

Josiane Cristina Dias

Desenvolvimento Analítico e Soluções Numéricas para a Dinâmica de Cabos

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Novembro, 2019

Josiane Cristina Dias

Desenvolvimento Analítico e Soluções Numéricas para a Dinâmica de Cabos

Trabalho de Conclusão de Curso II, Matemática Aplicada Bacharelado, submetido por Josiane Cristina Dias junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Matemática Aplicada Bacharelado

Orientador: Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Novembro, 2019

Agradecimentos

Em especial, ao professor e orientador Sebastião Cícero Pinheiro Gomes, pela orientação e amizade.

A meu esposo Gilson Roberto Garcia dos Santos pela paciência, compreensão e ajuda ao longo desse período.

A minha família, pelo amor e pela constante preocupação com o meu bem-estar.

Aos amigos e amigas, em especial: Elisandra, Nathalia, Matheus Correa, Gabriela. Agradeço pela amizade desenvolvida ao longo desses anos.

Ao Fernando, que sempre me ajudou quando precisei.

A todos os professores do curso de Matemática Aplicada e da escola de Engenharia pelos ensinamentos.

Agradeço e muito ao IFRS – Rio Grande pois sem a ajuda dos colegas e diretores na organização dos meus horários seria impossível terminar esse curso.

Resumo

Cabos são amplamente utilizados em estruturas marítimas, mais especificamente no ramo das indústrias petrolíferas e naval. Cabos umbilicais utilizados em veículos subaquáticos operados remotamente (*ROV – Remotely Operated Vehicle*), *risers*, ou ainda cabos de reboque, amarração ou ancoragem para estruturas flutuantes requerem atenção especial. Devido à extensa gama de aplicações, realizar um estudo de tais estruturas é de extrema importância. A maioria dos trabalhos encontrados sobre modelagem de cabos utiliza a técnica de elementos finitos e, geralmente, em tais trabalhos o foco está voltado para a obtenção de esforços em equilíbrio estático, importante para efeitos de dimensionamento. Neste trabalho será feito um estudo analítico e numérico da dinâmica de cabos, utilizando neste último o método de discretização por diferenças finitas.

Palavras-chaves: Cabos, modelagem dinâmica, diferenças finitas, solução analítica, simulações.

Abstract

Cables are widely used in marine structures, specifically in field the oil and marine industries. Umbilical cables used in Remotely Operated Vehicle (ROV), risers, or towing cables, mooring or anchoring cables for floating structures require special attention. Due to the wide range of applications, conducting a study of such structures is of utmost importance. The most of the works found on cable modeling uses the finite element technique and generally, in such work the focus is on obtaining static equilibrium efforts, important for sizing purposes. In this work will be made an analytical study and numeric of cable dynamics, using in the last one the finite difference discretization method.

Key-words: Cable, dynamics models, finite differences, analytical solution, simulates.

Lista de tabelas

Tabela 1 – Classificação de equações diferenciais lineares de segunda ordem (CHAPRA; CANALE, 2015).	32
Tabela 2 – Parâmetros físicos adotados para a realização de simulações.	44
Tabela 3 – Dados relativos a cinco simulações com diferentes períodos das perturbações.	47

Sumário

1	INTRODUÇÃO	7
1.1	Revisão Bibliográfica	13
2	UM BREVE ESTUDO DA CATENÁRIA	16
2.1	Histórico	16
2.2	A Curva Catenária	16
2.3	Resultado Experimental com a Catenária	19
2.4	Comparação com a Parábola	20
3	DINÂMICA DE UM CABO SUSPENSO	24
3.1	Desenvolvimento Analítico	24
4	O MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS	31
4.1	Equações Diferenciais Parciais	31
4.2	Método Numérico de Diferenças Finitas	32
4.3	Método Explícito Aplicado à Equação do Calor	34
5	MÉTODO EXPLÍCITO APLICADO AO PROBLEMA DO CABO SUSPENSO	38
5.1	Equações por Diferenças Finitas	38
5.2	Simulações e Análise de Resultados	40
6	CONCLUSÕES	48
	REFERÊNCIAS	50

1 Introdução

A demanda por óleo e gás vem impulsionando a exploração de petróleo em regiões de águas cada vez mais profundas e distantes da costa. Essa busca sofre um enorme avanço no ano de 2006, quando um novo capítulo na história do petróleo mundial começa a tomar forma ao descobrir-se extensas reservas de petróleo e gás ao longo da costa sudeste do Brasil (Figura 1).

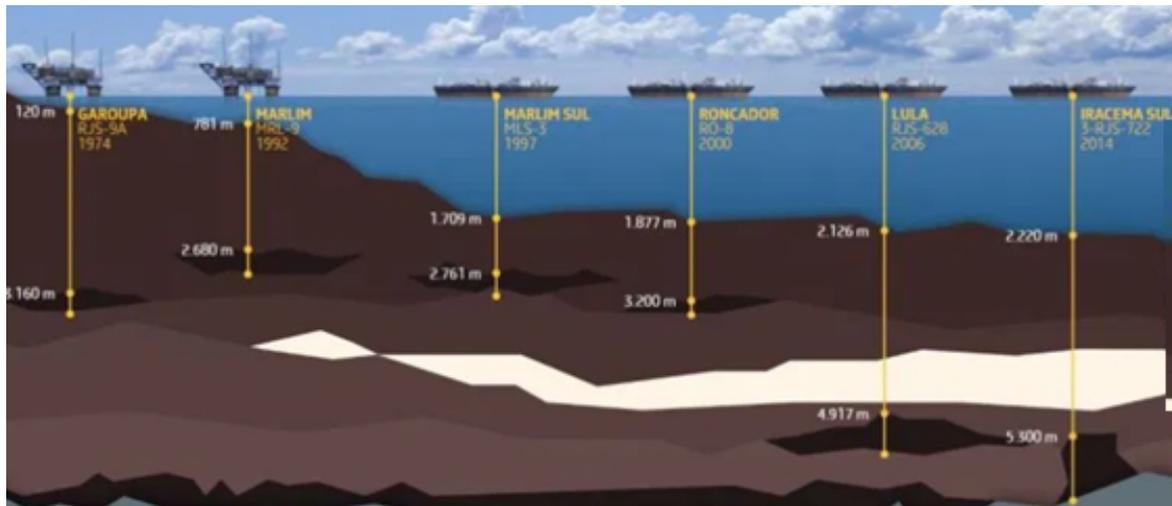


Figura 1 – Reservatórios de Petróleo de até 7 km (PETROBRAS, 2015).

A nova província de óleo possui uma extensão de quase 800 km de comprimento e reservas estimadas em bilhões de barris de óleo leve. Esse contexto tem gerado diversos desafios para a engenharia, pois produzir óleo e gás em um ambiente demasiadamente hostil no qual estão localizadas as jazidas, com condições oceanográficas severas, 300 km distante da costa, lâmina de água atingindo 2200 m de profundidade e reservatórios chegando a 5000 m abaixo do leito marinho, incluindo uma camada de sal de aproximadamente 2000 m de espessura além da existência de dificuldades relacionadas às altas pressões dos reservatórios, contaminantes presentes nos fluidos produzidos, transporte e logística, requerem investimentos em tecnologia de ponta. Para estabelecer novos padrões de perfuração e completação, muito foi investido em sistemas submarinos e de ancoragem de plataformas para toda a indústria. Tudo isso contribuiu para o plano logístico, ousado e de grande esfera nas operações (PETROBRAS, 2015).

Muitas das estruturas empregadas na indústria de petróleo são estruturas do tipo cabo e, dessa forma, o estudo da dinâmica de cabos constitui um tema de grande importância nessa área. Dentre alguns exemplos de aplicabilidade de estruturas do tipo cabo no universo subaquático estão os cabos umbilicais que são utilizados em veículos

subaquáticos operados remotamente (*ROV – Remotely Operated Vehicle*), *risers* (dutos que conduzem o petróleo ou gás do fundo do mar até a plataforma), ou ainda, cabos de reboque, amarração ou ancoragem para estruturas flutuantes. A Figura 2 ilustra alguns exemplos dessas aplicações.

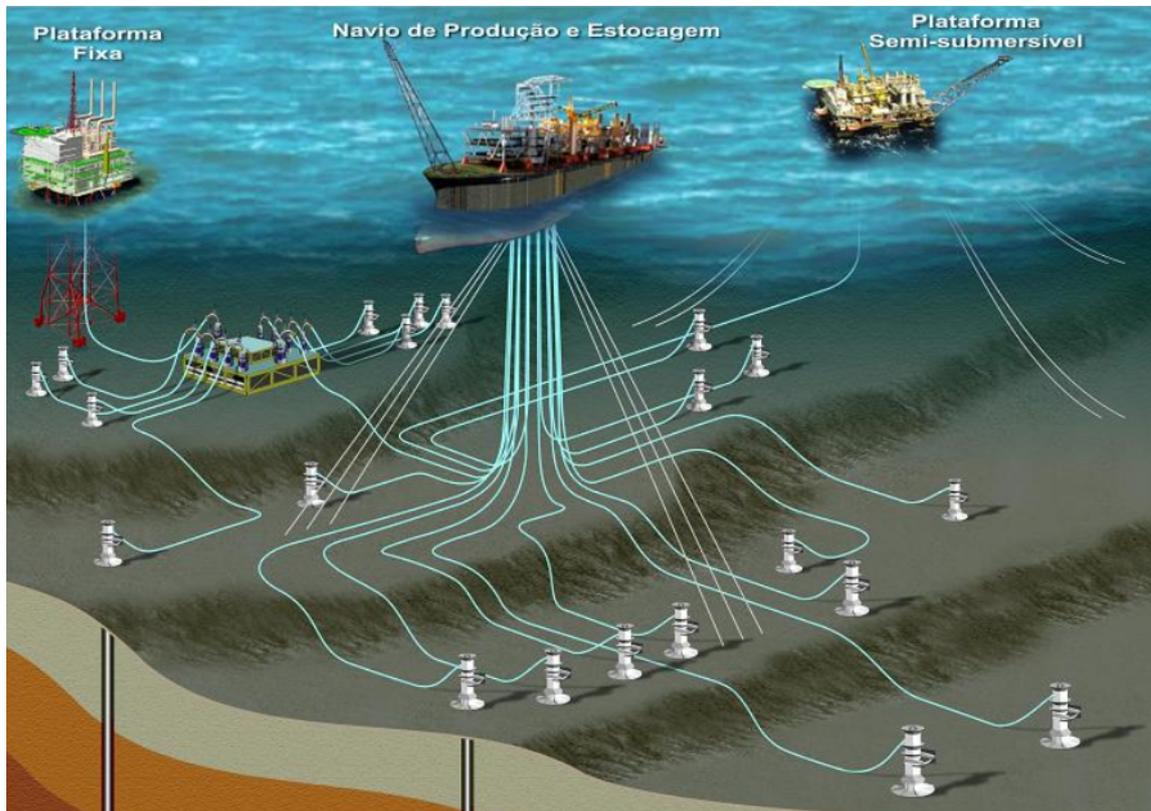


Figura 2 – Plataformas Petrolíferas (PRESAL, 2009).

Os cabos umbilicais (usados na transmissão de informação de dados e sinais) empregados nos sistemas de produção flutuantes para a exploração de petróleo constituem estruturas muito complexas, tanto com relação às geometrias quanto às composições de materiais utilizados. Na Figura 3 tem-se um exemplo de um cabo umbilical. Uma vez instalados, tais cabos possuem duas zonas que estão sobre solicitações muito diferentes. A primeira fica suspensa desde a unidade de produção até o fundo do mar, e a segunda encontra-se assentada no leito marinho. Na primeira zona as cargas atuantes são de natureza dinâmica, originadas pelas ondas, correnteza, ventos, movimentações do sistema de produção flutuante. Já na segunda zona as cargas atuantes são quase sempre estáticas. A zona em que o cabo encontra-se suspenso é onde se evidencia a complexidade dos carregamentos a que estão submetidos os cabos umbilicais (CORDOVÉS, 2008).

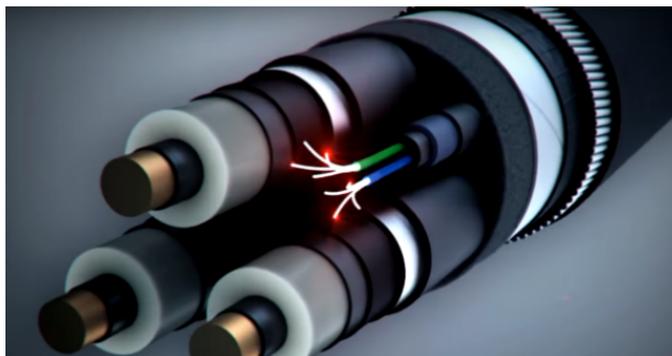


Figura 3 – Cabo umbilical (OMNISENSTV, 2012).

As linhas flexíveis e *risers* são de fundamental importância na indústria petrolífera, uma vez conectadas ao poço conduzem os componentes do petróleo (óleo, água e gás) até a plataforma para o seu processamento primário. Podem também interligar uma unidade a outra, para injeção ou descarte de fluidos em reservatórios ou para a exportação da produção em terra. Elas também podem ser utilizadas para injeção de gás e água no poço, com o objetivo de aumentar a produção de poços em que a energia de elevação natural foi diminuída com o tempo de produção, tal processo é chamado de completação.

Existem dois tipos de linhas flexíveis: linhas flexíveis com camadas aderentes e sem escorregamento entre as suas camadas, devido à vulcanização das camadas metálicas em uma matriz de elastômero. O outro tipo não possui aderências em suas camadas, ocorrendo livre deslizamento entre suas camadas. Este último tipo é mais usado no segmento *offshore* do Brasil.

As linhas flexíveis (Figura 4) são geralmente constituídas por camadas poliméricas e metálicas em forma de tubo e com um arranjo helicoidal (OLIVEIRA, 2017), possuem em suas extremidades acessórios denominados “conectores” e são empregados em todo sistema submarino de coleta e escoamento, tais conectores ligam as árvores de natal molhadas (conjunto de válvulas operadas remotamente instaladas na cabeça do poço submarino que controlam o fluxo do fluido produzido ou injetado no poço) a *manifolds* (conjunto de válvulas e acessórios que servem para direcionar a produção de vários poços para um duto coletor, o qual conduz a produção total para uma unidade de produção) ou a *risers*, os quais são ilustrados na Figura 5 (TECPETRO, 2014).



Figura 4 – Linha Flexível (PETROBRAS1, 2015).



Figura 5 – Árvore de Natal molhada (esquerda) e *manifolds* (direita). (PETROBRAS1, 2015).

Denomina-se *riser* às linhas flexíveis sujeitas às cargas dinâmicas da catenária, isto é, o trecho suspenso das tubulações que interligam as linhas de produção submarinas (oriundas de uma árvore de Natal molhada ou *manifold*) às plataformas. Dessa forma, o *riser* é a interface entre a estrutura que se encontra estática no leito marinho, e a estrutura flutuante que possui comportamento dinâmico. Os *risers* se destacam por apresentarem grandes desafios computacionais e de modelagem. Qualquer falha nos sistemas de *risers* pode causar sérios danos ao ambiente marinho e provocar interrupção na produção de óleo, gerando altos custos tanto no reparo quanto na recuperação do meio ambiente. Dessa forma, entende-se que o sistema de *risers* é uma das partes mais críticas em um projeto de estruturas *offshore*, e seu alto custo reflete um pouco essa importância (OLIVEIRA, 2017). Em sua construção devem-se utilizar componentes internos que suportem altas cargas de tração e compressão.

Existem diferentes tipos de *risers*, cada um empregado em diferentes situações: Os *risers* flexíveis em forma de catenária livre são empregados em águas relativamente rasas. Já em águas moderadamente profundas emprega-se uma boia intermediária com o

objetivo de atenuar o peso do comprimento do *riser*, estabelecendo-se uma dupla catenária *lazy-s*. Em águas profundas o uso de flutuadores vinculados ao fundo do mar se torna inviável, e se empregam então flutuadores de espuma colocados ao longo do comprimento do *riser*. Estas configurações se denominam: *lazy wave* e *steep-wave*. Ilustra-se na Figura 6 algumas dessas configurações empregadas em *risers* e cabos umbilicais. Na Figura 7 destaca-se a configuração *Lazy-wave* (uma das mais utilizadas no mercado *offshore*) e na Figura 8 pode-se ver os componentes internos de um *riser*.

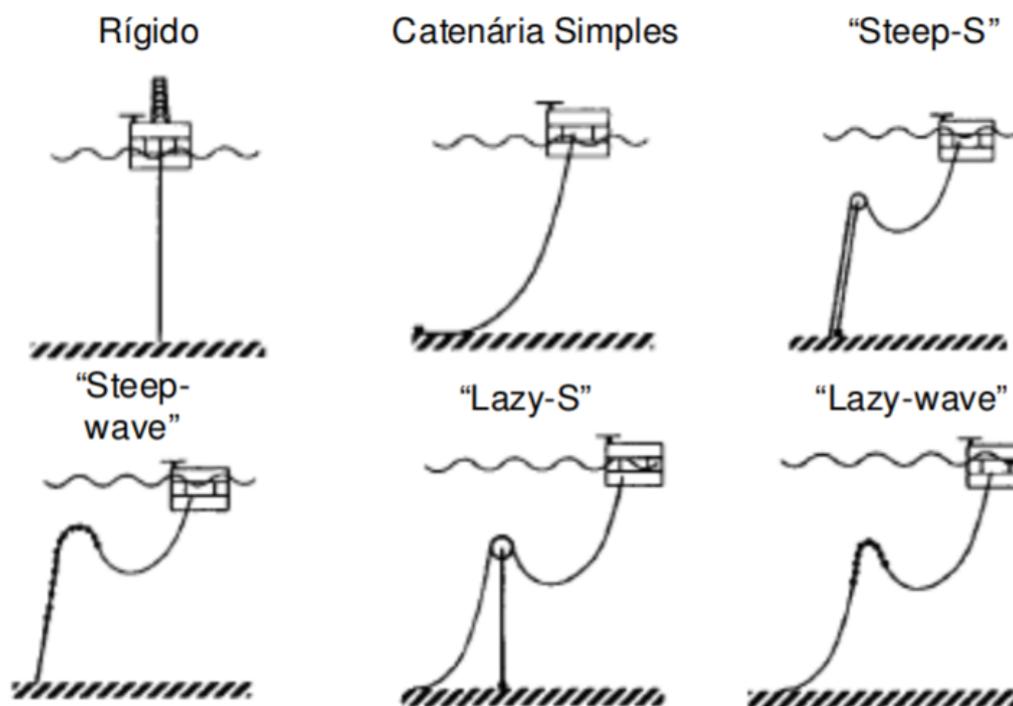


Figura 6 – Configurações utilizadas em *Risers* e cabos umbilicais.

Configurações em catenária do *Riser*:

- Catenária Simples: é uma catenária direta do leito marinho até a plataforma, nesse caso todo o peso do *Riser* é suportado pelo suporte da plataforma;
- *Steep-S* e *Lazy-S*: Nessas configurações um flutuador é utilizado, esse flutuador encontra-se ancorado ao leito marinho e faz com que o peso do *Riser* seja aliviado, diminuindo dessa forma as cargas do próprio peso sobre o suporte da plataforma. Na configuração *Steep-S* a transição é feita por conexão fixa e na *Lazy-S* a transição é feita livremente no leito marinho;
- *Steep-wave* e *Lazy-wave*: Caracteriza-se pelo uso de boias ao longo de um trecho do *Riser*, fazendo com que o próprio peso do *Riser* seja aliviado, diminuindo as cargas sobre o suporte da plataforma, essas configurações geralmente são utilizadas em águas mais profundas onde torna-se difícil ancorar uma boia ao leito marinho. Da mesma forma

que nas configurações anteriores a *Steep-wave* a transição é feita por conexão fixa e na *Lazy-wave* a transição é feita livremente no leito marinho (SCHIMIDT, 2016).

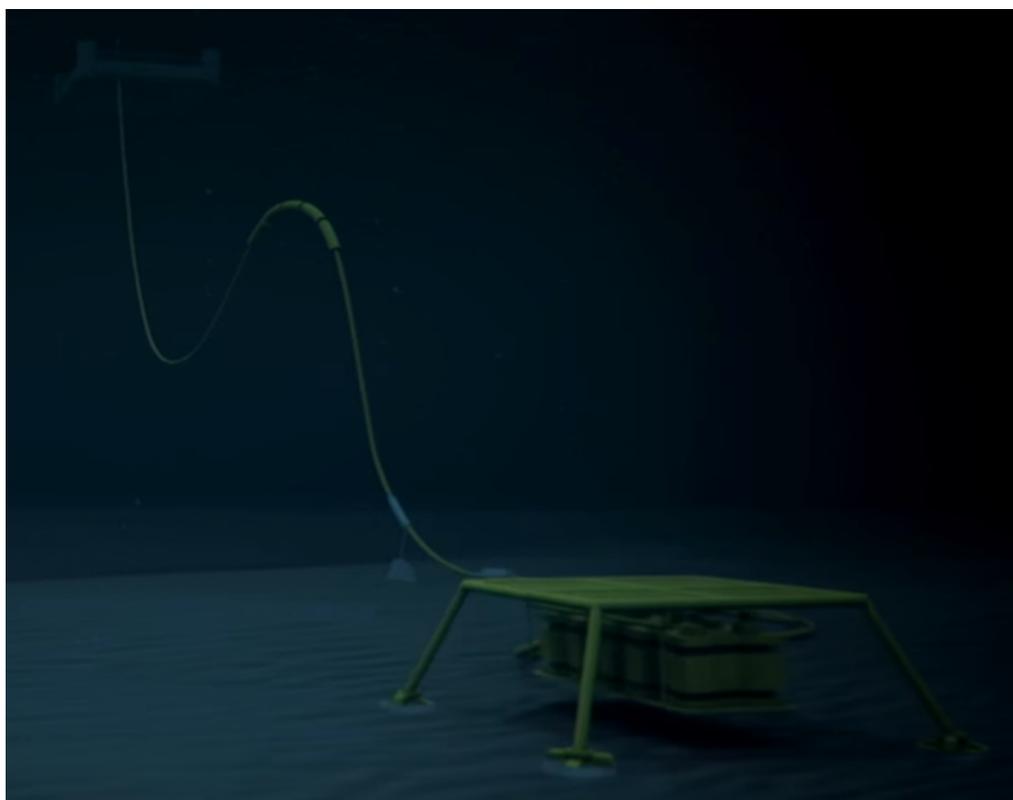


Figura 7 – *Riser* em configuração *Lazy-wave*.

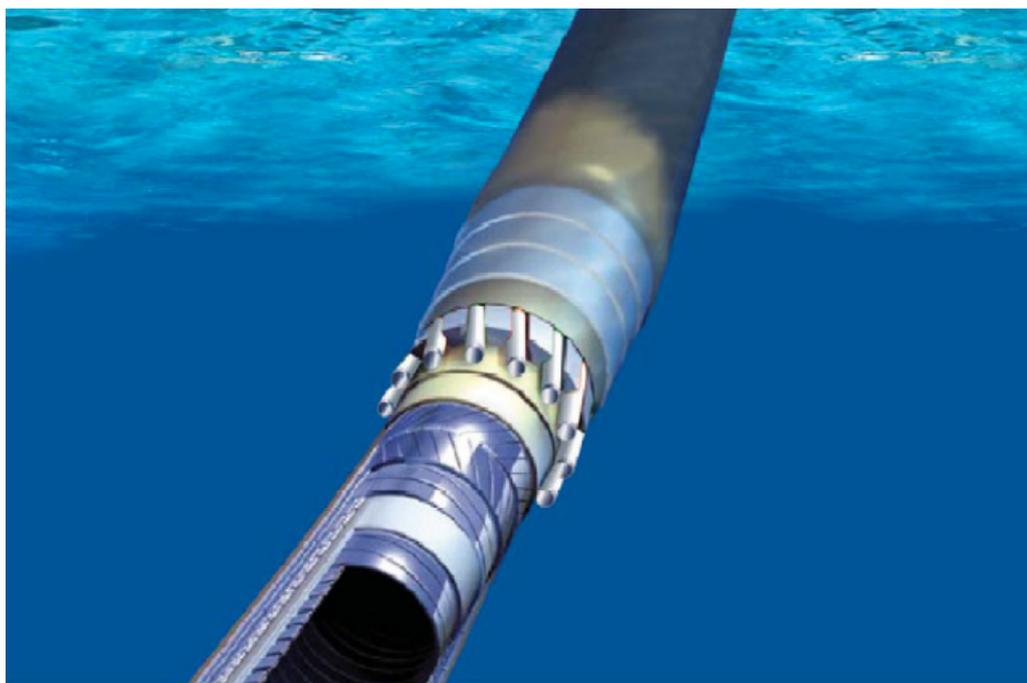


Figura 8 – *Riser* flexível (OLIVEIRA, 2017).

Como pode-se perceber, existe uma extensa gama de aplicações de cabos subaquáticos e, dessa forma, realizar um estudo de tais estruturas é de extrema importância. Entretanto, devido às não-linearidades e aos muitos graus de liberdade, torna-se tarefa árdua o desenvolvimento de modelos dinâmicos para cabos.

Existe na literatura uma grande quantidade de trabalhos sobre a modelagem dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo e suas aplicações. A maioria dos trabalhos encontrados sobre modelagem de cabos utiliza a técnica de elementos finitos que consiste num método numérico para análise de fenômenos físicos em meios contínuos (obtido a partir da discretização do sistema) e, geralmente, em tais trabalhos o foco está voltado a obtenção de esforços em equilíbrio estático, importante para efeitos de dimensionamento.

1.1 Revisão Bibliográfica

Em trabalhos anteriores a este, Luongo et. al. (LUONGO; ZULLI; PICCARDO, 2008) utiliza métodos de soluções, tais como diferenças finitas e o método de Galerkin, para estudar a dinâmica de cabos suspensos. Chatjigeorgiou e Mavrakos (CHATJIGEORGIOUS; MAVRAKOS, 2010) propõem uma solução utilizando a técnica das diferenças finitas. Srivastava et al (SRIVASTAVA; YVSS; TAMSIR, 2011) apresentam uma abordagem numérica por diferenças finitas, a fim de prever o comportamento dinâmico de cabos utilizados em reboque de embarcações, quando o navio de reboque tem sua velocidade linearmente alterada.

Chang et. al. (CHANG; LEE, 2008) investigam o comportamento dinâmico de um cabo com base na teoria da catenária com uso do método dos elementos finitos. Escalante et al. (ESCALANTE et al., 2011) utilizam o método dos elementos finitos aplicado a obtenção de um modelo de ordem reduzida, a partir de decomposições ortogonais. Wolfschluckner e Jodin (WOLFSCHLUCKNER; JODIN, 2013) comparam o método dos elementos finitos com métodos numéricos e analíticos, para descrever o comportamento dinâmico de um cabo.

Pereira (PEREIRA, 2010) investiga a interação fluido-estrutura de um cabo submerso a partir do acoplamento da dinâmica do cabo com o movimento do fluido, utilizando uma aproximação discreta e o formalismo Lagrangeano para a dinâmica do cabo, cujos principais resultados foram publicados em Pereira et al. (PEREIRA; GOMES; BORTOLI, 2012). Zanela (ZANELA, 2013) usa uma abordagem discreta para a modelagem tridimensional de estruturas flexíveis do tipo cabo. Em Pouzada (POUZADA; GOMES, 2017) foram consideradas duas situações: um cabo articulado a uma plataforma móvel numa das extremidades e livre na outra; cabo articulado à plataforma móvel numa das suas extremidades e fixo ao fundo do mar na outra e, neste caso, foi utilizado o formalismo de Euler-Lagrange para obtenção do modelo dinâmico do cabo, cujas estruturas flexíveis

foram aproximadas por uma equivalente discreta, formada por elos rígidos conectados por articulações elásticas fictícias.

O objetivo principal do presente trabalho é realizar um estudo sobre a modelagem dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo. O estudo primeiramente será no sentido de obter expressões analíticas da configuração estática de um cabo, o qual se conforma numa curva denominada catenária e, portanto, faz-se um breve apanhado histórico desta curva bem como a obtenção de sua equação. Posteriormente, o caminho se dará na resolução da equação diferencial que governa a dinâmica do cabo: obtém-se as equações diferenciais da dinâmica e a solução numérica, utilizando-se para esse fim o método numérico de diferenças finitas. Posteriormente, simulações são realizadas utilizando-se o *software Matlab*, incluindo-se em seguida uma análise qualitativa dos resultados. Compara-se também, no decorrer do trabalho, a catenária prevista de forma analítica com a configuração espacial do cabo obtida experimentalmente, utilizando-se um aparato experimental desenvolvido em um trabalho de mestrado do Programa de Modelagem Computacional da FURG.

Este trabalho está dividido em 6 Capítulos. O presente Capítulo trata de uma introdução geral, contendo uma apresentação sobre o tema proposto e ressaltando sua importância, principalmente em aplicações no ambiente subaquático. Também neste capítulo é acrescentada a revisão bibliográfica.

No Capítulo 2 apresenta-se um breve estudo da Catenária, curva que representa um cabo suspenso por suas extremidades e sujeito ao próprio peso. Neste capítulo também é obtida a equação da catenária por meio das equações de equilíbrio de forças. Resultados experimentais são utilizados para comparar com as equações obtidas de forma analítica. Em muitos artigos utiliza-se um perfil parabólico (BENEDITTINI; REGA; ALAGGIO, 1995) na solução das equações diferenciais da dinâmica de cabos, utilizando-se principalmente o método de diferenças finitas. Por esta razão, no Capítulo 2 são apresentadas comparações entre as curvas catenária e parábola.

O Capítulo 3 aborda a dinâmica de um cabo suspenso e, neste capítulo, obtém-se de forma analítica a equação diferencial da dinâmica de um cabo suspenso por suas extremidades. O desenvolvimento é específico para a dinâmica restrita ao plano vertical.

No Capítulo 4 aborda-se o método numérico das diferenças finitas e posteriormente, dentro deste capítulo, exemplifica-se o método na equação diferencial da distribuição de temperatura ao longo de uma barra metálica.

Utilizando-se do método das diferenças finitas na forma explícita para a resolução da equação diferencial que governa a dinâmica de um cabo elástico suspenso, sujeito ao seu peso, obtém-se no Capítulo 5 a solução aproximada da dinâmica do cabo. Neste capítulo são apresentadas algumas simulações, cujos resultados são analisados de forma qualitativa.

No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões e considerações finais. Ao final são mostradas algumas referências bibliográficas que foram utilizadas no decorrer deste trabalho.

2 Um Breve Estudo da Catenária

Neste capítulo apresenta-se um breve estudo da Catenária, curva que representa um cabo suspenso por suas extremidades e sujeito ao próprio peso e por meio das equações de equilíbrio de forças a equação da catenária é obtida. Ao final, resultados experimentais são utilizados para comparar com as equações obtidas de forma analítica.

2.1 Histórico

O estudo da curva atualmente conhecida como catenária teve início com o matemático italiano Galileu Galilei (1564-1642). Galileu em seu *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze* publicado em 1638, observa a forma de uma corrente suspensa e conclui (erroneamente) que a curva formada era uma parábola em analogia com o voo de um projétil. Mais tarde, no mesmo século, matemáticos demonstraram que essa curva não era uma parábola.

No século XVII era comum que os matemáticos recebessem desafios para serem solucionados. Tais desafios eram muitas vezes acompanhados de premiações. Foi dessa maneira que o problema da catenária foi rerepresentado. O problema proposto inicialmente por Galileu em 1638 foi revisto e solucionado simultaneamente entre os anos de 1690 e 1691 pelos irmãos Bernoullis (James e John), Leibnitz e Huygens (IRVINE; CAUGHEY, 1974).

2.2 A Curva Catenária

Define-se então a catenária como sendo uma curva feita por um fio flexível de densidade uniforme suspenso entre dois pontos e submetida a esforços oriundos do seu próprio peso (Figura 9). Dessa forma, é natural que o estudo de cabos inicie-se por meio do estudo da configuração de equilíbrio estático assumido por cabos flexíveis devido ao seu próprio peso.

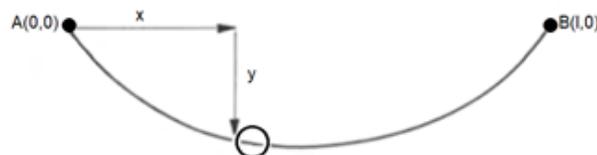


Figura 9 – Cabo preso em duas extremidades (IRVINE; CAUGHEY, 1974).

Como visto anteriormente, a maioria das linhas de ancoragem possui a mesma configuração de catenária livre. A configuração em catenária livre ou *free-hanging* é considerada a mais simples e barata devido ao menor número de componentes, o que leva a baixo custo de material e instalação. Para grandes profundidades, as maiores desvantagens dessa configuração são o alto peso suportado pela plataforma, a necessidade de uma grande área livre no fundo para utilização dessa configuração e as pancadas sofridas pelo *Riser* na região do TDP (*touch down point*) devido ao movimento da plataforma que gera deslocamentos de todo o *Riser*, gerando fadiga na região. Algumas vezes, para viabilizar o uso dessa configuração, a linha é ancorada por estacas de sucção ou torpedo logo após o TDP da catenária do *Riser* (OLIVEIRA, 2017).

A Figura 10 ilustra uma catenária, onde são mostradas as tensões T_0 com inclinação nula e T em um ponto qualquer, que está sendo designado por (x, y) .

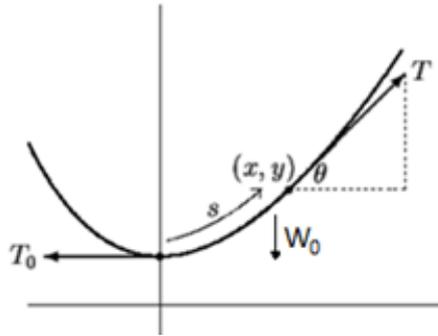


Figura 10 – Catenária.

A equação diferencial da catenária é obtida a partir das equações de equilíbrio estático. Seja θ o ângulo da reta tangente à curva em um ponto de coordenadas (x, y) . Como o cabo está em equilíbrio estático tem-se:

$$T \sin \theta = w_0 s; \quad T \cos \theta = T_0, \quad (2.1)$$

onde w_0 é a carga por unidade de comprimento e s o comprimento do arco. Das duas relações anteriores chega-se a $\tan \theta = as$, cuja constante a é dada por $a = w_0/T_0$. Da figura 10, tem-se que $\tan \theta = \frac{dy}{dx} = y'$ e, dessa forma,

$$y' = \frac{dy}{dx} = as. \quad (2.2)$$

Derivando-se a equação 2.2 em relação a x , e isolando-se a derivada de s , tem-se:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{a} \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (2.3)$$

Por Pitágoras obtém-se $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, que pode ser reescrito como

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (2.4)$$

Pode-se neste ponto, com intuito de tornar mais claro o que virá no decorrer deste trabalho, reescrever a equação 2.3 na forma

$$w_0 \frac{ds}{dx} = T_0 \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (2.5)$$

Quando o lado esquerdo da equação 2.5 é constante (intensidade do carregamento por unidade de vão) o resultado é um perfil parabólico. Igualando-se a equação (2.3) a (2.4) chega-se a

$$\frac{1}{a} \frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (2.6)$$

Define-se $\frac{dy}{dx} = p$,

$$\frac{1}{a} \frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2} \quad (2.7)$$

e

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int a dx \quad (2.8)$$

o que resulta em

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = ax + c.$$

Da condição de contorno $p = y' = 0$ em $x = 0$ obtém-se:

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = ax$$

$$p + \sqrt{1 + p^2} = e^{ax}$$

$$\sqrt{1 + p^2} = e^{ax} - p$$

$$1 + p^2 = e^{2ax} - 2pe^{ax} + p^2$$

$$1 = e^{2ax} - 2pe^{ax}$$

$$p = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} = \sinh ax = y'. \quad (2.9)$$

Dessa forma,

$$y' = \sinh ax, \quad (2.10)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}. \quad (2.11)$$

Integrando-se a equação (2.10) e fazendo-se uso da condição $y(0) = 0$, chega-se a:

$$y = \frac{1}{a} [\cosh(ax) - 1]. \quad (2.12)$$

O comprimento de arco s é igual ao comprimento do cabo desde 0 até o ponto x . Pela integração da equação (2.4)

$$L = \int_0^{x_c} \sqrt{1 + (\sinh ax)^2} dx \quad (2.13)$$

obtem-se a solução

$$L = \frac{1}{a} \sinh(ax_c). \quad (2.14)$$

Considerando-se conhecidos o comprimento L do cabo e a posição $x = x_c$ da carga terminal, determina-se a constante a aplicando-se o algoritmo da bissecção à equação:

$$L - \frac{1}{a} \sinh(ax_c) = 0. \quad (2.15)$$

2.3 Resultado Experimental com a Catenária

O objetivo desta seção é realizar uma comparação entre uma curva experimental e a catenária obtida nas mesmas condições do experimento.

Considera-se, inicialmente, um cabo muito flexível, estilo corda, de material sintético, com uma das extremidades fixa ao teto e a outra extremidade livre, na qual foi colocada uma carga terminal de massa conhecida. Esta carga terminal foi levada a uma posição final (x_c, y_c) e mantida fixa nesta posição, formando assim uma catenária como configuração espacial do cabo. O cabo tem comprimento total $L = 2,585 m$. O experimento montado consiste na captação da configuração espacial do cabo a partir de uma câmera digital, conforme ilustra a Figura 11. Doze marcações em vermelho foram feitas no cabo, de forma a facilitar a identificação das suas posições no plano vertical, realizada a partir de imagem captada com a câmera. Conhecendo-se x_c e L , identifica-se a constante a a partir da equação (2.15), utilizando-se, por exemplo, o algoritmo da bissecção.

A Figura 12a mostra a imagem do cabo em sua configuração espacial de equilíbrio estático, enquanto a Figura 12b a curva catenária ressaltando dois pontos: um na metade do comprimento do cabo e outra na sua extremidade. Pode-se observar que as posições teóricas previstas com a catenária praticamente coincidem com as experimentais. É importante ressaltar que esse resultado só acontece porque o cabo escolhido é extremamente flexível, de forma que as tensões internas oriundas de forças de potencial elástico são negligenciáveis.

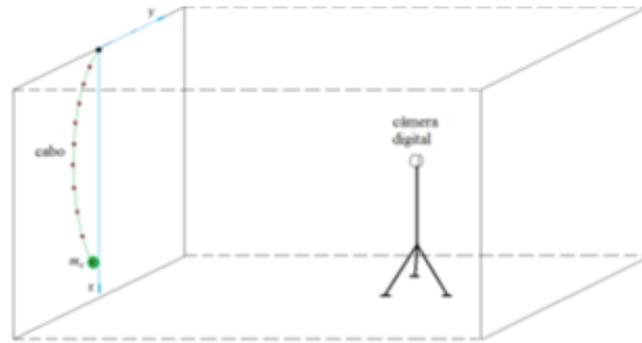


Figura 11 – Experimento para a captura da posição espacial do cabo.

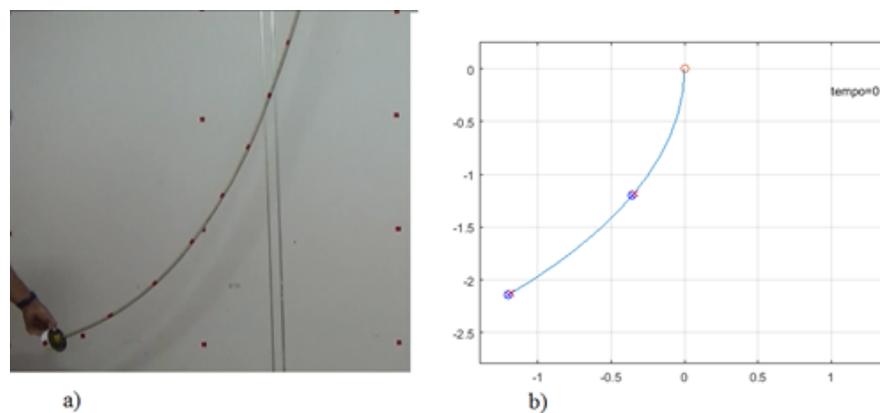


Figura 12 – Configuração espacial do cabo: a) imagem captada; b) curva obtida destacando-se pontos experimental (“x” em vermelho) e teórico (“o” em azul).

2.4 Comparação com a Parábola

Conforme dito anteriormente, Galileu imaginava que um cabo ou corrente com suas extremidades fixas de forma a ficar suspenso no espaço, teria conformação espacial prevista por uma curva parabólica. Nesta seção, tem-se como objetivo comparar as curvas catenária e parábola, utilizadas na representação da configuração espacial de um cabo suspenso nas suas extremidades.

Alguns trabalhos científicos que utilizam diferenças finitas para a solução da equação diferencial que representa a dinâmica de um cabo suspenso em dois pontos consideram, para a configuração espacial inicial do cabo, a seguinte equação parabólica:

$$y = 4bx \left[\frac{x}{l^2} - \frac{1}{l} \right] \tag{2.16}$$

sendo b a flecha e l o vão. A Figura 13 mostra a parábola, considerando-se $l = 30\text{ m}$ e $b = 8\text{ m}$. O comprimento total do cabo L pode ser calculado tanto de forma analítica (integral de linha) quanto numérica. Se a opção for numérica, um procedimento numérico

simples consiste na utilização da equação (2.17), considerando-se as equações (2.18) a (2.21):

$$L = \sum_{i=1}^n ds_i \quad (2.17)$$

$$ds_i = \sqrt{dx_i^2 + dy_i^2} \quad (2.18)$$

$$x_i = x_{i-1} + h \quad (2.19)$$

$$dx_i = h \quad (2.20)$$

$$dy_i = y_i - y_{i-1} \quad (2.21)$$

O comprimento total do cabo para $l = 30 \text{ m}$ e $b = 8 \text{ m}$ corresponde a $L = 34,978 \text{ m}$.

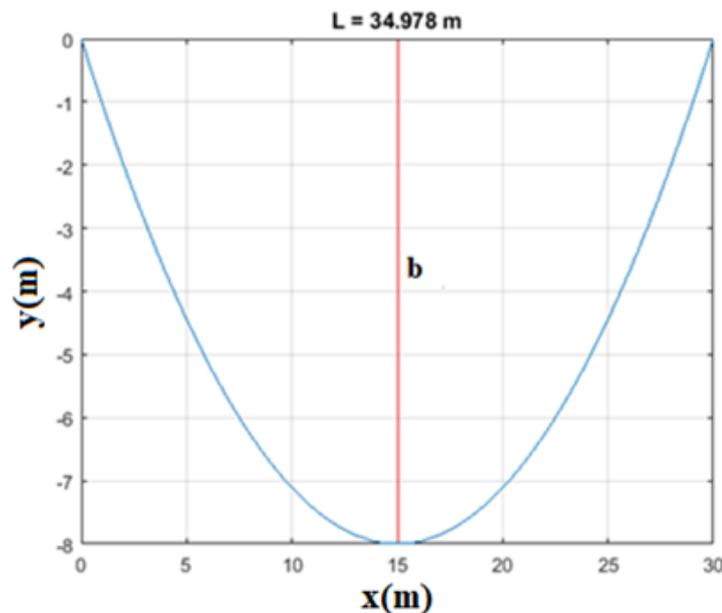


Figura 13 – Curva parabólica, considerando $l = 30 \text{ m}$ e $b = 8 \text{ m}$.

Uma catenária suspensa em dois pontos de mesma altura foi obtida considerando-se $l = 30 \text{ m}$ e $L = 34,978 \text{ m}$ e, na Figura 14, vê-se esta curva sobreposta à parábola já obtida anteriormente (Figura 13). A Figura 15 mostra uma sobreposição semelhante, mas considerando-se $b = 12 \text{ m}$ e na Figura 16 $b = 1,5 \text{ m}$. Percebe-se que, para pequenos valores de b , a parábola realmente pode ser usada em substituição à catenária (aconselha-se $b/l < 1/20$).

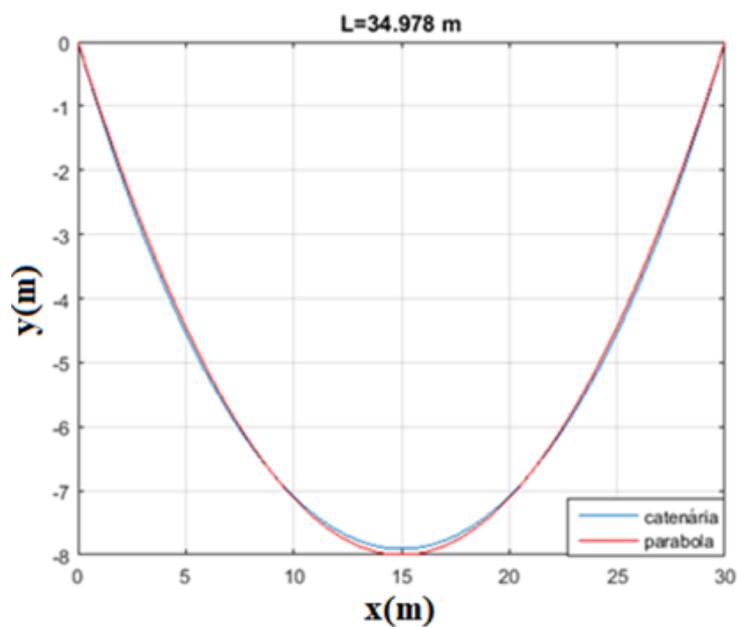


Figura 14 – Curvas parábola e catenária, para $b = 8 \text{ m}$.

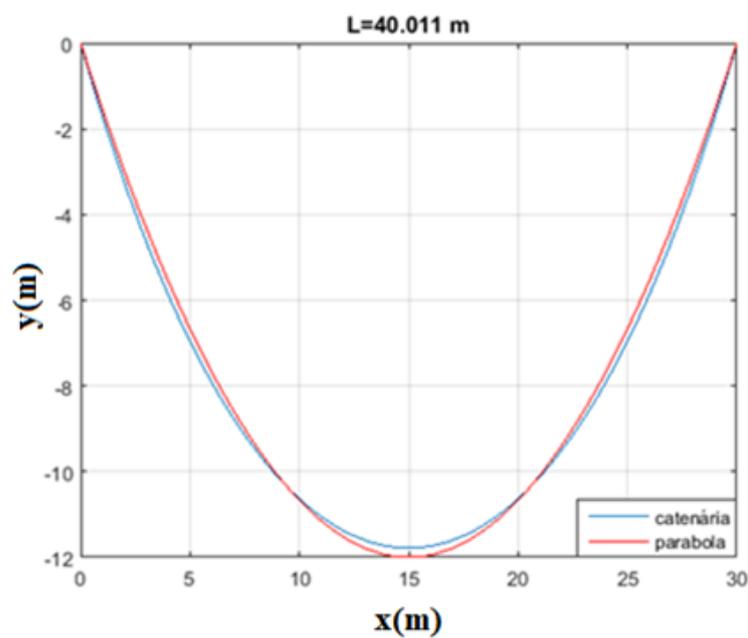


Figura 15 – Curvas parábola e catenária, para $b = 12 \text{ m}$.

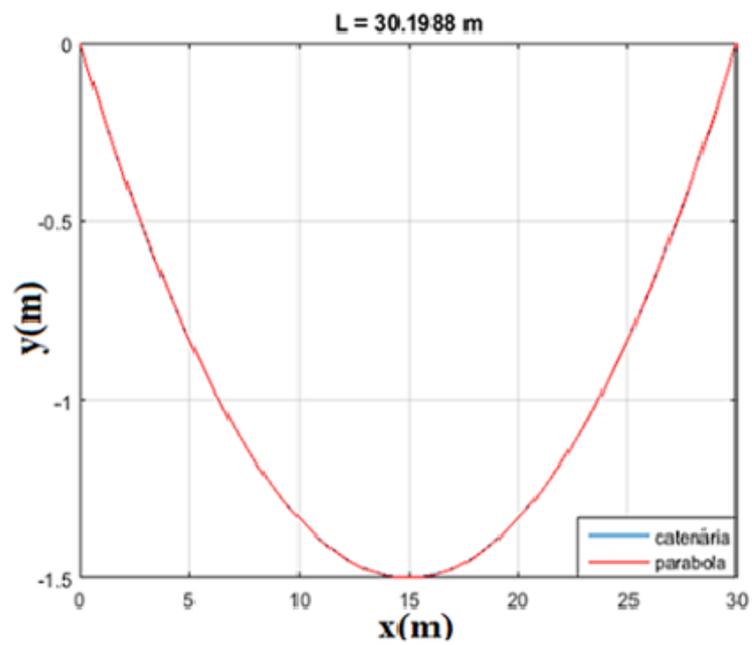


Figura 16 – Curvas parábola e catenária, para $b = 1,5 m$.

3 Dinâmica de um Cabo Suspenso

Este capítulo aborda a dinâmica de cabos suspensos em suas extremidades, iniciando-se pela obtenção das equações analíticas do cabo suspenso. As equações foram obtidas de acordo com um artigo que é referência no estudo da dinâmica de cabos (BENEDITINI; REGA; ALAGGIO, 1995), para o caso de movimento no espaço tridimensional. Porém, no presente trabalho, não será analisada a dinâmica fora do plano vertical e, dessa forma, após a obtenção das equações analíticas do cabo suspenso simplificações serão feitas de modo a permanecer com a dinâmica no plano vertical. Posteriormente, a equação diferencial obtida de forma analítica será solucionada, utilizando-se para isso uma solução numérica via diferenças finitas.

3.1 Desenvolvimento Analítico

Na resolução de muitos problemas físicos utiliza-se a formulação por meio de equações diferenciais e, em alguns casos, apenas uma variável independente aparece nas equações. Tais equações são chamadas de equações diferenciais ordinárias. No entanto, existem problemas que possuem mais de uma variável independente e tais equações são chamadas de equações diferenciais parciais. Neste trabalho o interesse está voltado ao segundo caso, em que a equação diferencial possui mais de uma variável, mais especificamente duas, a variável t (tempo) e a variável x (posição).

Considere-se um fio, cabo ou corda finos, distendidos horizontalmente por uma força T , mais precisamente um par de forças. Suponha-se que o cabo possa ser deformado (não oferece resistência à flexão), a partir da sua posição original, por meio de forças moderadas (pequenas com relação a T), que agirão permanentemente ou serão usadas para produzir um deslocamento inicial ou um movimento transversal inicial do fio. É razoável que a inclinação do fio deformado seja pequena durante todo o movimento. Suponha-se que o fio não esteja sujeito a nenhuma outra força horizontal exceto à tensão T , ou a nenhum deslocamento horizontal inicial ou velocidades iniciais. Dessas condições impostas, pode-se deduzir algumas consequências:

1. Os elementos do fio podem ter apenas deslocamentos transversais;
2. A força tangencial no fio será, em todos os instantes e em todos os pontos, constante e igual a T .

A Figura 17a mostra um trecho AB de um cabo deformado e a Figura 17b apresenta as forças atuantes sobre o elemento ampliado.

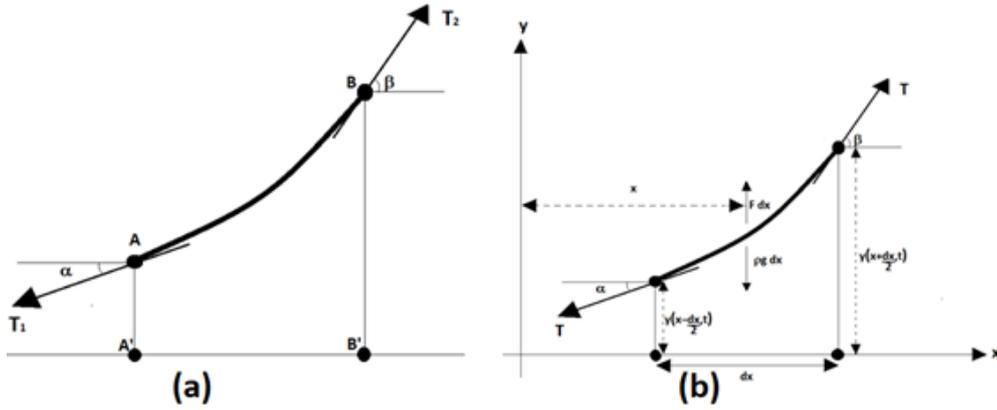


Figura 17 – (a) Maximização de um elemento da corda; (b) forças atuantes sobre o elemento analisado.

Aplicam-se as equações de equilíbrio nesse elemento e, da equação de equilíbrio em x , tem-se:

$$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta \quad (3.1)$$

em todos os instantes. No entanto

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \cong 1 - \frac{1}{2} \tan^2 \alpha \cong 1. \quad (3.2)$$

O mesmo raciocínio é válido para $\cos \beta$, o que conduz a:

$$T_1 = T_2 = T. \quad (3.3)$$

Na dedução para a deflexão y (vertical) do fio, considera-se um elemento dx na Figura 17b. De acordo com as aproximações de que o fio possa ser deformado, por meio de forças moderadas, é razoável supor que a inclinação do fio deformado será pequena durante todo o movimento. Além disso, supõe-se que o fio não esteja sujeito a nenhuma outra força horizontal exceto à tensão T , ou nenhum deslocamento horizontal inicial ou velocidades. Dessas considerações tem-se que $dx \cong ds$, sendo ds o comprimento do elemento. Dessa forma

$$T (\sin \beta - \sin \alpha) + F dx - \rho g dx = \rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

onde ρ é a densidade linear do fio, F é uma força externa por unidade de comprimento no ponto x , e $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ é a aceleração do elemento na direção transversal. A equação 3.4 representa a segunda lei de Newton aplicada ao elemento dx . Com a aproximação para ângulos pequenos pode-se supor que

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \cong \tan \alpha = \frac{\partial y \left(x - \frac{dx}{2} \right)}{\partial x} \quad (3.5)$$

e de forma semelhante

$$\sin \beta \cong \frac{\partial y \left(x + \frac{dx}{2} \right)}{\partial x}. \quad (3.6)$$

É, então, razoável a substituição:

$$\frac{\sin \beta - \sin \alpha}{dx} \cong \frac{\partial y \left(x + \frac{dx}{2} \right) - \partial y \left(x - \frac{dx}{2} \right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (3.7)$$

Substituindo-se a equação 3.7 na equação 3.4, tem-se:

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F(x, t) - \rho(x)g = \rho(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (3.8)$$

A equação 3.8 pode ser utilizada em cabos que não são homogêneos e também no caso em que a força externa pode variar com x e com t . Tal equação pode ser simplificada em muitos casos. Por exemplo, se $\rho(x)g$ for pequeno quando comparado com $F(x, t)$, poderá ser desprezado, e a equação 3.8 transforma-se em:

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F(x, t) = \rho(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (3.9)$$

Se não houver forças transversais atuantes no cabo, então a equação 3.9 toma a forma:

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (3.10)$$

Finalmente, se $\rho(x)$ for constante, como no caso de um fio homogêneo, então a equação 3.10 pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (3.11)$$

com $c^2 = T/\rho = \text{constante}$. A equação 3.11 é conhecida como equação da onda (em uma dimensão). É uma equação diferencial parcial de segunda ordem e duas variáveis independentes (x e t) e com coeficientes constantes (BUTKOV, 1988).

Na demonstração anterior (via formalismo Newtoniano) levou-se em conta um problema unidimensional, com dependência apenas na variável espacial x . Muitas vezes o problema é estudado nos espaços bi ou tridimensional e as equações tornam-se complicadas. Nesse sentido, apresenta-se aqui a equação que descreve a dinâmica de um cabo no espaço tridimensional.

Inicia-se neste ponto a obtenção de um modelo contínuo descrevendo a resposta espacial do cabo. As equações diferenciais parciais do movimento são obtidas por meio do princípio de Hamilton.

Como citado acima, o cabo elástico está sujeito ao seu peso e suspenso entre dois suportes que estão no mesmo nível (Figura 18). A configuração de equilíbrio estático inicial será denotada por \mathcal{E}^I e tal configuração situa-se no plano Oxy e é representada pela função $y(s)$, onde s é a coordenada curvilínea a qual abrange o comprimento inicial

do cabo L_c . Seja E , A e m o módulo de elasticidade, a área de seção reta e a massa por unidade de comprimento do cabo, respectivamente.

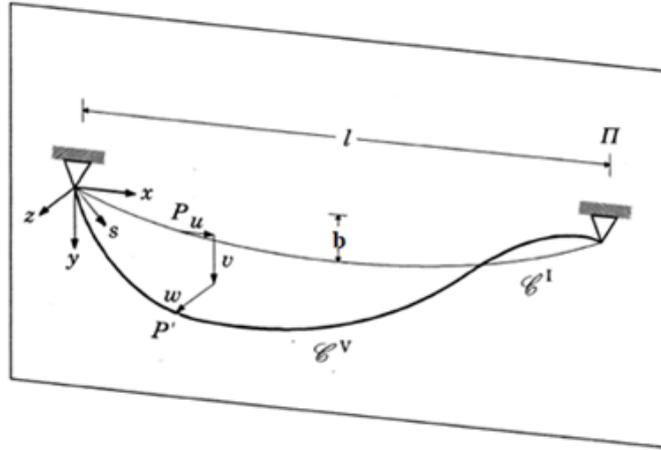


Figura 18 – Dinâmica 3D de um cabo elástico suspenso (BENEDITTINI; REGA; ALAGGIO, 1995).

A configuração dinâmica do cabo em três dimensões na figura 18 é dada pela curva \mathcal{E}^V . Considera-se atuante sobre o cabo um carregamento externo dado por $p_i(s, t) = \{p_u, p_v, p_w\}$, sendo $i = 1, 2, 3$. O suporte possui um movimento descrito pelas componentes do campo de deslocamento $u_i(s, t) = \{u, v, w\}$ sendo $i = 1, 2, 3$. Usa-se a deformação Lagrangeana como medida de deformação, na forma:

$$\varepsilon(s, t) = x'u' + y'v' + \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2 + w'^2) \quad (3.12)$$

sendo o apóstrofo a derivada em relação a s , $\partial/\partial s$.

Para a obtenção das equações do movimento utiliza-se o princípio de Hamilton,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K^V - \Pi^V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W^V dt = 0. \quad (3.13)$$

Na equação 3.13 tem-se a energia cinética K^V , a energia potencial Π^V , e o trabalho virtual W^V . Cada um desses termos é apresentado a seguir:

$$K^V = \frac{1}{2} \int_0^{L_c} m \sum_{i=1}^3 \dot{u}_i^2 ds \quad (3.14)$$

$$\Pi^V = \Pi^I + \int_0^{L_c} \left(T^I \varepsilon + \frac{1}{2} EA \varepsilon^2 \right) ds \quad (3.15)$$

$$\delta W^V = \int_0^{L_c} \sum_{i=1}^3 (mg \delta_{i2} + p_i(s, t) - \mu_i \dot{u}_i) \delta u_i ds. \quad (3.16)$$

Sendo que o ponto designa a derivada em relação ao tempo $\partial/\partial t$, T^I é a tensão do cabo na configuração inicial, $\mu_i = \{\mu_u, \mu_v, \mu_w\}$ são os coeficientes de amortecimento viscoso por unidade de comprimento e δ_{i2} é o delta de Kronecker.

Assume-se neste ponto a configuração de equilíbrio estático como sendo a parábola

$$y = \frac{4b}{l} \left(x - \frac{1}{l} x^2 \right), \quad (3.17)$$

onde b é a flecha e l o vão. Ao assumir tal configuração têm-se as implicações $ds \simeq dx$ e $T^I \simeq H$, sendo H a componente horizontal da tensão. Assume-se desprezível o gradiente do deslocamento da componente horizontal no plano e $H/EA \ll 1$. Nessas condições as equações do movimento no espaço assumem a forma

$$EA \left\{ u' + y'v' + \frac{1}{2} (v'^2 + w'^2) \right\}' - \mu_u \dot{u} + p_u = m\ddot{u} \quad (3.18)$$

$$\left\{ Hv' + EA(y' + v') \left[u' + y'v' + \frac{1}{2} (v'^2 + w'^2) \right] \right\}' - \mu_v \dot{v} + p_v = m\ddot{v} \quad (3.19)$$

$$\left\{ Hw' + EAw' \left[u' + y'v' + \frac{1}{2} (v'^2 + w'^2) \right] \right\}' - \mu_w \dot{w} + p_w = m\ddot{w} \quad (3.20)$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned} u_i(0, t) &= \bar{u}_{i0}(t) \\ u_i(l, t) &= \bar{u}_{il}(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

com $\bar{u}_{i0}(t)$ e $\bar{u}_{il}(t)$ descrevendo o movimento do suporte. O termo entre as chaves da equação 3.18 é a tensão adicional no cabo.

Algumas simplificações fazem-se presente neste ponto e uma delas é a do movimento do suporte. Considera-se aqui que o suporte (tanto do lado esquerdo quanto direito) não possua movimento na horizontal e isto implica que as condições de contorno ou de fronteira são nulas na variável u :

$$\begin{aligned} u_1(0, t) = u(0, t) &= 0 \\ u_1(l, t) = u(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Além dessa simplificação tem-se ausência de carregamento externo na direção longitudinal (u), isto é, $p_u = 0$, de forma que o termo relacionado à aceleração longitudinal também pode ser desprezado e isto pode ser feito ao supor que o cabo deforma-se de maneira quase estática. Tal suposição foi discutida em detalhes por Irvine e Caughey para cabos elásticos (IRVINE; CAUGHEY, 1974), e está baseada no fato de que a velocidade de propagação para ondas longitudinais excede e muito aquelas para ondas transversais e, dessa forma, a razão entre a velocidade das ondas transversais e longitudinais é da ordem de $\rho g L / H_0$, sendo H_0 a tensão no cabo na configuração de equilíbrio estático. Outra suposição é que podem ser desprezadas as forças viscosas na direção longitudinal. De acordo com Benedettini (BENEDITINI; REGA; ALAGGIO, 1995), a obtenção do deslocamento horizontal no plano pode ser feita a partir de um processo de armazenamento padrão, levando-se em conta as condições de contorno.

Neste trabalho tem-se interesse no estudo da dinâmica planar (plano vertical) e, dessa forma, a equação

$$\left\{ Hw' + EAw' \left[u' + y'v' + \frac{1}{2} (v'^2 + w'^2) \right] \right\}' - \mu_w \dot{w} + p_w = m\ddot{w}$$

pode ser desprezada, restando duas equações a serem trabalhadas, uma na direção longitudinal e uma na transversal.

As considerações estabelecidas anteriormente permitem escrever as equações 3.18 e 3.19 na forma:

$$EA \left\{ u' + y'v' + \frac{1}{2} (v'^2) \right\}' = 0 \quad (3.23)$$

$$\left\{ Hv' + EA(y' + v') \left[u' + y'v' + \frac{1}{2} (v'^2) \right] \right\}' - \mu_v \dot{v} + p_v = m\ddot{v} \quad (3.24)$$

sujeitas às condições de contorno:

$$\begin{aligned} u_i(0, t) &= \bar{u}_{i0}(t) \\ u_i(l, t) &= \bar{u}_{il}(t) \end{aligned} \quad (3.25)$$

com $i = 1, 2$. O termo entre as chaves na equação 3.23, igual a $e(t)$, é constante com relação à posição x , ou seja, só depende do tempo:

$$u' + y'v' + \frac{1}{2} (v'^2) = e(t). \quad (3.26)$$

Multiplicando-se a equação 3.26 por EA , $E Ae(t)$, tem-se a tensão adicional no cabo. Integrando-se a equação 3.26 chega-se a:

$$u(x, t) = e(t)x - \int_0^x \left[y'v' + \frac{1}{2} (v'^2) \right] dx. \quad (3.27)$$

A função $e(t)$ é determinada por meio da condição de contorno $u(l, t) = 0$

$$e(t) = \frac{1}{l} \int_0^l \left[y'v' + \frac{1}{2} (v'^2) \right] dx. \quad (3.28)$$

Logo, $u(x, t)$ na equação 3.27 pode ser escrita como

$$u(x, t) = \frac{x}{l} \int_0^l \left[y'v' + \frac{1}{2} (v'^2) \right] dx - \int_0^x \left[y'v' + \frac{1}{2} (v'^2) \right] dx. \quad (3.29)$$

Retornando-se o resultado da equação 3.28 na equação 3.24, tem-se que o termo dentro dos colchetes é igual a $e(t)$ e, dessa forma, pode-se substituir pela integral encontrada na equação 3.28:

$$\left\{ Hv' + \frac{EA}{l} (y' + v') \int_0^l \left[y'v' + \frac{1}{2} (v'^2) \right] dx \right\}' - \mu_v \dot{v} + p_v = m\ddot{v}. \quad (3.30)$$

Após derivar-se em relação a x o termo entre as chaves na equação 3.30, chega-se a:

$$Hv'' + \frac{EA}{l}(y'' + v'') \int_0^l \left[y'v' + \frac{1}{2}(v'^2) \right] dx - \mu_v \dot{v} + p_v = m\ddot{v}. \quad (3.31)$$

Reescrevendo 3.31, tem-se

$$\frac{m}{H}\ddot{v} + \frac{\mu_v}{H}\dot{v} - v'' - \frac{EA}{Hl}(y'' + v'') \int_0^l \left[y'v' + \frac{1}{2}(v'^2) \right] dx - \frac{p_v}{H} = 0. \quad (3.32)$$

Na ausência de carregamento, o termo p_v é nulo. Caso o cabo seja fixo nas suas duas extremidades, a equação 3.32 admite as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} v(0, t) &= 0; \\ v(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

A equação 3.32 possui precisão muito boa no estudo da dinâmica não-linear de cabos suspensos no qual a relação $H/EA = O[(d/l)^2]$ e a componente do deslocamento $v = O[\varepsilon d]$, onde ε é um parâmetro pequeno (da ordem da amplitude do deslocamento). Tal situação ocorre para a relação flecha/vão $\frac{b}{l} \leq \frac{1}{20}$.

4 O Método de Diferenças Finitas

No capítulo anterior, a equação analítica que descreve a dinâmica de um cabo elástico suspenso por suas extremidades foi obtida, considerando-se a dinâmica no plano vertical. Neste capítulo será apresentada uma breve introdução a um método numérico para a resolução de equações diferenciais parciais. Trata-se do método de Diferenças Finitas. Após uma breve explicação teórica sobre o método, o mesmo será aplicado para a resolução numérica da equação 3.32. Após a aplicação do método das diferenças finitas algumas simulações serão apresentadas.

4.1 Equações Diferenciais Parciais

Ao modelar um sistema físico é comum o aparecimento da dependência de mais de uma variável independente. A maioria dos modelos matemáticos que descrevem os sistemas físicos fazem isso por meio de equações diferenciais e quando mais de uma variável independente está presente chamamos tais equações de equações diferenciais parciais (EDP). Alguns exemplos dessas equações são:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 5xy \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v = 5, \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^3 + 6 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} = x. \quad (4.2)$$

A equação 4.1 é uma equação diferencial parcial de segunda ordem (maior ordem da derivada parcial que aparece na equação) e linear: é linear na função desconhecida v e em todas as suas derivadas e os coeficientes dependem unicamente das variáveis independentes x e y .

A equação 4.2 é uma equação diferencial parcial de terceira ordem não linear, pois uma de suas derivadas está sendo elevada ao cubo.

Devido ao grande uso em modelagem de sistemas físicos, tem-se neste trabalho o interesse na equação diferencial parcial de segunda ordem linear para duas variáveis independentes. Tal equação pode ser expressa na forma geral:

$$A \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + D = 0 \quad (4.3)$$

onde A , B e C são funções de x e y e D é uma função de x , y , v , $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$. Dependendo dos valores dos coeficientes dos termos de derivada de ordem 2 (A , B e C) a equação 4.3 pode ser classificada dentro de uma das três categorias listadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Classificação de equações diferenciais lineares de segunda ordem (CHAPRA; CANALE, 2015).

$B^2 - 4AC$	Categoria	Exemplo
< 0	Elíptica	Equação de Laplace: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$
$= 0$	Parabólica	Equação da condução do calor: $\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$
> 0	Hiperbólica	Equação da onda: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

4.2 Método Numérico de Diferenças Finitas

Muitas equações diferenciais parciais não permitem solução analítica, obrigando assim a utilização de métodos numéricos para a obtenção de uma solução aproximada. Isso se deve ao fato da natureza, na maioria das vezes, comportar-se de forma não linear e assim, os modelos dinâmicos preditivos também necessitam incorporar esses comportamentos não lineares e, até o momento, não se sabe resolver tais modelos de forma analítica. Os métodos numéricos são ferramentas que possibilitam a resolução de equações não lineares (CHAPRA; CANALE, 2015). Um método numérico usado na resolução de EDP é o método Numérico das Diferenças Finitas, o qual será apresentado nesta seção em sua forma explícita.

O método das Diferenças Finitas consiste na discretização das derivadas parciais da EDP, sendo que esta discretização é feita a partir da substituição das derivadas por relações de diferenças.

Considere-se que $u = u(x, t)$, ou seja, a função u tem dependência na variável espacial x e na variável temporal t . Seja u solução de uma equação diferencial parcial. Considere-se ainda um domínio discreto em x e t conforme Figura 19, onde $u(x_i, t_i) = u_{i,j}$ (GOMES, 1999).

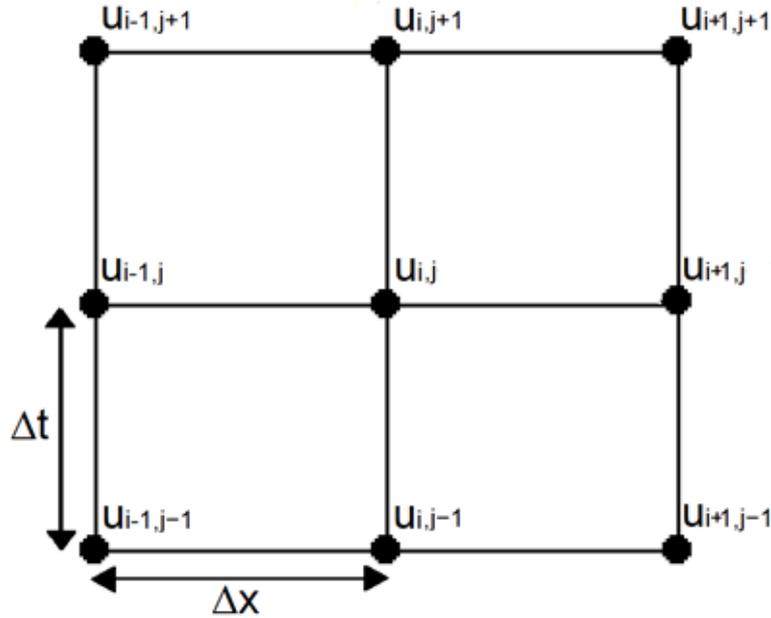


Figura 19 – Domínio discretizado da função u em x e t .

Neste ponto, uma expansão da função u em série de Taylor é realizada. As Séries de Taylor são de crucial interesse no estudo dos métodos numéricos. As séries de Taylor fornecem um meio de prever o valor de uma função f (neste trabalho $f = u$) em um ponto em termos dos valores da função e de suas derivadas em outro ponto. Nas séries de Taylor tem-se que uma função homogênea pode ser aproximada por meio de um polinômio.

Seja a função u e suas primeiras $n + 1$ derivadas contínuas num intervalo que contenha x_i e x_{i+1} . Então o valor da função em x_{i+1} no tempo t_j é dado por:

$$u(x_{i+1}, t_j) = u(x_i, t_j) + u'(x_i, t_j)\Delta x + \frac{u''(x_i, t_j)}{2!}\Delta x^2 + \frac{u^{(3)}(x_i, t_j)}{3!}\Delta x^3 + \dots + \frac{u^{(n)}(x_i, t_j)}{n!}\Delta x^n + R_n. \quad (4.4)$$

Seja Δx o passo ou distância entre x_i e x_{i+1} no tempo t_j , isto é, $\Delta x = x_{i+1} - x_i$. Um termo remanescente (R_n) faz-se presente para levar em consideração os termos de ordem $n + 1$ até o infinito. Tal termo remanescente é dado por

$$R_n = \frac{u^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}\Delta x^{n+1}. \quad (4.5)$$

Truncando a equação 4.5 até termos de segunda ordem, tem-se:

$$u(x_{i+1}, t_j) \cong u(x_i, t_j) + u_x(x_i, t_j)\Delta x + \frac{u_{xx}(x_i, t_j)}{2!}\Delta x^2. \quad (4.6)$$

Rescreve-se a equação 4.6 na notação $u(x_i, t_i) = u_{i,j}$

$$u_{i+1,j} \cong u_{i,j} + u_x\Delta x + \frac{u_{xx}}{2!}\Delta x^2. \quad (4.7)$$

com $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, obtém-se dessa forma os operadores de diferenças progressivas. O mesmo procedimento pode ser feito para o termo localizado à esquerda (obtendo-se o termo de diferenças regressivas) de $u_{i,j}$, que pode ser observado na Figura 19, o termo a esquerda truncado até ordem dois é mostrado abaixo:

$$u_{i-1,j} \cong u_{i,j} - u_x \Delta x + \frac{u_{xx}}{2!} \Delta x^2. \quad (4.8)$$

Desprezando-se os termos de segunda ordem da equação 4.7 obtém-se

$$u_x \cong \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \quad (4.9)$$

o qual é chamado de operador de diferenças progressivas. Uma outra forma é conhecida como operador por diferenças centradas. Para a utilização de diferenças centradas subtrai-se a equação 4.8 da equação 4.7 chegando-se a

$$u_x \cong \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}. \quad (4.10)$$

Somando-se a equação 4.8 à equação 4.7 obtém-se:

$$u_{xx} \cong \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}. \quad (4.11)$$

Equações para o tempo podem ser obtidas da mesma forma, resultando em

$$u_t \cong \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t}, \quad (4.12)$$

$$u_t \cong \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta t}, \quad (4.13)$$

$$u_{tt} \cong \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta t^2}. \quad (4.14)$$

4.3 Método Explícito Aplicado à Equação do Calor

Nesta subseção aplica-se o método das diferenças finitas na forma explícita a um problema de distribuição de temperatura ao longo de uma barra metálica (Figura 20). Tal fenômeno é conhecido como condução de calor. O fenômeno é um processo de transmissão de calor pelo qual a energia passa de molécula para molécula sem que as mesmas se desloquem. Dessa forma, ao aquecer uma das extremidades de uma barra metálica, as moléculas passam a vibrar com maior intensidade, transmitindo essa energia adicional às moléculas mais próximas, que também passam a vibrar mais intensamente até alcançar a outra extremidade (Figura 21) (GOMES, 1999).

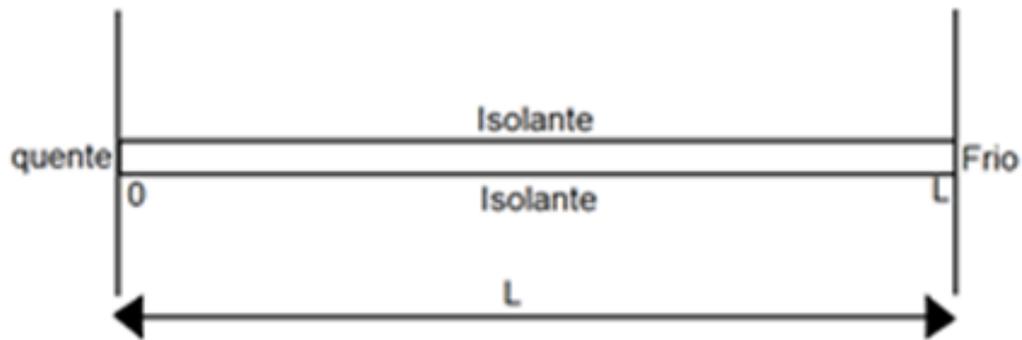


Figura 20 – Barra metálica sujeita a diferentes temperaturas em suas extremidades (parede isolante ao longo do comprimento da barra permite fluxo de calor apenas na direção longitudinal).

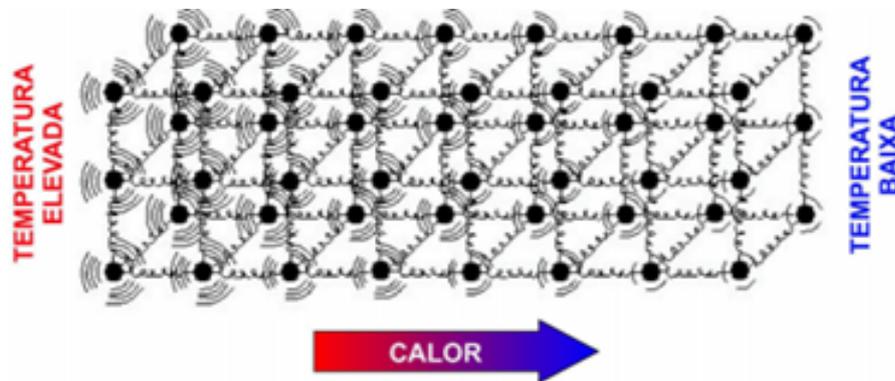


Figura 21 – Condução de calor a nível microscópico (OLIVEIRA, 2016).

A representação das diferenças finitas baseia-se no tratamento da barra metálica como uma rede de pontos discretos, similares aos da Figura 19. As derivadas parciais são substituídas por seus equivalentes discretos. Sabe-se que a distribuição de temperatura para $t > 0$ obedece à seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (4.15)$$

com $T = T(x, t)$ e k a condutividade térmica do material da barra.

Com condição inicial dada por

$$T(x, 0) = f(x); \quad 0 \leq x \leq L; \quad (4.16)$$

e contornos

$$\begin{aligned} T(0, t) &= g_0(t); & 0 \leq t \leq t_f; \\ T(L, t) &= g_1(t); & 0 \leq t \leq t_f. \end{aligned} \quad (4.17)$$

A equação 4.15 (como pode ser visto na Tabela 1) é uma equação diferencial parcial do tipo parabólica que pode ser solucionada pelo método das diferenças finitas.

As aproximações para o tempo e o espaço são apresentadas a seguir. Como pode ser observado na equação 4.15, é necessária uma aproximação para a derivada de ordem um no tempo e uma de ordem dois no espaço:

$$T_t \cong \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} \quad (4.18)$$

e

$$T_{xx} \cong \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}. \quad (4.19)$$

A substituição da equação 4.18 e 4.19 na equação 4.15 resulta em

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} = k \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \quad (4.20)$$

que pode ser reescrita como

$$T_{i,j+1} = T_{i,j} + \lambda (T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}), \quad (4.21)$$

onde $\lambda = k\Delta t/\Delta x^2$. Esta equação pode ser escrita para todos os elementos interiores da barra. Ela fornece um modo de calcular tempos futuros partindo de valores no tempo presente dos elementos e de seus vizinhos. O método explícito requer um critério de estabilidade $\lambda = k\Delta t/\Delta x^2 \leq 1/2$.

Para melhor visualização da aplicação da equação 4.21 uma simulação é apresentada. Considere-se uma barra com comprimento $L = 5\text{ m}$ e sujeita a seguinte condição inicial $T(0, x) = 300\text{ K}$ com $0 \leq x \leq L$. Nos contornos tem-se

$$\begin{aligned} T(t, 0) &= 273\text{ K}; & 0 \leq t \leq 3; \\ T(t, L) &= 500\text{ K}; & 0 \leq t \leq 3. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Os passos no domínio espacial e temporal são dados por $dx = 0,25\text{ m}$ e $dt = 0,0303\text{ s}$. Na Figura 22 pode-se observar graficamente a distribuição de temperatura ao longo da barra.

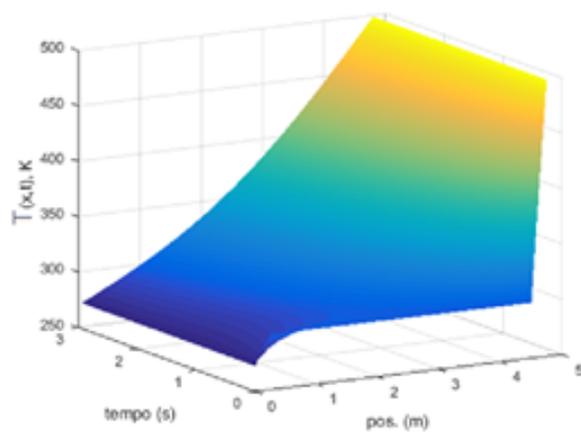


Figura 22 – Simulação numérica da distribuição de temperatura ao longo de uma barra metálica.

5 Método Explícito Aplicado ao Problema do Cabo Suspenso

Neste capítulo o método explícito das diferenças finitas é aplicado ao problema do cabo ou corda preso em suas extremidades. Após o desenvolvimento das equações discretizadas, apresentam-se simulações com as respectivas análises de resultados.

5.1 Equações por Diferenças Finitas

Já foi visto que a configuração de equilíbrio na qual o cabo se conforma é de conformação catenária ou como aproximação, para o caso em que a razão entre a flecha e o vão é menor que $1/20$, em uma parábola. Da equação 3.31

$$Hv'' + \frac{EA}{l} (y'' + v'') \int_0^l \left[y'v' + \frac{1}{2}v'^2 \right] dx - \mu\dot{v} + P = m\ddot{v}, \quad (5.1)$$

reescrevendo-se a equação 5.1 para \ddot{v} e, considerando-se nula a perturbação externa tem-se

$$\ddot{v} = \frac{H}{m}v'' + \frac{EA}{ml} (y'' + v'') \int_0^l \left[y'v' + \frac{1}{2}v'^2 \right] dx - \frac{\mu}{m}\dot{v}. \quad (5.2)$$

A equação 5.2 representa a dinâmica do cabo no plano vertical. Para encontrar sua solução utiliza-se a aproximação da configuração em parábola e o método das diferenças finitas. Da aproximação para parábola tem-se que

$$y = \frac{4b}{l} \left(x - \frac{1}{l}x^2 \right). \quad (5.3)$$

Com derivadas de primeira e segunda ordem dadas por

$$\begin{aligned} y' &= \frac{4b}{l} \left(1 - \frac{2}{l}x \right) \\ y'' &= -\frac{8b}{l^2}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Pela substituição da equação 5.5 na equação 5.2 chega-se a

$$\ddot{v} = \frac{H}{m}v'' + \frac{EA}{ml} \left(-\frac{8b}{l^2} + v'' \right) S - \frac{\mu}{m}\dot{v}. \quad (5.5)$$

Para resolver a equação 5.5 o método das diferenças finitas é utilizado. Na equação diferencial parcial 5.5 utiliza-se seu equivalente discreto via expansão em série de Taylor dado abaixo:

$$\dot{v} = \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2dt}, \quad (5.6)$$

$$\ddot{v} = \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{(dt)^2}, \quad (5.7)$$

$$v' = \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2dx}, \quad (5.8)$$

$$v'' = \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{(dx)^2}. \quad (5.9)$$

Substituindo-se as equações 5.6, 5.7 e 5.9 na equação 5.5 e isolando para $v_{i,j+1}$ chega-se a

$$v_{i,j+1} = \frac{1}{1 + \alpha dt} \left[2v_{i,j} - (1 - \alpha dt)v_{i,j-1} + \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 \left(\frac{H}{m} + \frac{EA}{ml} S \right) \times \right. \\ \left. \times (v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}) + \left(-\frac{8bEA}{ml^3} S \right) dt^2 \right] \quad (5.10)$$

onde $\alpha = \mu/(2m)$ e S é dado por

$$S = \int_0^l \left[y'v' + \frac{1}{2}v'^2 \right] dx \\ = \int_0^l \left[\frac{4b}{l} \left(1 - \frac{2}{l}x \right) \left(\frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2dx} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2dx} \right)^2 \right] dx. \quad (5.11)$$

No entanto, para o primeiro passo de tempo $j = 0$, necessita-se da condição inicial de velocidade (velocidade inicial nula). A condição inicial para o problema do cabo preso em suas extremidades é dada por

$$\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t}_{t=0} = \frac{v_{i,1} - v_{i,-1}}{2dt} = 0 \\ v_{i,1} = v_{i,-1}. \quad (5.12)$$

Usa-se a equação 5.12 para calcular a equação 5.10 para $j = 0$ e, dessa forma, resolver a equação 5.10 para $v_{i,1}$

$$v_{i,1} = \left[1 - \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 \left(\frac{H}{m} + \frac{EA}{ml} S_0 \right) \right] v_{i,0} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dt}{dx} \right)^2 \left(\frac{H}{m} + \frac{EA}{ml} S_0 \right) (v_{i+1,0} - v_{i-1,0}) + \right. \\ \left. + \left(-\frac{8bEA}{ml^3} S_0 \right) dt^2 \right] \quad (5.13)$$

com S_0 dado pela equação 5.11 no caso em que $j = 0$. A equação 5.13 pode ser utilizada para calcular v no primeiro passo de tempo. Nos demais tempos utiliza-se a equação 5.10. No cálculo da integral S_0 ou S utiliza-se a regra de Simpson em cada passo de integração: para cada valor de j a integral é resolvida no intervalo de integração $0 \leq x \leq l$. Na próxima seção os resultados das simulações são apresentados. Para as simulações utilizam-se como passos no tempo e no espaço os valores $dt = 0,0005 s$ e $dx = 0,025 m$, respectivamente.

5.2 Simulações e Análise de Resultados

Nesta seção apresentam-se simulações do problema proposto. As soluções numéricas são obtidas por meio do método numérico das diferenças finitas apresentado na seção anterior.

Considerou-se como configuração de equilíbrio estático do cabo a forma parabólica, como já foi observado no texto. Tal conformação é possível se a razão flecha-vão for menor do que $1/20$. No caso das simulações o valor da flecha máxima utilizado foi de $b = 0,1$ m e o vão (ou comprimento entre os suportes) utilizado foi de $l = 3$ m, ficando abaixo de $1/20$, o que está de acordo com a aproximação utilizada.

Para observar a dinâmica ao longo do cabo, uma pequena perturbação foi admitida até o tempo de $t < 0,2$ s. Esse tempo está relacionado a um ciclo completo, ou seja, equivalente ao período da onda senoidal. O algoritmo utilizado para realizar esta perturbação inicial é apresentado abaixo:

Algoritmo da perturbação inicial em um dos suportes

```

if  $t(i) < 0.2$ ,
V0(i) =  $0.0063 * \sin(10 * \pi * t(i))$ ;
Vf(i) = 0;
else
V0(i) = 0;
Vf(i) = 0;
end,

```

(5.14)

A interpretação do algoritmo da perturbação inicial é que enquanto o tempo for menor do que o tempo estabelecido, que neste caso é $t < 0,2$ s, a perturbação na forma senoidal é aplicada na extremidade localizada em $x = 0$ m. Depois desse tempo ambas as extremidades permanecerão fixas.

Apresenta-se na Figura 23 a configuração espacial do cabo com frames a cada $0,05$ s. Na primeira linha de frames tem-se a perturbação provocando uma mudança na configuração de equilíbrio estático. Após isso, já na segunda linha, esta perturbação deixa de atuar e a onda percorre a extensão do cabo sendo refletida no suporte oposto. Como o cabo está preso nesse suporte a amplitude de oscilação é nula neste ponto. O mesmo procedimento se repete, do suporte a direita para o da esquerda, e depois novamente. Em cada uma das passagens da onda pela corda uma redução de sua amplitude é observada e isso se deve ao amortecimento viscoso associado à dinâmica do cabo.

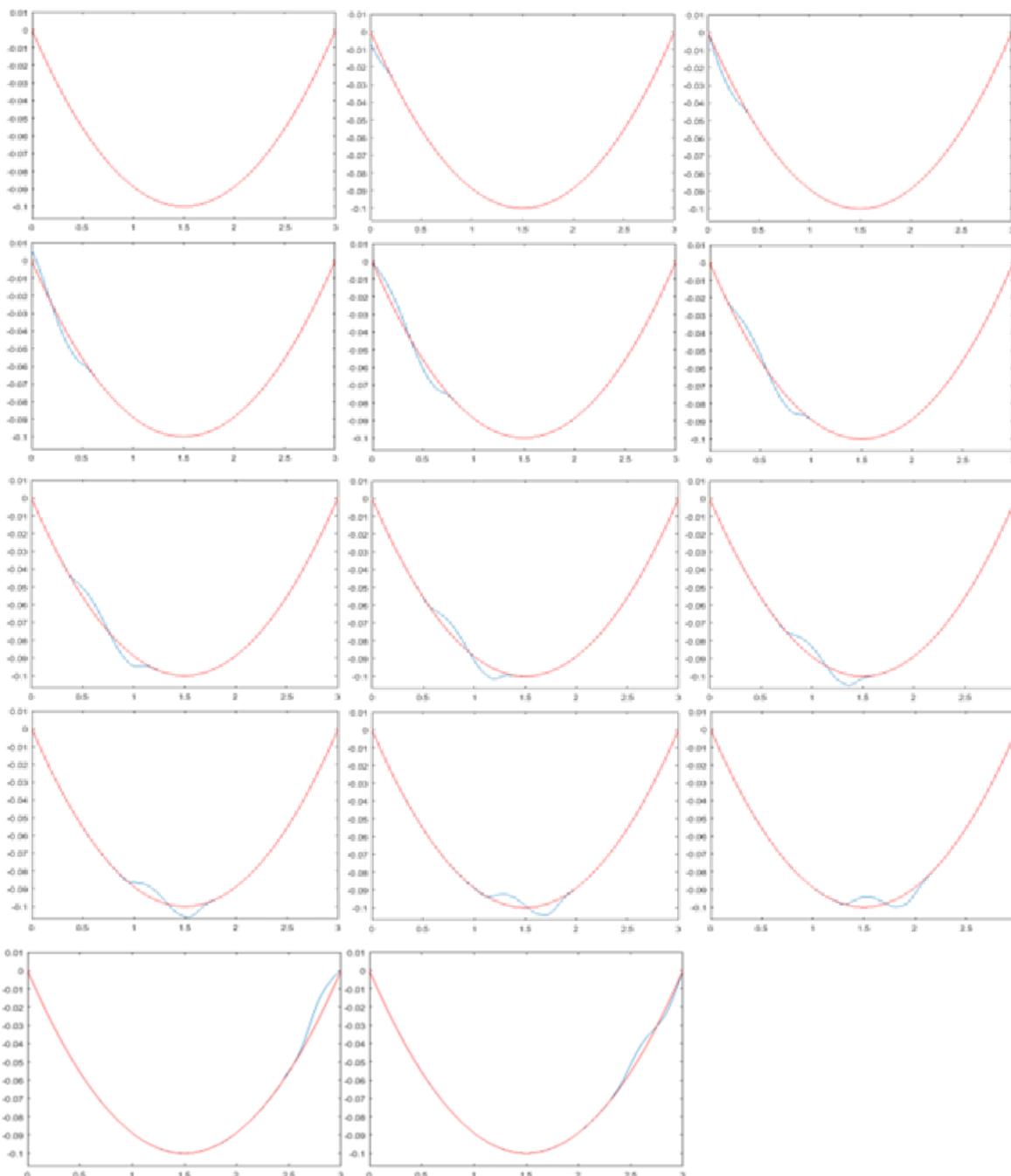


Figura 23 – Configuração espacial do cabo com frames a cada 0,05 s.

Na Figura 24 a configuração espacial do cabo é apresentada com frames a cada 0.025 s sobrepostos no mesmo gráfico. Ao longo do tempo, como já foi dito anteriormente, as amplitudes diminuem. Vale observar a escala do gráfico e perceber que a amplitude do deslocamento a que está sujeito o cabo possui um valor muito menor do que o tamanho do vão.

Na Figura 25 apresenta-se a dinâmica do cabo em um gráfico tridimensional. Observa-se nos instantes iniciais a perturbação gerada no suporte da esquerda. Percebe-

se nesse ponto que essa perturbação permaneceu por um tempo igual a um período da perturbação senoidal. Se observarmos o gráfico pode-se perceber o ponto onde ocorre a reflexão da onda no suporte da direita e depois no da esquerda, e isso se repete até 6 s, que foi o tempo máximo da simulação.

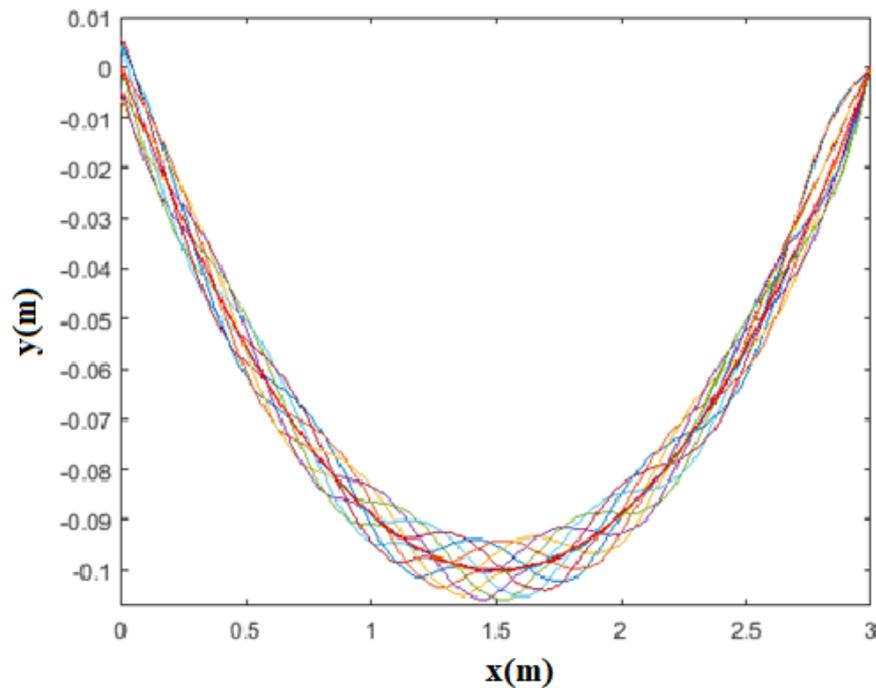


Figura 24 – Configurações espaciais do cabo sobrepostas, com frames a cada 0,025 s.

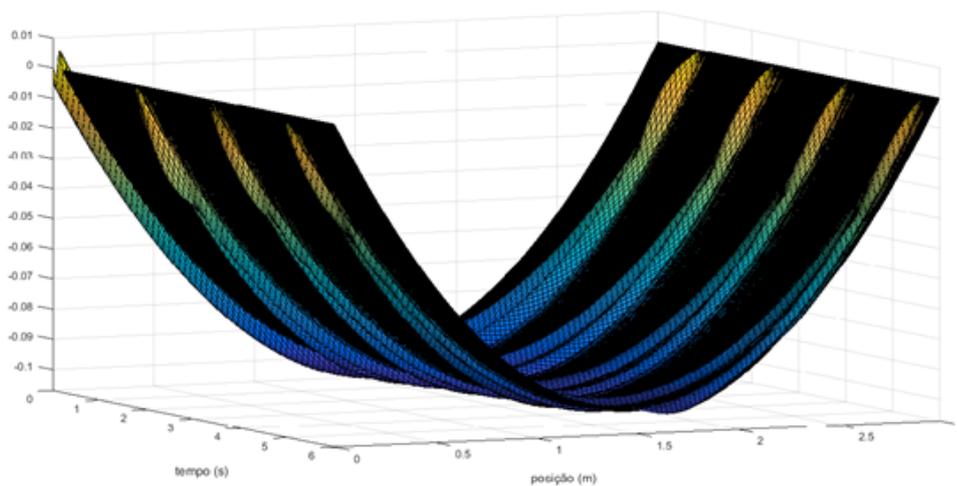


Figura 25 – Superfície mostrando a propagação da oscilação no cabo.

Observa-se na Figura 26 o ponto onde a onda retorna para o suporte da esquerda. Essa figura é uma ampliação da Figura 25, na qual aqui o interesse está voltado em observar a ida e a volta da onda sobre o cabo, nos primeiros 2 s.

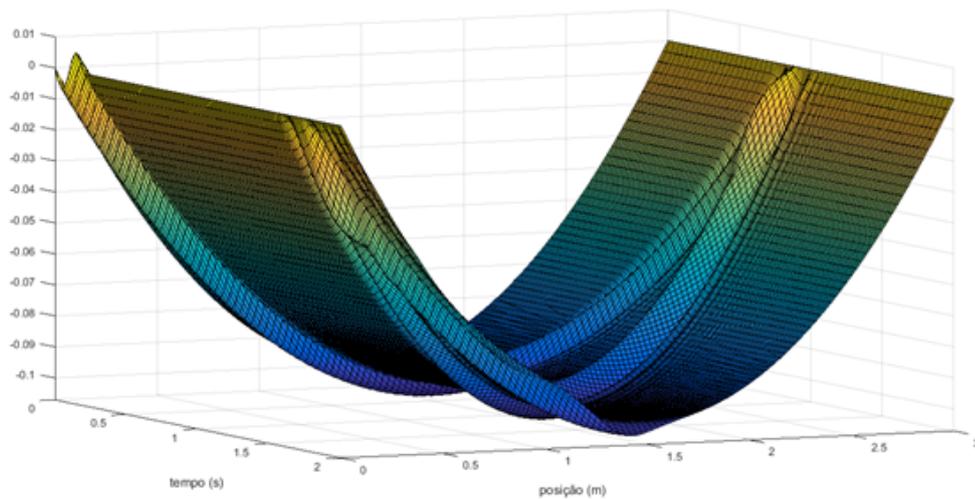


Figura 26 – Superfície mostrando a propagação da oscilação no cabo (primeiros 2 s).

Outra simulação é apresentada na Figura 27 e, neste caso, a perturbação inicial é aplicada aos dois suportes. Considera-se a mesma perturbação inicial em ambos os suportes, aplicada durante o mesmo intervalo de tempo das simulações anteriores, ou seja, o período ($t < 0,2$ s). Após esse tempo os suportes ficam fixos até o final da simulação. Pode-se observar a perturbação inicial para esta simulação no algoritmo dado abaixo:

Algoritmo da perturbação inicial em ambos os suportes

$$\begin{aligned}
 & \text{if } t(i) < 0.2, & (5.15) \\
 & V0(i) = 0.0066 * \sin(10 * \pi * t(i)); \\
 & Vf(i) = 0.0066 * \sin(10 * \pi * t(i)); \\
 & \text{else} \\
 & V0(i) = 0; \\
 & Vf(i) = 0; \\
 & \text{end,}
 \end{aligned}$$

Observa-se na Figura 27, em ambos os lados, a perturbação inicial. Tal perturbação, da mesma forma que na simulação anterior, foi gerada para que o tempo de aplicação fosse equivalente a um período da senoide. Também pode-se observar na Figura 27 o “choque” entre as ondas na metade do vão, quando cresce a amplitude de oscilação.

Os parâmetros utilizados nas simulações são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Parâmetros físicos adotados para a realização de simulações.

Parâmetro	Valor numérico
Comprimento entre suportes	$l = 3 \text{ m}$
Flecha máxima	$b = 0,1 \text{ m}$
Massa específica	$\rho = 0,1424 \text{ kg/m}$
Raio	$r = 0,005 \text{ m}$
Coefficiente de amortecimento	$\mu = 0,05 \text{ Ns/m}$
Módulo de Young	$E = 2,5 \times 10^3 \text{ N/m}^2$

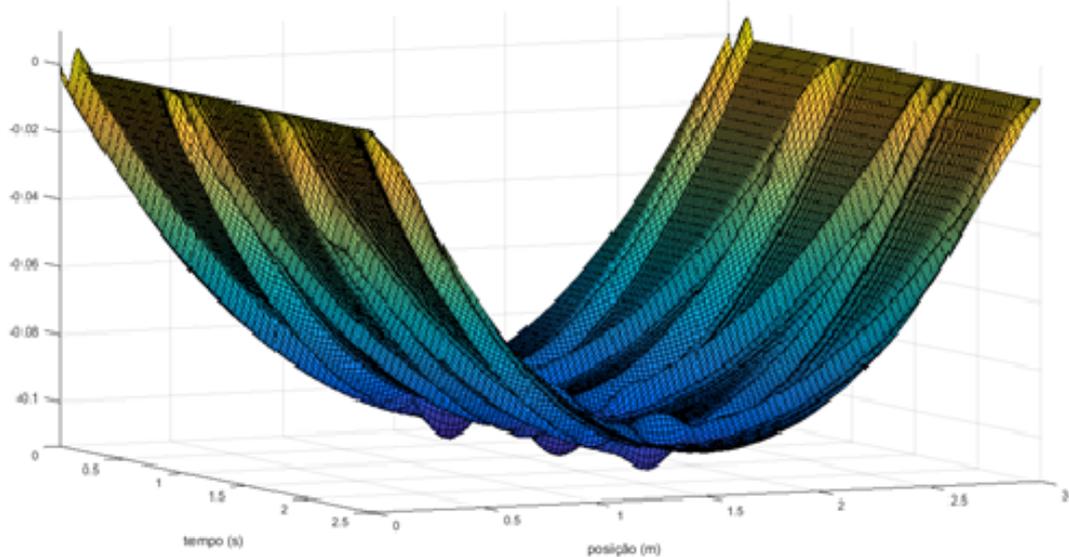


Figura 27 – Condições de contorno iguais, provocando um ‘choque’ entre ondas.

A Figura 28 mostra as flutuações no comprimento do cabo, oriundas da elasticidade longitudinal, flutuações estas provocadas em razão das perturbações iniciais aplicadas nos dois contornos, simultaneamente e ainda, considerando-se 6 s de simulação. A Figura 29 mostra a superfície formada com as oscilações do cabo ao longo do tempo e do espaço. Percebe-se que os resultados destas duas figuras estão correlacionados. Existem dois choques na propagação das ondas: um quando refletem nos suportes (contornos) e outro quando se encontram na metade do comprimento do cabo. O intervalo de tempo entre cada choque é constante e depende da velocidade de propagação da onda, que por sua vez depende dos parâmetros físicos do cabo. Este intervalo corresponde a aproximadamente

0,42 s.

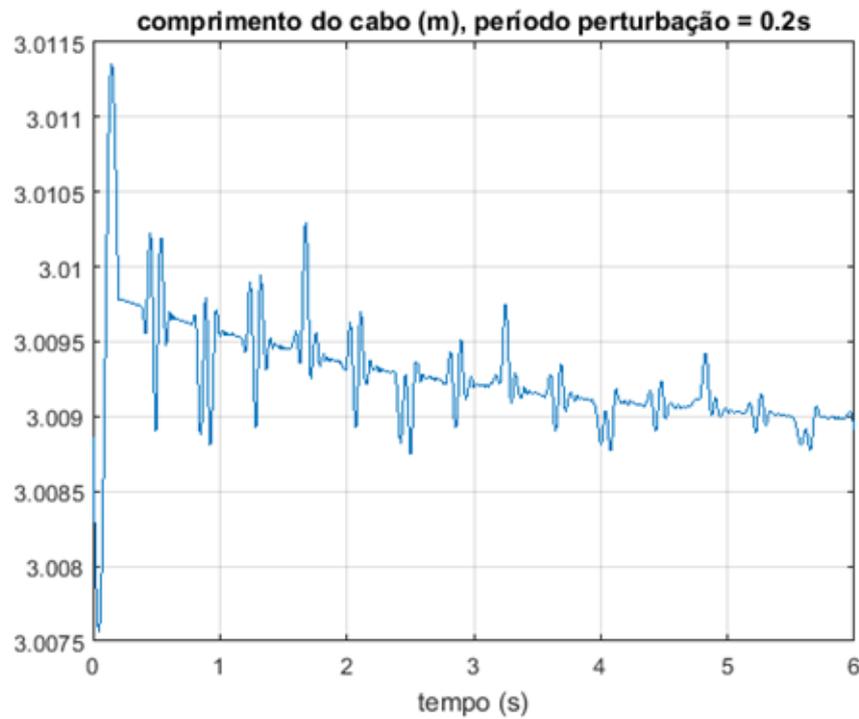


Figura 28 – Comprimento do cabo ao longo do tempo (período = 0,2 s).

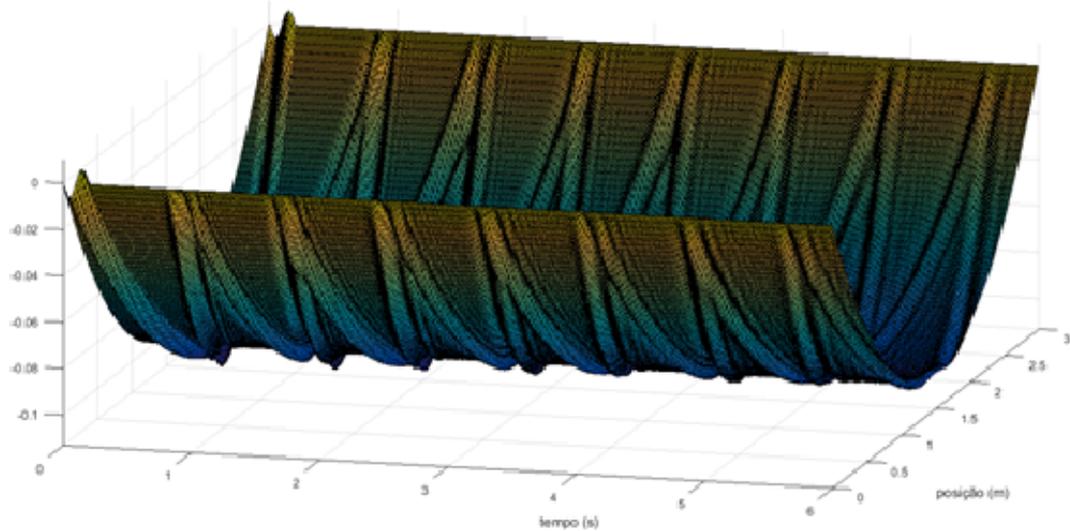


Figura 29 – Condições de contorno iguais, provocando um ‘choque’ entre ondas (6 s de simulação).

Outras simulações foram realizadas considerando-se períodos menores para as senoides das perturbações, aplicadas nos contornos. As Figuras 30 e 31 mostram as flutuações no comprimento do cabo para períodos das perturbações equivalentes a 0,1 s e

0,05 s, respectivamente. Percebe-se que a velocidade de propagação da perturbação continua a mesma, embora os trens de ondas (amplificadas nos choques) mostrem frequências diferentes, compatíveis com os períodos das perturbações que atuaram nos contornos.

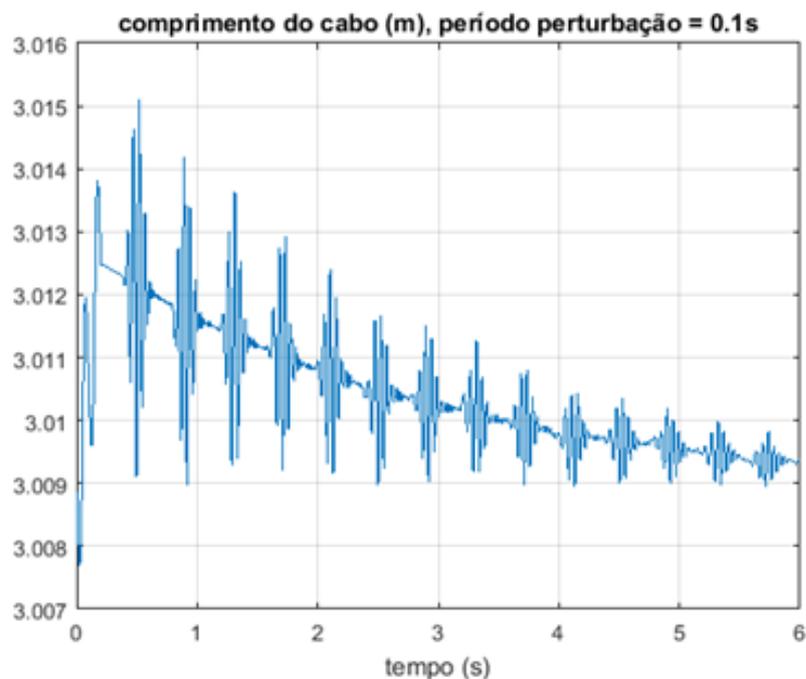


Figura 30 – Comprimento do cabo ao longo do tempo (período = 0,1 s).

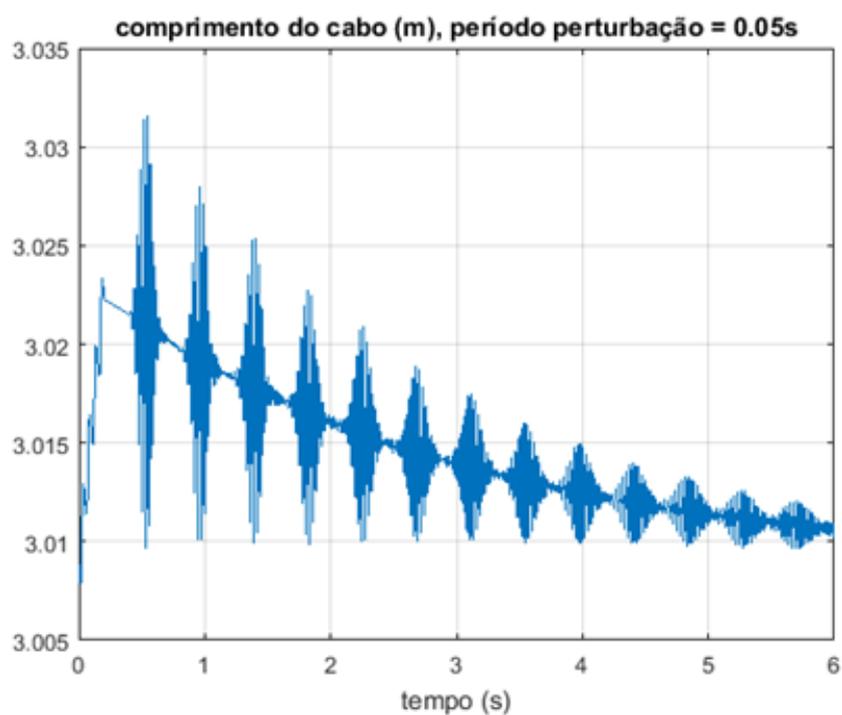


Figura 31 – Comprimento do cabo ao longo do tempo (período = 0,05 s).

As simulações permitiram também mostrar que, quanto menor for o período das perturbações aplicadas nos contornos, maior é o valor máximo da distensão longitudinal do cabo. A Tabela 3 mostra em valores numéricos esse comportamento observado, valores estes que serviram para traçar o gráfico visto na Figura 32. O aumento da frequência (ou diminuição do período) das perturbações injeta um maior nível de energia de excitação, ampliando assim as tensões que transitam através do cabo, provocando, conseqüentemente, uma maior distensão em seu comprimento.

Tabela 3 – Dados relativos a cinco simulações com diferentes períodos das perturbações.

Período das perturbações (s)	Máxima distensão do cabo (m)
0,2	0,0038
0,15	0,0051
0,1	0,0074
0,075	0,012
0,05	0,0237

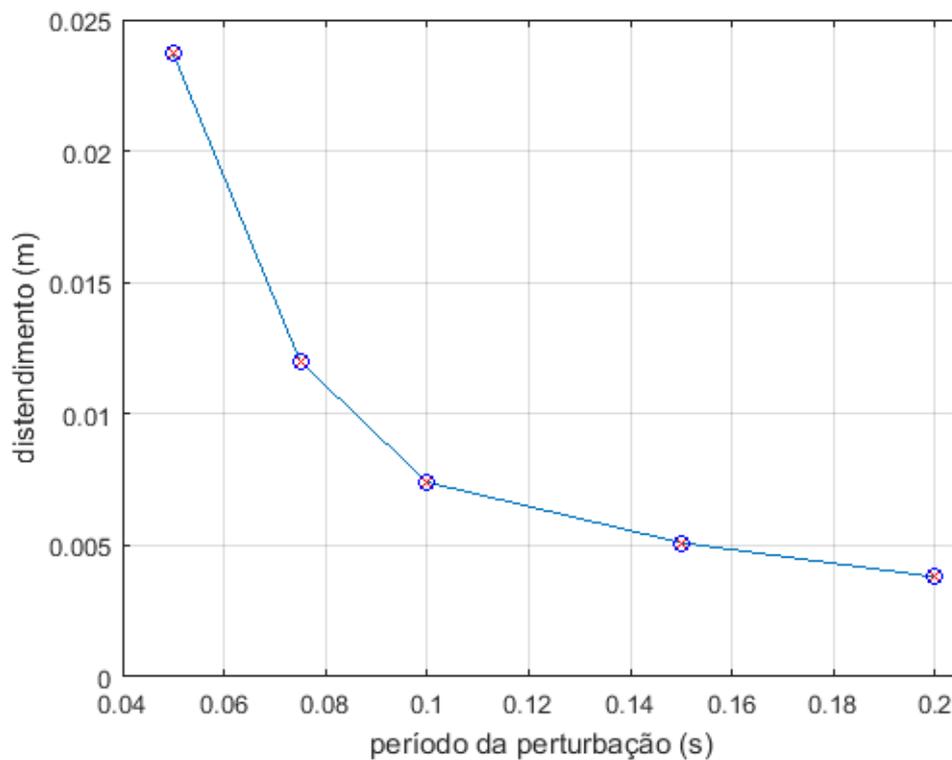


Figura 32 – Distensão máxima do cabo em função do período da perturbação.

6 Conclusões

No presente trabalho foi realizado um estudo sobre a dinâmica de cabos suspensos, bem como sobre suas configurações espaciais em equilíbrio estático, considerando-se principalmente a equação da catenária. A motivação principal é a grande quantidade de aplicações tecnológicas envolvendo estruturas flexíveis do tipo cabo, principalmente voltadas à indústria de extração de petróleo *offshore*. Trata-se de um tema que desperta muito o interesse da comunidade científica, pois a indústria do petróleo financia muitas pesquisas em todo o planeta. Conforme relatado no primeiro capítulo, na pesquisa bibliográfica realizada foi detectado que a maioria dos artigos envolvendo a modelagem dinâmica de cabos utiliza elementos finitos na discretização da flexibilidade contínua em trabalhos envolvendo a realização de simulações. Alguns outros trabalhos utilizam diferenças finitas para a solução das equações diferenciais parciais da dinâmica do cabo. Como este é o caso do presente trabalho, as atenções, na pesquisa bibliográfica, concentraram-se em artigos que utilizam diferenças finitas.

No capítulo 2 a curva catenária foi o foco. Sabe-se que, com a ausência de esforços internos significativos, um cabo tende, em equilíbrio estático, a se comportar como uma corrente e, conseqüentemente, sua configuração estática tende a se conformar em uma curva catenária. Entretanto, verificou-se, na revisão bibliográfica, que alguns artigos que adotam diferenças finitas utilizam a parábola como configuração estática. O desenvolvimento clássico da equação da catenária foi demonstrado e posteriormente foram realizadas comparações entre catenária e parábola, para diferentes relações flecha sobre vão, para cabos suspensos por dois pontos, ambos em uma mesma altitude. De fato, constatou-se que, quanto maior a relação, maior será a diferença entre catenária e parábola e ainda, que para relações flecha/vão menores que 1/20 as diferenças são negligenciáveis. Neste capítulo também foi comprovado experimentalmente que o cabo escolhido para a realização de experimentos apresenta configuração espacial estática na forma de uma catenária.

No capítulo 3 o desenvolvimento teórico que conduz às equações diferenciais parciais que representam o modelo dinâmico do cabo suspenso foi apresentado, no caso mais geral de movimento no espaço tridimensional. Posteriormente, particularizou-se ao caso do movimento no plano vertical. O interesse na dinâmica contida no plano deve-se à intenção de confrontar, em trabalhos futuros, simulações e resultados experimentais. No capítulo 4, o método de diferenças finitas foi utilizado na discretização das equações diferenciais parciais, transformando-as em equações por diferenças, permitindo assim a realização de simulações numéricas, desde que se conheçam as condições iniciais e de contorno. Diversas simulações foram realizadas e analisadas nos capítulos seguintes. Estas simulações foram concebidas provocando-se perturbações senoidais nas condições de contorno, geradoras de

propagação de ondas ao longo do cabo. Em síntese, os resultados das simulações mostraram comportamentos dinâmicos conforme o esperado, atestando qualitativamente a boa representatividade do modelo desenvolvido. A opção foi utilizar o método de diferenças finitas na forma explícita, cuja principal limitação reside na obrigatoriedade de se trabalhar com uma refinada malha discreta, principalmente no domínio do tempo. Porém, os passos de discretização escolhidos no tempo e no espaço permitiram soluções numéricas estáveis.

Como trabalhos futuros, pretende-se montar um suporte para a confrontação de simulações com resultados experimentais. Pretende-se também confrontar a modelagem analítica desenvolvida no presente trabalho com outra técnica de modelagem discreta, desenvolvida originalmente no Núcleo de Matemática Aplicada do IMEF – FURG.

Referências

- BENEDITTINI, F.; REGA, G.; ALAGGIO, R. Non-linear oscillations of a four-degree-of-freedom model of a suspended cable under multiple internal resonance conditions. *Journal of Sound and Vibration*, v. 5, n. 182, p. 775–798, 1995. Citado 4 vezes nas páginas 14, 24, 27 e 28.
- BUTKOV, E. *Física Matemática*. Rio de Janeiro: LTC, 1988. Citado na página 26.
- CHANG, B. S.; LEE, J. P. K. Nonlinear dynamic analysis of spatially suspended elastic catenary cable with finite element method. *KSCCE Journal of Civil Engineering*, v. 12, n. 2, p. 121–128, 2008. Citado na página 13.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Numerical Methods for Engineers*. USA: McGraw-Hill Education, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 32.
- CHATJIGEORGIOUS, I. K.; MAVRAKOS, A. The 3d nonlinear dynamics of catenary slender structures for marine applications. *Nonlinear Dynamics*, INTECH, p. 366, 2010. Citado na página 13.
- CORDOVÉS, D. de L. C. S. *Análise de Confiabilidade Estrutural de Cabos Umbilicais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo - Escola Politécnica, São Paulo-SP, 2008. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3151/tde-26032009-174036/publico/Dissertacao_Dagne_Sune_FINAL_setembro_2008.pdf>. Citado na página 8.
- ESCALANTE, M. R. et al. A reduced order model of a 3d cable using proper orthogonal decomposition. *Mecânica Computacional*, XXX, p. 1143–1158, 2011. Citado na página 13.
- GOMES, S. C. P. *Métodos Numéricos: Teoria e Programação*. Rio Grande: Editora da Furg, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 34.
- IRVINE, H. M.; CAUGHEY, T. K. The linear theory of free vibrations of a suspended cable. *Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, v. 341, n. 1626, p. 775–798, 1974. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 28.
- LUONGO, A.; ZULLI, D.; PICCARDO, G. Analytical and numerical approaches to nonlinear galloping of internally resonant suspended cables. *Journal of Sound and Vibration*, v. 315, p. 375–393, 2008. Citado na página 13.
- OLIVEIRA, G. P. *Soluções Analíticas e Numéricas de Risers Flexíveis nas Configurações de Catenária Livre e Lazy Wave*. 2017. Projeto de Graduação (Curso de Engenharia Naval da Escola Politécnica), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil. Disponível em: <<http://monografias.poli.ufrj.br/monografias/monopoli10021508.pdf>>. Citado 4 vezes nas páginas 9, 10, 12 e 17.
- OLIVEIRA, A. R. D. *Modelagem computacional do problema de condução de calor*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Pará, Belém - PA, 2016. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94184>. Citado na página 35.

OMNISENSTV. *Cabo umbilical*. 2012.

Url:<https://www.youtube.com/watch?v=Pb1eLM7Lupw>. Acessado 27-10-2019.

Citado na página 9.

PEREIRA, A. E. L. *O método da decomposição de adomian aplicado à interação fluido-estrutura de um cabo*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre-RS, 2010. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/26854/000761410.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Citado na página 13.

PEREIRA, A. E. L.; GOMES, S. C. P.; BORTOLI, A. L. A new formalism for the dynamic modelling of cables. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, v. 1, p. 1–14, 2012. Citado na página 13.

PETROBRAS. *Tecnologias pioneiras do pré-sal*. 2015.

Url:<https://presal.hotsitespetrobras.com.br/tecnologias-pioneiras/>. Acessado 04-09-2019. Citado na página 7.

PETROBRAS1. *Linhas Flexíveis*. 2015. Url:<http://www.petrobras.com.br/fatos-e-dados/conheca-curiosidades-sobre-equipamentos-de-nossos-sistemas-submarinos.htm>. Acessado 27-10-2019. Citado na página 10.

POUZADA, T. A.; GOMES, S. C. P. Geração automática de modelos dinâmicos de cabos. *Ciência e Natura*, v. 39, p. 390–401, 2017. Citado na página 13.

PRESAL. *Diário do pré-sal*. 2009.

Url:<https://diariodopresal.files.wordpress.com/2009/01/plataformas-sistema-de-producao-peq.jpg>. Acessado 27-10-2019. Citado na página 8.

SCHIMIDT, F. T. *Instalação de linhas flexíveis e umbilicais: Testes de condicionamento e falhas operacionais*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia - UFF, Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: <<https://docplayer.com.br/64306377-Universidade-federal-fluminense-escola-de-engenharia-felippe-thurler-schmidt.html>>. Citado na página 12.

SRIVASTAVA, V. K.; YVSS, S.; TAMSIR, M. Dynamic behaviour of underwater towed-cable in linear profile. *International Journal of Scientific and Engineering Research*, v. 7, n. 2, 2011. Citado na página 13.

TECPETRO. *Equipamentos Submarinos*. 2014.

Url:<https://tecpetro.com/2014/05/11/equipamentos-submarinos/>. Acessado 27-10-2019. Citado na página 9.

WOLFSCHLUCKNER, A.; JODIN, D. Modelling cable dynamics exemplified by load transposition of insulator string in overhead lines. *Proceeding in Manufacturing Systems*, v. 3, n. 8, 2013. Citado na página 13.

ZANELA, E. B. *Modelagem Analítica de Estruturas do Tipo Cabo para Aplicações Subaquáticas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande-RS, 2013. Disponível em: <<https://sistemas.furg.br/sistemas/sab/arquivos/bdtd/0000010473.pdf>>. Citado na página 13.