencial ordinária linear não-homogênea

$$y^{(n)} + p_{(n-1)}y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x), x \in I, \quad (4.34)$$

Sabe-se que a solução geral da equação homogênea é

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x), \quad (4.35)$$

onde $c_1, c_2, \dots, c_n$ são constantes e $y_1, y_2, \dots, y_n$ são soluções linearmente independentes da EDO homogênea associada à (4.34).

Para tal método é preciso substituir as constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ por funções $u_1, u_2, \dots, u_n$ e tem-se que

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \dots + u_n(x)y_n(x), \quad (4.36)$$

a fim de satisfazer a equação não-homogênea (4.36).

As funções $u_1, u_2, \dots, u_n$ não são determinadas apenas para serem utilizadas nas equações não-homogêneas, usa-se também para determinar as equações homogêneas e impõe-se que

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0. \quad (4.37)$$

Esta condição elimina as derivadas de segunda ordem de u_1, u_2 e gera o sistema

$$\begin{cases} y_1(x)u_1'(x) + y_2(x)u_2'(x) = 0, \\ y_1'(x)u_1'(x) + y_2'(x)u_2'(x) = f(x), \end{cases}$$

que admite uma única solução, pois $W(x) \neq 0$.

Resolvendo o sistema obtém-se:

$$u_1(x) = c_1 - \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx \text{ e } u_2(x) = c_2 + \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx. \quad (4.38)$$

Então a solução geral da equação não-homogênea fica na forma

$$y(x) = \left[c_1 - \int_{x_0}^x \frac{y_2(\xi)f(\xi)}{W(\xi)} d\xi \right] y_1(x) + \left[c_2 + \int_{x_0}^x \frac{y_2(\xi)f(\xi)}{W(\xi)} d\xi \right] y_2(x) \quad (4.39)$$

E a solução particular da equação não-homogênea é representada por:

$$y_p(x) = -y_1 \int_{x_0}^x \frac{y_2(\xi)f(\xi)}{W(\xi)} d\xi + y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{y_2(\xi)f(\xi)}{W(\xi)} d\xi \quad (4.40)$$

A solução pode ser expressa em forma de integrais, conforme enunciado no teorema a seguir:

Teorema 4.8.3 (Teorema). Se as funções p, q e g forem contínuas em um intervalo aberto I e se as funções y_1 e y_2 formarem um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea associada à equação não-homogênea,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad (4.41)$$

então uma solução particular para a equação (4.41) é

$$y(x) = -y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{y_2(\xi)f(\xi)}{W(\xi)} d\xi + y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{y_2(\xi)f(\xi)}{W(\xi)} d\xi \quad (4.42)$$

onde x_0 é qualquer ponto escolhido convenientemente em I . A solução geral é

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x). \quad (4.43)$$

No próximo capítulo, apresentam-se dois problemas descritos por equações diferenciais de primeira ordem e suas soluções analíticas, além de suas resoluções através do software wxMaxima.

5 Aplicações com software wxMaxima

Alguns problemas matemáticos podem ser solucionados a partir da construção de modelos para descrever os fenômenos físicos envolvidos (STEWART, 2007). A solução para tais modelos é obtida a partir do emprego de procedimentos matemáticos adequados para cada situação-problema. Estes problemas de modelagem podem ser representados por equações diferenciais, isto é, uma equação que contém uma função desconhecida e algumas de suas derivadas. Como exemplo, de primeira ordem separável pode-se usar o mesmo tipo de raciocínio para descrever uma variedade de fenômenos tais como: reações químicas, descargas de poluentes em um lago, injeção de medicamentos na corrente sanguínea. Em um problema real normalmente nota-se que as mudanças ocorrem e quer-se prever o comportamento futuro com base na maneira como os valores presentes variam. Neste capítulo, modelam-se matematicamente dois problemas relacionadas à Farmacologia, resolve-se cada um deles analiticamente e compara-se com a solução obtida utilizando o wxMaxima.

5.1 Software wxMaxima

O Maxima (SANTOS, 2009) é um sistema algébrico computacional utilizado na resolução de cálculos numéricos e simbólicos, incluindo limites, derivadas, integração, séries de Taylor, transformada de Laplace, equações diferenciais ordinárias, sistemas de equações lineares, polinomiais, matrizes e vetores, entre outros. Ele determina resultados precisos e pode ser trabalhado em duas ou três dimensões. Pode ser utilizado tanto no Windows quanto no Linux. Neste trabalho o wxMaxima será utilizado para a resolução das Equações Diferenciais Ordinárias.

O Maxima (SANTOS, 2009) é derivado do sistema *Macysma*. Esse sistema foi desenvolvido no *Instituto de Tecnologia de Massachusetts* (MIT) nos anos de 1968 a 1982 como parte do projeto *Macintosh* (MAC). O MIT remanejou uma cópia do código fonte do *Macysma* para o departamento de Energia em 1982; aquela versão ficou conhecida como *Macysma*. Uma cópia do *Macysma* foi mantida pelo professor *William F. Schelter* da Universidade do Texas de 1982 até sua morte em 2001. Em 1998, *Schelter* conseguiu a permissão do Departamento de Energia Americano (DOE) para liberar o código fonte do *Macysma* sob licença pública da *General Public License* (GNU), e em 2000 ele iniciou o projeto Maxima no *Source Forge* para manter e desenvolver o *Macysma*, agora chamado Maxima. É o único sistema baseado em *Macysma* ainda publicamente disponível e com uma comunidade de usuários ativa. O Maxima é um software livre para a realização de cálculos matemáticos semelhante ao *Matlab* e ao *Mathematica*. O wxMaxima

é uma interface utilizada para facilitar o uso do software Maxima. Esse programa tem o código fonte aberto e ele pode ser melhorado. Se download pode ser feito pelo site: www.wxmaxima.sourceforge.net. Os comandos utilizados neste trabalho estão no Anexo A.

5.2 Problema da administração de glicose

Uma solução de glicose é administrada por via intravenosa na corrente sanguínea a uma taxa constante r . À medida que a glicose é adicionada, ela é convertida em outras substâncias e removida da corrente sanguínea a uma taxa que é proporcional à concentração naquele instante. Então um modelo para determinar a concentração $C = C(t)$ da solução de glicose na corrente sanguínea pode ser representado por:

$$\frac{dC}{dt} = r - kC, \quad (5.1)$$

onde k é uma constante positiva. A equação (5.1) modela o problema da administração de glicose. É representado por uma equação diferencial linear de primeira ordem, (porque contém uma função desconhecida que é a taxa de concentração no sangue $C(t)$ e a taxa de variação da concentração $\frac{dC}{dt}$ em relação ao tempo). Supondo que a concentração no tempo $t = 0$ é C_0 , busca-se determinar a concentração em um tempo t qualquer. Assumindo que $C_0 < \frac{r}{k}$ e através do cálculo do $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t)$, obtém-se a solução para o problema proposto.

A solução analítica para o problema proposto é obtida através do método de separação de variáveis:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= r - kC \\ \frac{dC}{dt} &= -(kC - r), \end{aligned} \quad (5.2)$$

integrando ambos os membros da igualdade

$$\begin{aligned} \int \frac{dC}{kC - r} &= \int -dt \\ \frac{1}{k} \ln |kC - r| &= -t + M_1, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde M_1 é a constante de integração. Multiplicando a equação (5.3) por $k \neq 0$, tem-se

$$\ln |kC - r| = -kt + M_2.$$

Aplicando a função exponencial a ambos os membros da equação, tem-se:

$$|kC - r| = e^{-kt + M_2}, \quad (5.4)$$

isto é,

$$kC - r = M_3 e^{-kt}. \quad (5.5)$$

Somando r a ambos membros de (5.5), obtém-se

$$kC = M_3 e^{-kt} + r. \quad (5.6)$$

Dividindo ambos os membros de (5.6) por k , obtém-se a solução geral de $C(t)$:

$$C(t) = M_4 e^{-kt} + \frac{r}{k}. \quad (5.7)$$

Aplicando a condição inicial $C(0) = C_0$ a (5.7), tem-se:

$$C_0 = M_4 + \frac{r}{k}, \quad (5.8)$$

chega-se ao valor da constante

$$M_4 = C_0 - \frac{r}{k}. \quad (5.9)$$

Portanto, a solução do problema é

$$C(t) = \left(C_0 - \frac{r}{k}\right) e^{-kt} + \frac{r}{k}. \quad (5.10)$$

Uma vez determinada a solução analítica da equação (5.1) sujeita à condição $C(0) = C_0$, representada por (5.10), apresentam-se os comandos do wxMaxima para se obter a solução para problema proposto.

```
(%i1) 'diff(C,x)= -(k*C-r);
```

```
(%o1)  $\frac{d}{dx}C = r - Ck$ 
```

```
(%i2) ode2('diff(C,x)=r-k*C, C,x);
```

```
(%o2)  $C = e^{-kx} \left( \frac{r e^{kx}}{k} + c \right)$ 
```

```
(%i3) ratexpand(%o2);
```

```
(%o3)  $C = c e^{-kx} + \frac{r}{k}$ 
```

Aplicando a solução inicial tem-se:

```
(%i4) ic1(%o3, C=C\_0,x=0);
```

```
(%o4)  $C = \frac{e^{-kx} (r e^{kx} - r + C_0 k)}{k}$ 
```

```
(%i5) method;
```

```
(%o5) linear
```

```
(%i6) ratexpand(%o4);
```

```
(%o6) 
$$C = -\frac{r e^{-kx}}{k} + C_0 e^{-kx} + \frac{r}{k}$$

```

```
(%i7) limit(%o6, x, inf);
```

k

Is positive, negative or zero? positive

```
(%o7) 
$$C = \frac{r}{k}$$

```

Para obter o gráfico do comportamento da solução (5.10), atribuem-se valores para as constantes k , r e C_0 .

Tomando-se $k = 0,01$ e $r = 0,0002$, como $C_0 > \frac{r}{k}$, então $C_0 > \frac{0,0002}{0,01}$. Neste trabalho, assume-se $C_0 = 0,15$. Estes valores seguem a sugestão de (STEWART, 2007).

Os comandos do wxMaxima para mostrar o gráfico da Figura 2 são:

```
(%i1) C\_0:0.15;
```

```
(%o1) 0.15
```

```
(%i2) k:0.01;
```

```
(%o2) 0.01
```

```
(%i3) r:0.0002;
```

```
(%o3) 2.010-4
```

```
(%i4) plot2d([-r*\%e\^{\{-k*t\}}/k+C\_0*\%e\^{\{-k*t\}}+r/k],\[\n    [t,0,700],[plot\_format, xmaxima]);
```

```
(%o4) C : /Users/maxout8244.wxmaxima
```

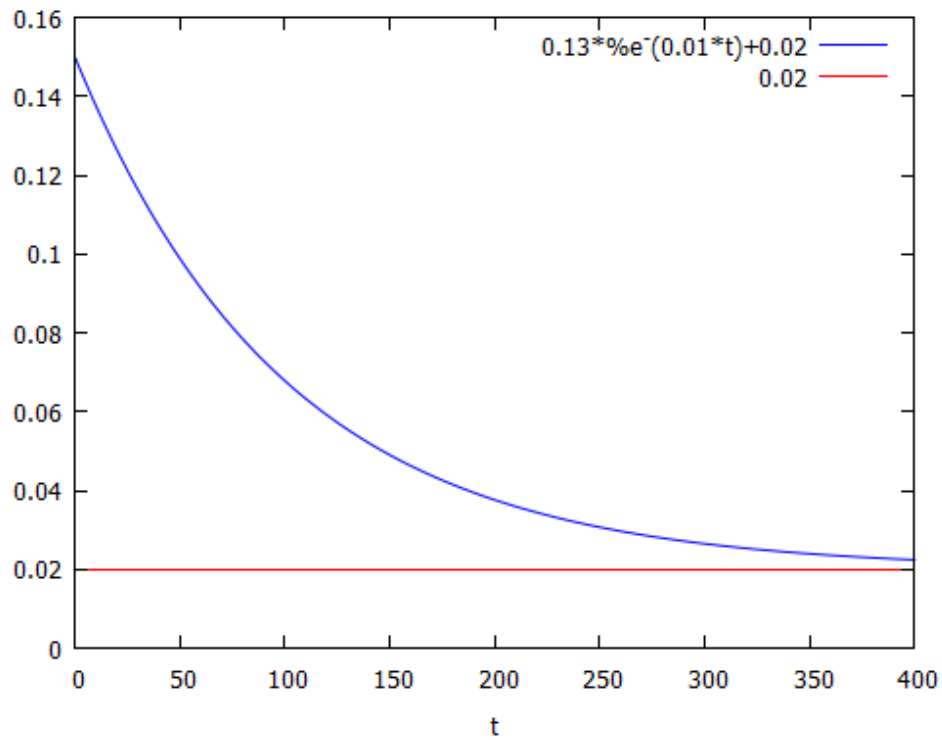


Figura 2 – Administração da glicose

É possível notar que através da solução obtida pelo software wxMaxima que apresenta $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = \frac{r}{k}$, para $k > 0$. A partir desse resultado e assumindo que se $C_0 < \frac{r}{k}$, então $C_0 - \frac{r}{k} < 0$. Nota-se a partir daí que $C(t)$ aumenta e à medida que t aumenta, $C(t)$ diminui de uma forma constante quando $\frac{r}{k}$ aumenta.

5.3 Problema de Absorção de remédios

Um dos problemas clássicos em Farmacologia consiste em saber como decai a concentração de uma droga administrada em um paciente (STEWART, 2007). A informação sobre esse fato admite que a dosagem seja aplicada na medida correta no paciente e o intervalo de tempo adequado entre cada aplicação.

O modelo em questão assume que seja $C(t)$ a concentração de um remédio na circulação sanguínea de um determinado paciente. À medida que o corpo elimina o remédio; $C(t)$ diminui a uma taxa proporcional à quantidade de medicamento que está presente naquele momento. Então a equação diferencial que modela o problema pode ser escrita como

$$\frac{dC(t)}{dt} = -kC(t), \quad (5.11)$$

onde k é um número positivo chamado constante de eliminação do remédio.

Supondo-se que seja ministrada uma dose inicial igual a C_0 no tempo $t = 0$, que é absorvida pelo sangue instantaneamente, precisa-se determinar a concentração no tempo t .

Aplicando o método de separação de variáveis na equação (5.11), tem-se:

$$\frac{dC(t)}{C(t)} = -k dt \quad (5.12)$$

Integrando ambos os membros de (5.12) em relação a t :

$$\int \frac{dC}{C} = -k \int dt$$

chega-se a

$$C(t) = B e^{-kt}. \quad (5.13)$$

Aplicando a condição inicial em (5.13), determina-se a constante B :

$$C(0) = B e^0. \quad (5.14)$$

Portanto,

$$C_0 = B. \quad (5.15)$$

Logo, a solução da equação diferencial (5.11) é

$$C(t) = C_0 e^{-kt}. \quad (5.16)$$

Utilizando o software wxMaxima, resolve-se a mesma EDO.

```
(%i1) 'diff(C,t)= -k*C/;
```

```
(%o1)  $\frac{d}{dt} C = -k C$ 
```

```
(%i2) ode2('diff(C,t)=-k*C, C,t);
```

```
(%o2)  $C = \%c e^{-k t}$ 
```

```
(%i4) ic1(%o2, C=C_0,t=0);
```

```
(%o4)  $C = e^{-k t} C\_0$ 
```

Uma aplicação prática do problema de absorção de drogas pode ser a determinação do tempo que o organismo leva para eliminar certa dosagem de uma substância aplicada em um paciente.

Suponha que se queira determinar quanto tempo o paciente leva para eliminar 90% do medicamento aplicado, sabendo-se que o corpo elimina metade do remédio em 30 horas.

Uma vez que em 30 horas o organismo elimina metade do medicamento, pode-se determinar o valor da constante de decaimento da concentração do remédio (k). Neste caso, tem-se:

$$C(30) = \frac{C_0}{2}, \quad (5.17)$$

então

$$C_0 e^{-30k} = \frac{C_0}{2}. \quad (5.18)$$

Logo,

$$k \approx 0,02310490601866484. \quad (5.19)$$

e, portanto, pode-se reescrever $C(t)$

$$C(t) = C_0 e^{-0,02310490601866484t}. \quad (5.20)$$

A fim de determinar o tempo t em horas que o paciente leva para eliminar 90%, considera-se que ainda restam no organismo apenas 10% da concentração inicial. Ou seja,

$$C(t) = 0,1C_0. \quad (5.21)$$

Igualando as equações (5.20) e (5.21), tem-se

$$0,1C_0 = C_0 e^{-0,02310490601866484t}. \quad (5.22)$$

Isolando a variável t em (5.22), obtém-se o valor procurado, isto é, $t \approx 100$ horas.

Este problema também pode ser resolvido no wxMaxima, digitando-se os comandos:

```
(%i1) C(t):=e^{(-k*t)*%C\_0};
```

```
(%o1) C(t) := e^{(-k)t} %C_0 Aplicando a condição inicial:
```

```
(%i2) eq1:C(30)=%C\_0/2;
```

```
(%o2)  $\frac{\%C_0}{e^{30k}} = \frac{\%C_0}{2}$ 
```

```
(%i3) solve (eq1, k)\$;
```

Observa-se que um único valor de k é real:

```
(%i4) k=log(2)/(30*log(\%e)),numer;
```

(%o4) $k = 0.02310490601866484$ Deve-se determinar o tempo que leva para o paciente eliminar 90% do medicamento:

```
(%i5) solve(log(1/10)=-0.02310490601866484*t,t),numer;
```

```
(%o5)
rat: replaced -2.302585092994045 by -11249839/4885743 = -2.302585092994044
rat: replaced 0.02310490601866484 by 731697/31668469 = 0.02310490601866481
rat: replaced -2.302585
092994044 by -11249839/4885743 = -2.302585092994044
rat: replaced 0.0231049060186648
1 by 731697/31668469 = 0.02310490601866481
rat: replaced 6.463121398319984E-15 by 1/1547
24000737467 = 6.463121398319984E-15
rat: replaced -99.65
784284662095 by -185232139/1858681 = -99.657842846
62081[t = 99.65784284662081]
```

Para obter o gráfico da solução é preciso determinar a dosagem a ser ingerida pelo paciente, então a condição inicial do medicamento a ser ministrado, será $C_0 = 60ml$, com esta condição é possível saber também através da solução gráfica quantas horas o remédio leva para agir no organismo do paciente. Portanto, têm-se:

```
--> C(t):=%C_0*exp(-0.02310490601866484*t);
(%o6)  $C(t) := \%C\_0 \%e^{(-0.02310490601866484 \cdot t)}$ 
```

Supondo uma quantidade inicial de 60ml de droga ou remédio:

```
--> %C_0:60;
(%o10) 60
```

```
--> C(t);
(%o11)  $60 \cdot e^{-0.02310490601866484 \cdot t}$ 
```

```
--> plot2d([C(t)], [t,0,100])$;
(%o12) C : /Users/Usuario/maxout.gnuplot]
```

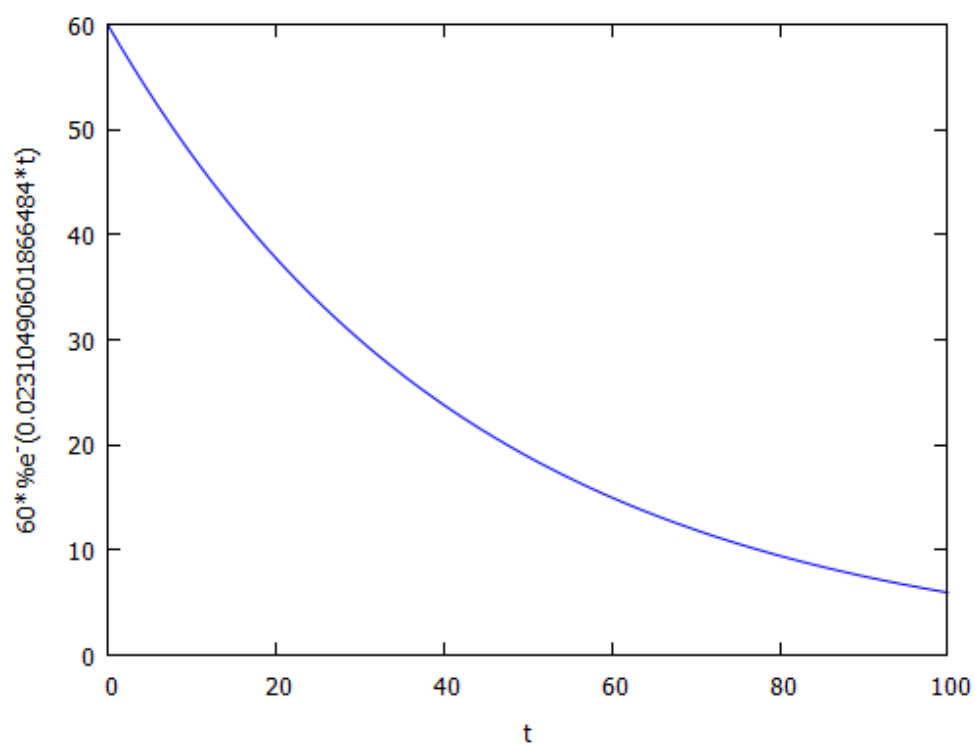


Figura 3 – Absorção de remédios

No próximo capítulo, apresentam-se as conclusões deste trabalho de conclusão de curso e uma proposta de trabalho futuro.

6 Conclusões

A teoria sobre equações diferenciais ordinárias é estudada há muito tempo, e até hoje, aborda assuntos relacionados ao nosso dia-a-dia. Com base neste fato, o presente trabalho foi escrito de modo a conter duas aplicações relacionadas à Farmacologia, com o propósito de mostrar aplicações nessa área e estudar conceitos da teoria das equações diferenciais ordinárias. Dentre os conteúdos estudados, destacam-se as definições, os teoremas e os métodos de solução das equações diferenciais ordinárias.

Neste trabalho foi apresentado o estudo de dois problemas de aplicação envolvendo equações diferenciais lineares: a administração da glicose na corrente sanguínea e o problema da absorção de remédios (estudo da concentração de remédios administrada em um paciente). Tais aplicações foram escolhidas a fim de mostrar a vasta abrangência dos conceitos envolvendo equações diferenciais, fugindo dos exemplos tradicionais como o crescimento populacional e o decaimento radioativo.

Os dois modelos matemáticos foram solucionados analiticamente e através do emprego do software de computação simbólica wxMaxima. O software, além de auxiliar na solução dos problemas, foi utilizado a fim de obter a representação gráfica da solução para os problemas de administração da glicose e absorção de remédios.

Os objetivos deste trabalho foram atingidos, uma vez que se obteve a solução das equações diferenciais ordinárias lineares tanto analiticamente, como utilizando o software. Tais soluções apresentaram o mesmo resultado, como já era esperado. Nesse caso, pode-se afirmar que o emprego da ferramenta computacional wxMaxima auxilia no entendimento da solução de tais equações.

Espera-se que esse trabalho contribua para estudos futuros, auxiliando na melhor compreensão dos conceitos sobre equações diferenciais ordinárias lineares. Futuramente, pretende-se continuar o estudo de equações diferenciais de segunda ordem, e utilizar o wxMaxima no estudo da solução de equações diferenciais parciais.

Referências

ALITOLEF, S. dos S. *Algumas aplicações das equações diferenciais*. 2011. Disponível em: <http://www.dmejp.unir.br/menus_arquivos/1787_2011_sergio_alitollef.pdf>. Acesso em: 20.07.2016. Citado na página 10.

ARAÚJO, J. E. de. *Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações*. 2011. Disponível em: <<http://dspace.bc.uepb.edu.br:8080/jspui/bitstream/123456789/429/3/PDF%20-%20Joselito%20Elias%20de%20Ara%C3%BAjo%201.pdf>>. Acesso em: 01.04.2015. Citado na página 10.

BASSANEZI, R. C.; JR., W. C. F. *Equações Diferenciais com Aplicações*. 2. ed. São Paulo: Harbra, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 16.

DIACU, F. *Introdução a Equações Diferenciais: Teoria e Aplicações*. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004. Citado na página 9.

FIGUEIREDO, D. G. de; NEVES, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadas*. 2. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2001. Citado na página 9.

NÓBREGA, D. D. *Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações*. 2016. Disponível em: <https://monografias.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/2777/6/Equa%C3%A7%C3%B5es%20diferenciais%20ordin%C3%A1rias%20e%20algumas%20aplica%C3%A7%C3%B5es_Monogr%C3%A1fia_N%C3%B3brega.pdf>. Acesso em: 28.10.2017. Citado na página 10.

SANTOS, B. *Introdução ao Software Maxima*. 2009. Disponível em: <<http://cmup.fc.up.pt/cmup/v2/include/filedb.php?id=289&table=publicacoes&field=file>>. Acesso em: 09.09.2017. Citado na página 33.

STEWART, J. *Cálculo, volume 2*. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 33, 36 e 37.

ZILL, D. G. *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*. 3. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003. Citado 7 vezes nas páginas 9, 11, 12, 13, 17, 28 e 29.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais*. 3. ed. São Paulo: Pearson Education, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 24.

Anexos

ANEXO A – Comandos do wxMaxima

A seguir são apresentados os principais comandos do wxMaxima utilizados ao longo deste trabalho.

Tabela 1 – Comandos do wxMaxima

Comando	Operação Executada
ode2(edo, variável dependente, variável independente)	Resolve equações diferenciais de primeira e segunda ordem.
ic1(solução geral, valor da variável dependente, valor da variável independente)	Resolve o problema de valor inicial formado por uma equação diferencial de primeira ordem.
'diff(variável dependente, variável independente)	Declara o termo dy/dx .
ratexpand()	Expande a expressão dada.
ratsimp()	Simplifica a expressão dada e todas as suas sub expressões.
method()	Explicita o método que foi utilizado para resolver a equação diferencial.
Limit (função, variável, valor que tende a variável, direção que se aproxima do limite)	Calcula limites no wxMaxima.
Solve(função, variáveis)	Resolve equações.
Eq:()	Define a equação no wxMaxima.
plot2d([], [], [])	Mostra o gráfico em 2 dimensões.