

Matheus Madeira Corrêa

Cálculo Fracionário Aplicado ao Modelo de Cournot

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Junho, 2019

Matheus Madeira Corrêa

Cálculo Fracionário Aplicado ao Modelo de Cournot

Trabalho de Conclusão de Curso, Matemática Aplicada Bacharelado, submetido por Matheus Madeira Corrêa junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Matemática Aplicada Bacharelado

Orientador: Dr. Adriano De Cezaro

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Junho, 2019

Este trabalho é dedicado A Todos Que Amam A Ciência.

Agradecimentos

Agradeço a todos meus professores que contribuíram em minha formação, em especial meu orientador, Adriano De Cezaro. Agradeço também minha família e amigos que sempre me apoiaram e estiveram ao meu lado.

Resumo

Nesse trabalho apresentaremos um modelo econômico de Cournot que sintetiza de maneira relevante a competição entre firmas, que é uma questão bastante pertinente para as Ciências Econômicas. Faremos uma análise a partir de duas perspectivas: o cálculo com derivadas de ordem inteira (que corresponde exatamente ao modelo de Cournot encontrado na literatura) e o cálculo de ordem fracionária, para o qual podemos interpretar que as firmas competem com memória. Mostraremos que, em uma estratégia de longo prazo, os efeitos de memória geram uma estratégia vencedora. Usaremos alguns indicadores conhecidos dentro da Ciência Econômica tais como, receita e custo marginal, lucro médio e suas generalizações e utilizaremos o cálculo de ordem fracionária para entender o efeito que cada abordagem produzirá em nosso modelo.

Palavras-chaves: Firmas, Modelo de Cournot, Cálculo Fracionário, Memória, Equilíbrio.

Abstract

In this work, we will present an economic model of Cournot that summarizes in a relevant way the competition between firms, which is a very pertinent question for the Economic Sciences. We will make an analysis from two perspectives: the calculation with derivatives of whole order (which corresponds exactly to the model of Cournot found in the literature) and the calculation of fractional order, for which we can interpret that the firms compete with memory. We will show that in a long-term strategy, memory effects generate a winning strategy. We will use some known indicators within Economic Science such as revenue and marginal cost, average profit and their generalizations, and we will use the fractional order calculation to understand the effect that each approach will produce on our model.

Key-words: Firm, Cournot model, fractional calculation, memory, balance.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Plano De Fases	30
Figura 2 – Lucro Da Firma 1	45
Figura 3 – Lucro Da Firma 2	46

Lista de tabelas

Tabela 1 – Jogo da ordem da derivada	48
--	----

Sumário

	Introdução	10
1	FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA	12
1.1	Noções de Sistemas Dinâmicos	12
1.1.1	Equações Diferenciais	12
1.1.2	Sistemas Lineares Autônomos	12
1.1.3	Solução Dos sistemas	12
1.1.3.1	Solução Homogênea	13
1.1.3.2	Solução Particular	13
1.1.4	Classificação Do Equilíbrio	13
1.2	Cálculo De Ordem Arbitrária	13
1.2.1	Funções especiais	14
1.3	Integral Fracionária	17
1.4	Derivada Fracionária	21
2	MODELOS DO TIPO COURNOT	24
2.1	Modelo De Cournot: Duas Firmas Usando Derivadas Inteiras	25
2.1.1	Modelo de Cournot Discreto	25
2.1.2	Modelo de Cournot Contínuo	26
2.1.2.1	Análise De Equilíbrio	27
2.1.2.2	Solução para o Modelo de Cournot Contínuo.	28
2.1.3	Plano de Fases para o Modelo de Cournot Contínuo	29
2.2	Modelo de Cournot Discreto para duas Firmas usando Derivadas de ordens Fracionárias	30
2.2.1	Modelo de Cournot Discreto com derivadas de ordem fracionárias.	31
2.2.2	Modelo de Cournot Fracionário Contínuo	33
2.2.2.1	Análise De Equilíbrio	33
2.2.3	Solução para o Modelo de Cournot Contínuo Fracionário	34
2.3	Modelos de Cournot Multi-fracionários: Firmas com Derivadas de Diferentes Ordens	36
2.3.1	Modelo de Cournot Multi-fracionário Discreto	36
2.3.2	Modelo de Cournot Multi-fracionário Contínuo	36
2.3.3	Análise De Equilíbrio	37
2.4	Comparação entre as Distintas Estratégias de Cournot	39
2.4.0.1	Discutindo os Resultados	43
2.4.1	Teoria dos Jogos: Jogando com a Ordem da Derivada	46

3	UMA INTERPRETAÇÃO EM ECONOMIA PARA AS DERIVADAS DE ORDEM FRACIONÁRIAS	49
4	CONCLUSÕES	52
4.1	Trabalhos Futuros	52
	REFERÊNCIAS	54

Introdução

O estudo da interdependência entre firmas é um questão de grande importância para compreender a organização industrial. Contudo, considerar a hipótese de que todas as firmas são tomadoras de preços pode nos levar a negligenciar a complexidade que envolve o comportamento das empresas em um ambiente interdependente.

A teoria dos oligopólios assume um papel considerável nestas discussões pois, além de ser uma estrutura comum em diversos setores do mercado, a sua inter-relação com o desenvolvimento da teoria de jogos, (GREMAUD et al., 2017), a tornou um objeto de estudo fértil. Tal inter-relação fica clara quando percebemos que a competição entre firmas é estudada, em geral, sob a perspectiva de encontrar um equilíbrio (equilíbrio de Nash) que maximize os interesses das firmas envolvidas (GREMAUD et al., 2017).

Mais recentemente, o foco de desenvolvimento teórico em micro-economia tem se concentrado em processos competitivos que evoluem no tempo e nos efeitos gerados sobre tais processos pela imperfeição da informação e pela introdução de incertezas. Um importante ponto desta nova visão dinâmica dos processos competitivos sob os processos estáticos é a possibilidade de emitir previsões futuras, bem como incorporar estratégias que considerem históricos competitivos entre as firmas envolvidas, em detrimento dos processos em que a estratégia é feita a partir de firmas com completa amnésia (GREMAUD et al., 2017), (TARASOVA; TARASOV, 2017).

É claro que estratégias corporativas podem ser muito complexas, dependendo de uma série de variáveis como: preço, produtos, investimentos, diferenciação de produtos, etc. Embora, generalidades nas estratégias poderiam ser adotadas neste trabalho, optamos por apresentar um modelo simplificado, que consiste em uma competição puramente por quantidades, conhecido na literatura como modelo de Cournot (veja Capítulo 2 para maiores detalhes). As estratégias onde as firmas competem por preço e que se remetem ao trabalho original de Bertrand (GREMAUD et al., 2017) serão abordados em trabalhos futuros.

A competição de Cournot é um modelo que descreve a estrutura industrial em que firmas competem pela quantidade de um bem uniforme que será produzido, que será decidida de maneira independente entre as firmas competidoras ao mesmo tempo. Cada firma tentará maximizar o seu ganho, comumente o preço, baseado na expectativa que sua própria decisão não afetará a decisão das demais firmas competidoras.

Estudaremos o modelo do Cournot para duas firmas em oligopólio durante o Capítulo 2. Estudaremos o caso em que as firmas trabalham de forma discreta (as quantidades são obtidas em intervalos de tempo igualmente espaçados) e contínuas (essencialmente, a

produção e em consequência, o preço é tempo dependente). Isso será estudado durante as Subseções 2.1.1 e 2.1.2, da Seção 2.1, respectivamente.

O modelo de Cournot estudado na Seção 2.1 considera que as firmas competidoras o fazem em um meio de extrema amnésia, o qual não é razoável que aconteça em uma competição real. Por isso, nas Subseções 2.2.1 e 2.2.2, estudamos o modelo de Cournot, cujo equilíbrio é determinado por uma estratégia que considera memória, dada pelas derivadas de ordem fracionária.

De maneira a entender o papel que a memória (derivadas de ordem fracionária) introduzem na teoria de competição de Cournot, na Seção 2.4 comparamos os resultados obtidos para firmas que possuem memória distintas. Provamos que, em uma estratégia de longo prazo, a firma que possui maior memória (derivada fracionária de ordem menor) tem a estratégia vencedora. Até onde o autor conhece, esse resultado é novo e nunca foi explorado com a abordagem apresentada neste trabalho.

No Capítulo 1, apresentamos de forma breve e concisa alguns resultados a respeito de sistemas dinâmicos e da teoria do cálculo de ordem não inteira que serão utilizados neste trabalho.

No Capítulo 3, apresentamos uma interpretação econômica a respeito das derivadas de ordem fracionária, nos quais baseamos nossa abordagem durante o Capítulo 2.

Por fim, no Capítulo 4 tecemos nossas conclusões e damos uma série de alternativas para o prosseguimento dos estudos abordados neste trabalho.

1 Fundamentação Matemática

Neste Capítulo, introduziremos de maneira simples e objetiva o Cálculo de Ordem Arbitrária, também conhecido como cálculo fracionário, cujas propriedades serão utilizadas durante este trabalho. Para uma visão mais geral sobre o assunto sugerimos ao leitor que consulte (CAMARGO et al., 2009; OLIVEIRA et al., 2014; DIETHELM, 2004) e referências.

Iniciaremos este capítulo de revisões com alguns conceitos relativos a solução de sistemas de equações diferenciais, assunto que será recorrente no decorrer deste trabalho. Mais uma vez faremos uma breve revisão e sugerimos ao leitor consultar (ZILL; CULLEN, 2006) e referências para maiores detalhes.

1.1 Noções de Sistemas Dinâmicos

Partes da teoria dos sistemas dinâmicos serão amplamente utilizada durante este trabalho. Faremos um apanhado de alguns conceitos fundamentais da teoria. Para detalhes completos desta teoria, recomendamos (ZILL; CULLEN, 2006) e referências.

1.1.1 Equações Diferenciais

Definição 1.1.1. Segundo (ZILL; CULLEN, 2006) uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamado de *equação diferencial (ED)*

1.1.2 Sistemas Lineares Autônomos

Definição 1.1.2. Sistemas Lineares Autônomos Um sistema de equações diferenciais é dito autônomo se pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{1.1}$$

(ZILL; CULLEN, 2006)

1.1.3 Solução Dos sistemas

Considere o seguinte teorema:

Teorema 1.1.1. Seja

$$X' = A(t)X + F(t)$$

um sistema de equações diferenciais, sujeito a $X(t_0) = X_0$, representado em sua forma matricial. Então temos que se os elementos das matrizes $A(t)$ e $F(t)$ sejam funções contínuas em um intervalo comum I que contenha t_0 . Então existe um única solução para o problema.

Para demonstração, ver (ZILL; CULLEN, 2006).

1.1.3.1 Solução Homogênea

Teorema 1.1.2 (Solução Geral -Sistemas Homogêneos). Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, n autovalores reais distintos da matriz de coeficientes A de um sistema $Z' = AZ$ e sejam K_1, K_2, \dots, K_n os autovetores correspondentes. Então, a solução geral do sistema no intervalo $(-\infty, \infty)$ é dada por

$$Z = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n K_n e^{\lambda_n t}$$

Para demonstração, ver (ZILL; CULLEN, 2006).

1.1.3.2 Solução Particular

Teorema 1.1.3. Sejam X_1, X_2, \dots, X_K um conjunto de vetores solução da parte homogênea de um sistema em um intervalo I e seja X_p um vetor arbitrário solução da parte não homogênea neste intervalo. Então

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_k X_k + X_p$$

é também solução do sistema não homogêneo no intervalo, para quaisquer constantes c_1, c_2, \dots, c_k .

Para a demonstração ver (ZILL; CULLEN, 2006).

1.1.4 Classificação Do Equilíbrio

Os pontos de equilíbrio podem ser classificados de acordo com a matriz do sistema de equações diferenciais:

1.2 Cálculo De Ordem Arbitrária

Podemos dizer que o cálculo fracionário teve sua origem em 1695 numa carta escrita por L'Hôpital para o famoso matemático Leibniz onde ele questiona qual o significado da

expressão $D^n y = \frac{d^n y}{dx^n}$ quando $n = \frac{1}{2}$. Leibniz, por sua vez, respondeu, sem muita precisão matemática, que a resposta para essa pergunta era $D^{\frac{1}{2}} x = x\sqrt{dx} : x$ e, ainda, afirmou que "Este é um importante paradoxo do qual um dia importantes aplicações serão obtidas", (CAMARGO et al., 2009).

Após esse evento, diversos outros importantes matemáticos como Reimann, Lagrange, Laplace, entre outros, contribuíram direta e indiretamente para que a teoria do cálculo fracionário se desenvolvesse. Uma revisão completa sobre o assunto pode ser encontrado em (OLIVEIRA et al., 2014; CAMARGO et al., 2009) e referências.

Antes de avançarmos para o cálculo fracionário, vamos introduzir na próxima subseção uma série de funções especiais que são indispensáveis para o que segue.

1.2.1 Funções especiais

Nesta subseção apresentaremos a definição de algumas funções especiais, juntamente com algumas propriedades das mesmas, as quais serão amplamente utilizadas no decorrer do trabalho.

Iniciaremos apresentando as funções Beta e Gamma e algumas propriedades das mesmas. Tais funções são de grande importância na construção a teoria do cálculo fracionário.

Definição 1.2.1. Seja $x \in \mathbb{R}^+$. A função Gamma é definida através da seguinte integral imprópria

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (1.2)$$

Veremos abaixo, a partir de algumas das propriedades da função Gamma, que esta é uma generalização (para $x \in \mathbb{R}^+$ da função fatorial.

Lema 1.2.1 ((CAMARGO et al., 2009)). Considere a função Gamma como na Definição 1.2.1. Então, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$ temos

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$$

Em especial

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1$$

O que implica em $\Gamma(n + 1) = (n)!$, para $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Por definição, temos que

$$\Gamma(x + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt$$

O que implica em

$$\Gamma(x+1) = \left[-e^{-t}t^x\right]_0^\infty + x \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Como sabemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t}t^x = 0$$

Concluimos que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

□

A seguir, definiremos a função Beta.

Definição 1.2.2. Sejam $p, q \in \mathbb{R}^+$. Então a função Beta é definida pela seguinte integral imprópria

$$\beta(q, p) = \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx. \quad (1.3)$$

Lema 1.2.2 ((CAMARGO et al., 2009)). Sejam $q, p \in \mathbb{R}^+$. Então a função Beta definida em 1.2.2 pode ser reescrita na forma

$$\beta(q, p) = 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2q-1} (\sin(\theta))^{2p-1} d\theta \right). \quad (1.4)$$

Demonstração. Considere a seguinte mudança de variável

$$x = \cos^2(\theta) \implies dx = -2\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta. \quad (1.5)$$

Substituindo em (1.5), temos (1.3). □

Com $q, p \in \mathbb{R}^+$ Podemos escrever a função beta de uma outra forma tomando $x = \cos^2(\theta) \implies dx = -2\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta$:

$$\beta(q, p) = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\cos^2(\theta))^{q-1} (\sin^2(\theta))^{p-1} (-2\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta)$$

Definição 1.2.3. Logo podemos escrever a função beta da seguinte forma:

$$\beta(q, p) = 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2q-1} (\sin(\theta))^{2p-1} d\theta \right)$$

É possível relacionar as funções gama e beta através do teorema abaixo, presente em (OLIVEIRA et al., 2014):

Teorema 1.2.1. (OLIVEIRA et al., 2014)

$$\beta(q, p) = \frac{\Gamma(q)\Gamma(p)}{\Gamma(q+p)}$$

Demonstração. Da definição temos que

$$\Gamma(q)\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{q-1} dx \int_0^\infty e^{-y} y^{p-1} dy$$

Seja $x = r^2$ e $y = s^2$. Logo $dx = 2rdr$ e $dy = 2sds$. Substituindo na equação acima teremos:

$$\Gamma(q)\Gamma(p) = \left(2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2q-2} r dr\right) \left(2 \int_0^\infty e^{-s^2} s^{2p-2} s ds\right)$$

$$\Gamma(q)\Gamma(p) = 2 \left(\int_0^\infty e^{-(r^2+s^2)}\right) 2 \left(\int_0^\infty r^{2q-1} s^{2p-1} dr ds\right)$$

Usando coordenadas polares $r = k\cos(\theta)$ e $s = k\sin(\theta)$ teremos:

$$\Gamma(q)\Gamma(p) = 2 \left(\int_0^\infty e^{-k^2}\right) 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (k\cos(\theta))^{2q-1} (k\sin(\theta))^{2p-1} k dk d\theta\right)$$

$$\Gamma(q)\Gamma(p) = 2 \left(\int_0^\infty e^{-k^2} k^{2(q+p-1)} k dk\right) 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2q-1} (\sin(\theta))^{2p-1}\right) d\theta$$

Podemos ver que a segunda integral da equação acima é exatamente a igual a segunda forma de escrever a função beta. Portanto:

$$\Gamma(q)\Gamma(p) = 2 \left(\int_0^\infty e^{-k^2} k^{2(q+p-1)} k dk\right) \beta(q, p)$$

Fazendo $\psi = k^2 \implies d\psi = 2k dk$:

$$\Gamma(q)\Gamma(p) = \left(\int_0^\infty e^{-\psi} \psi^{q+p-1} d\psi\right) \beta(q, p)$$

Repare que a primeira integral é a própria definição da função gama de $q + p$:

$$\Gamma(q)\Gamma(p) = \Gamma(q + p)\beta(q, p)$$

Por fim

$$\beta(q, p) = \frac{\Gamma(q)\Gamma(p)}{\Gamma(q + p)}$$

o que conclui a demonstração. □

Outra função especial que vamos utilizar no decorrer do trabalho é a função de Mittag-Leffler, a qual pode ser vista como uma generalização da função exponencial (OLIVEIRA et al., 2014).

Definição 1.2.4. A função de Mittag-Leffler de um parâmetro $E_\alpha(t)$ é definida da seguinte forma:

$$E_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n\alpha + 1)}$$

Onde $Re(\alpha) > 0$.

Repare que no caso especial em que $\alpha = 1$ temos

$$E_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n + 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t$$

(CAMARGO et al., 2009)

Agora iremos introduzir a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, $E_{\alpha,\beta}(t)$.

Definição 1.2.5. A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros é definida por

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)}$$

Definição 1.2.6. A função definida da forma abaixo é chamada de função de Gel'Fand-Shilov

$$\Phi_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

(CAMARGO et al., 2009)

1.3 Integral Fracionária

Nesta seção introduziremos os fundamentos da teoria de cálculo de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville, bem como alguns teoremas que produzem propriedades de interesse para o desenvolvimento deste trabalho. Para um apanhado geral desta teoria fascinante, consulte (CAMARGO et al., 2009), (OLIVEIRA et al., 2014) (DIETHELM, 2004) e referências.

O princípio fundamental para a introdução do cálculo de ordem fracionária está na generalização do Teorema de Leibniz para Diferenciação de uma Integral (CAMARGO et al., 2009), (OLIVEIRA et al., 2014), (DIETHELM, 2004), como segue.

Teorema 1.3.1. Seja $f(t, x)$ uma função de duas variáveis, diferenciável em t , e sejam $g(t)$ e $h(t)$ funções diferenciáveis. Então temos

$$\frac{d}{dt} \int_{g(t)}^{h(t)} f(t, x) dx = \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx + f(t, h(t)) \frac{dh(t)}{dt} - f(t, g(t)) \frac{dg(t)}{dt}$$

Demonstração. Podemos identificar a integral, que está do lado esquerdo da equação acima, como sendo uma função de três variáveis.

$$J(t, h, g) = \int_{g(t)}^{h(t)} f(t, x) dx,$$

onde h e g dependem apenas de t . Do teorema fundamental do cálculo temos:

$$\frac{d}{dt} \int_a^t g(x) dx = g(t) \quad (1.7)$$

E também

$$\frac{d}{dt} \int_t^b g(x) dx = -\frac{d}{dt} \int_b^t g(x) dx = -g(t)$$

Agora vamos usaremos a regra da cadeia para encontrar a derivada total de $J(t, h, g)$ em relação a t .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(t, h, g) &= \frac{\partial J}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial J}{\partial h} \frac{dh}{dt} + \frac{\partial J}{\partial g} \frac{dg}{dt} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_g^h f(t, x) dx \right) \frac{dt}{dt} + \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_g^h f(t, x) dx \right) \frac{d}{dt} h(t) + \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_h^g f(t, x) dx \right) \frac{d}{dt} g(t) \\ &= \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx + f(t, h(t)) \frac{d}{dt} h(t) - f(t, g(t)) \frac{d}{dt} g(t) \end{aligned}$$

A equação acima é justamente aquela que procurávamos. □

Considerando o Teorema 1.3.1 com $h(t) = t$ e $g(t) = a$ teremos:

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(t, x) dx = \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx + f(t, t) \quad (1.8)$$

O próximo teorema é o famoso Teorema De Cauchy para Integrais Repetidas, e.g. (OLIVEIRA et al., 2014).

Teorema 1.3.2. Seja f uma função integrável n vezes no intervalo $[a, t] \in \mathbf{R}$, com $n \in \mathbf{N}$ Então vale a relação

$$[J_a^n f(x)](t) = \int_a^t f(x) (dx)^n \equiv \int_a^t dx_n \int_a^{x_n} \dots \int_a^{x_2} f(x_1) dx_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x) dx. \quad (1.9)$$

Onde $[J_a^n f(x)](t)$ é a integral de $f(x)$ de ordem n de a até t .

Demonstração. Seja $p(t) = \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x) dx$. Derivando $p(x)$ em relação a t e utilizando (2.2) temos:

$$D[p(t)] = \frac{d}{dt} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x) dx$$

Onde D^n é a derivada de ordem n .

$$\begin{aligned} &= (t-x)^{n-1} f(x) \Big|_{x=t} + \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} (t-x)^{n-1} f(x) dx \\ &= \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} (t-x)^{n-1} f(x) dx = (n-1) \int_a^t (t-x)^{n-2} f(x) dx. \end{aligned}$$

Derivando $D[p(t)]$, temos

$$D^2[p(t)] = (n-1)(n-2) \int_a^t (t-x)^{n-3} f(x) dx$$

Derivando $p(x)$ $n-1$ vezes onde $n \in \mathbb{N}$ obtemos

$$\begin{aligned} D^{n-1}[p(t)] &= (n-1)! \int_a^t (t-x)^{n-n} f(x) dx \\ &= (n-1)! \int_a^t f(x) dx \end{aligned}$$

Derivando novamente e utilizando (2.2) temos

$$\begin{aligned} DD^{n-1}[p(x)] &= (n-1)! \frac{d}{dt} \int_a^t f(x) dx \\ D^n[p(x)] &= (n-1)! f(t) \end{aligned}$$

Com isso podemos notar que $\frac{p(t)}{(n-1)!}$ é a integral de ordem n de $f(t)$.

$$\frac{p(t)}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x) dx \quad (1.10)$$

Ou seja $J^n f(t)$. Ainda mais podemos dizer que

$$D^n \left[\frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x) dx \right] = f(t)$$

Como sabemos que J^n é o operador inverso a esquerda de D^n temos que:

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x) dx = J^n f(t)$$

Portante concluímos que o teorema de Cauchy para integrais repetidas é válido para $n = 1, 2, \dots$ \square

Com base no Teorema 1.3.2, podemos considerar continuação da formula de Cauchy para integrais repetidas, para valores não inteiros, isto é, podemos considerar $\alpha \in \mathbb{R}$. Tal continuação gera o que conhecemos por operador de integração fracionaria de Riemann Liouville (CAMARGO et al., 2009), (OLIVEIRA et al., 2014), (DIETHELM, 2004) e que será apresentado na definição a seguir.

Definição 1.3.1. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ com $n - 1 < \alpha < n$, f uma função integrável em qualquer subintervalo de $[a, b]$. Então, para $t \in [a, b]$ denotamos por $J_t^n f(t)$ a integral de $f(t)$ e definimos a integrais fracionárias de Riemann- Liouville de ordem α , à esquerda e à direita, respectivamente, por

$$J_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx \quad (1.11)$$

e

$$J_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx, \quad b > t. \quad (1.12)$$

Da definição de integral fracionária acima, podemos deduzir a seguinte propriedade, que pode ser interpretada como uma lei dos expoentes, e.g. (CAMARGO et al., 2009; OLIVEIRA et al., 2014; DIETHELM, 2004).

Teorema 1.3.3 (Lei dos Expoentes). Sejam $\alpha, \beta \geq 0$. Considere o operador de integração fracionaria J apresentado na Definição 1.3.1. Então

$$J^\alpha J^\beta = J^\beta J^\alpha = J^{\alpha+\beta}$$

Demonstração. Considere a função de Φ definida abaixo por:

$$\Phi_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0 \end{cases}$$

Fazendo a convolução de Φ com uma função $f(t)$ ¹

$$\Phi_\alpha(t) * f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx = J^\alpha f(t)$$

Agora vamos mostrar que:

$$\Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) = \Phi_{\alpha+\beta}(t)$$

¹ Veja (OLIVEIRA et al., 2014) para a definição da operação de convolução

Usando a definição de convolução, obtemos

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) &= \int_0^x \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} dx \\ &= \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^x x^{\alpha-1} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{\beta-1} dx.\end{aligned}$$

Fazendo $y = \frac{x}{t}$ e substituindo na equação acima encontraremos

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) &= \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (ty)^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} t dy \\ &= \frac{t^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (y)^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} dy.\end{aligned}$$

Observe que a integral acima é justamente a definição da função beta (veja Definição 1.2.2), logo

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) &= \frac{t^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \beta(\alpha, \beta) \\ &= \frac{t^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

Portanto

$$\Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) = \Phi_{\alpha+\beta}.$$

Agora considere a integral fracionária (veja Definição 1.3.1) obtemos

$$J^\alpha J^\beta f(x) = \Phi_\alpha J^\beta f(x) = \Phi_\alpha \Phi_\beta f(x) = \Phi_{\alpha+\beta} f(x) = J^{\alpha+\beta} f(x)$$

como enunciado. □

1.4 Derivada Fracionária

Munidos da definição de integral fracionária (Definição 1.3.1) e conhecendo a lei dos expoentes (Teorema 1.3.3), estamos preparados para definir a derivada fracionaria, segundo Rimann-Liouville.

Definição 1.4.1. Seja $f(x)$ uma função integrável e β um número real tal que $\beta = n - \alpha$ onde $0 < \alpha < 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Então a derivada de ordem α de f é dada por

$$D^{n-\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right]. \quad (1.13)$$

A seguir deduziremos algumas propriedades da derivada de ordem fracionária, as quais serão utilizadas neste trabalho. Para um apanhado mais completo sobre as propriedades do operador de derivadas de ordem fracionária, consulte (CAMARGO et al., 2009; OLIVEIRA et al., 2014; DIETHELM, 2004) e referências.

Lema 1.4.1 (Linearidade). Sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $n - 1 < \alpha < n$ com $n \in \mathbb{R}$, f, g funções definidas em $[a, b]$ tais que $D_t^\alpha f(t)$ e $D_t^\alpha g(t)$ existam. Então temos que $D_t^\alpha [\lambda f(t) + \mu g(t)]$ existe e

$$D_t^\alpha [\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda D_t^\alpha f(t) + \mu D_t^\alpha g(t)$$

Demonstração. Da definição 1.13 temos que

$$\begin{aligned} D_t^\alpha [\lambda f(t) + \mu g(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t [(t-x)^{\alpha-1} (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx] \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t [(t-x)^{\alpha-1} f(x) dx] + \frac{\mu}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t [(t-x)^{\alpha-1} g(x) dx] \\ &= \lambda D_t^\alpha f(t) + \mu D_t^\alpha g(t). \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. \square

Veja abaixo outra propriedade interessante das derivadas fracionárias. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{N}$ e $D = \frac{d}{dx}$ então. Se as derivadas de ordem fracionária $(D_a^\alpha y)(x)$ e $(D_a^{\alpha+m})(x)$ existem, então

$$(D^m D_a^\alpha y)(x) = (D_a^{\alpha+m} y)(x)$$

(OLIVEIRA et al., 2010)

A seguir apresentaremos a derivada de ordem fracionária para algumas funções (funções potências) que serão utilizadas neste trabalho. Para uma lista mais completa de tais derivadas sugerimos ao leitor consultar (CAMARGO et al., 2009; OLIVEIRA et al., 2014; DIETHELM, 2004) e referências.

Lema 1.4.2. Considere a função $f(t) = t^\gamma$, $\gamma > -1$ e $\alpha \in [0, 1[$. Então a derivada de ordem $n - \alpha$ com $n - 1 < \alpha < n$ é dada por

$$D_t^{n-\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n-\alpha+\gamma+1)} D^f(s)_{s=t}^{-\alpha+\gamma}.$$

Demonstração. Note que, por Definição 1.13 temos que

$$\begin{aligned} D_t^{n-\alpha} f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} x^\gamma dx \right] \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[t \left(1 - \frac{x}{t}\right) \right]^{\alpha-1} x^\gamma dx \right]. \end{aligned}$$

Tome $x = ut$ o que implica em $dx = tdu$. Assim da equação anterior, temos que

$$\begin{aligned} D_t^{n-\alpha} f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [t(1-u)]^{\alpha-1} (ut)^\gamma t du \right] \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\gamma du \right]. \end{aligned}$$

Repare que a integral a direita é justamente a definição da função beta.

$$= \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\gamma+1, \alpha) \right]$$

Usando 1.2.1 temos:

$$D_t^{n-\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{t^{\alpha+a} \Gamma(\gamma+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha+\gamma+1)} \right]$$

E por fim temos:

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{t^{\alpha+\gamma}\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \right] \quad (1.14)$$

o que conclui a demonstração. \square

Em particular temos que

Corolário 1.4.1. Considere as mesmas hipóteses do Lema 1.4.2. Então

$$D_t^{1-\alpha} t = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha.$$

e

$$D_t^{1-\alpha} t^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2+\alpha)} t^{1+\alpha}.$$

Demonstração. Basta tomar $\gamma = 1, 2$ no Lema 1.4.2, respectivamente. \square

2 Modelos do tipo Cournot

Neste Capítulo estudaremos um pouco a estrutura de duopólio, um oligopólio com duas firmas. Consideraremos que as firmas produzem produtos homogêneos (substitutos perfeitos) e que tudo que for produzido será consumido pelo mercado. Neste modelo as firmas iram vender seus produtos com o mesmo preço, porém o preço será uma função da produção de ambas as firmas, desta forma cada empresa precisa escolher a produção que resulte no preço que maximize seu lucro levando em conta a produção de sua rival. Tal análise, foi proposta em termos econômicos modernos por Antoine Augustin Cournot em (1838), e.g. (GREMAUD et al., 2017). Em outras palavras, o modelo de Cournot é um modelo de monopólio em que cada firma depende das outras para tomar suas decisões (GREMAUD et al., 2017). Como em tal modelo, a tomada de decisão está intimamente associado com o equilíbrio entre demanda e produção, faz-se necessário determinar estratégias para garantir a existência de um ponto de equilíbrio, de forma que, cada firma possa escolher de forma independente a sua estratégia para maximizar os lucros, baseado no conhecimento das estratégias das outras firmas (concorrentes). Tais conceitos estão intimamente relacionados com o que conhecemos hoje em dia por equilíbrio de Nash (GREMAUD et al., 2017). Os livros (PINDYCK; RUBINFELD; RABASCO, 2013) e (VASCONCELLOS; OLIVEIRA; BARBIERI, 2011) fornecem fornecem uma introdução aos temas citados acima.

As novidades que apresentamos neste trabalho e que serão descritas abaixo neste capítulo se encontram no fato de que analisaremos o modelo de Cournot contínuo e discreto através de duas perspectivas: As derivadas de ordem inteira (que correspondem a teoria de equilíbrio de Nash) e utilizando a teoria de cálculo fracionário, cujos resultados para este último caso, até onde sabemos, ainda não foi estudada.

Como o objetivo de simplificar o problema faremos algumas hipóteses a respeito do modelo, conforme segue:

- Estudaremos a competição entre duas firmas;
- A função preço será dada da seguinte forma:

$$P = a - bQ \tag{2.1}$$

onde $Q = q_1 + q_2$ é a oferta toral do mercado, a e b constantes tal que $b < a$ e q_1 e q_2 são as produções das firmas 1 e 2, respectivamente.

- Ambas as firmas possuem um custo variável igual a zero e o custo fixo sendo uma constante $c < a$.

- Tudo o que é produzido é consumido pelo mercado.

Com as hipóteses acima, a função lucro da firma i , com $i = 1, 2$ será:

$$\Pi_1 = Pq_1 - q_1c = (a - bQ)q_1 - q_1c = (a - b(q_1 + q_2))q_1 - q_1c,$$

o que resulta em

$$\Pi_1 = aq_1 - bq_1^2 - bq_2q_1 - q_1c \quad (2.2)$$

De maneira analoga temos,

$$\Pi_2 = aq_2 - bq_2^2 - bq_1q_2 - q_2c \quad (2.3)$$

As equações (2.2) e (2.3) correspondem ao modelo de Cournot, dado por

$$\begin{cases} \Pi_1(q_1, q_2) = aq_1 - bq_1^2 - bq_2q_1 - q_1c \\ \Pi_2(q_1, q_2) = aq_2 - bq_2^2 - bq_1q_2 - q_2c \end{cases} \quad (2.4)$$

Nas próximas seções analisaremos os pontos de equilíbrio para o modelo de Cournot (2.4).

2.1 Modelo De Cournot: Duas Firmas Usando Derivadas Inteiras

Nesta seção, analisaremos as condições de equilíbrio para o modelo de Cournot (2.4) a partir de duas perspectivas: De que a produção de duas quantidades distintas q_i (para $i = 1, 2$) são concebidas em intervalos de tempo pré-fixados, ao qual chamaremos de Modelo de Cournot Discreto, e posteriormente, consideraremos o caso em que os intervalos de tempo ente duas a produção de duas quantidades q_i (para $i = 1, 2$) podem ser obtidas em um tempo infinitesimalmente pequeno, para o qual chamaremos de Modelo de Cournot Contínuo.

2.1.1 Modelo de Cournot Discreto

Nesta subseção, olharemos para o modelo de Cournot sob a perspectiva discreta. Ou seja, que as duas quantidades $q_i(t+1)$ e $q_i(t)$ (onde t representa o tempo) é tal que $t+1 - t = 1$.

Para encontrar a função de reação das firmas retratadas em (2.4), o que corresponde a condição de primeira ordem do sistema (2.4), precisamos derivar as duas funções lucros Π_i em relação as suas respectivas produções q_i . Isto é,

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = a - 2bq_1 - bq_2 - c = 0 \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = a - 2bq_2 - bq_1 - c = 0 \end{cases}$$

Da condição acima, temos que a função reação de cada firma é dada por

$$\begin{cases} q_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_2}{2} \\ q_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_1}{2} \end{cases} \quad (2.5)$$

De (2.5) obtemos que a produção ótima de cada firma corresponde a

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{a-c}{3b} \\ q_2^* = \frac{a-c}{3b} \end{cases}$$

o qual é conhecido como ponto de equilíbrio de Cournot (GREMAUD et al., 2017). Dada a simetria de (2.4), temos que

$$\Pi_1(q_1^*, q_2^*) = \Pi_2(q_1^*, q_2^*),$$

comprovando que a estratégia de competição é ótima para ambas as firmas. Por fim, como

$$\frac{\partial^2 \Pi_i(q_i^*, q_j^*)}{\partial^2 q_i} = -2b < 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j$$

temos que o ponto de equilíbrio de Cournot (q_1^*, q_2^*) é um ponto de máximo.

2.1.2 Modelo de Cournot Contínuo

Nesta subseção, nos inspiraremos nas ideias apresentadas por (SNYDER; GORDER; VAJRARELU, 2013), para deduzir o que chamaremos de Modelo de Cournot Contínuo. Em outras palavras, somaremos $-q_i(t + \Delta t)$ para $i = 1, 2$, respectivamente, em (2.5). Assumindo que $q_i(t)$ é pelo menos contínua e utilizando o Teorema de Taylor, com resto de Lagrange, obtemos que, para $i = 1, 2$, $\dot{q}_i = q_i(t) - q_i(t + \Delta t)$. Assim, (2.5) passa a ter um "modelo contínuo associado", dado pelo sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (EDO's)

$$\begin{cases} \dot{q}_1(t) = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_2(t)}{2} - q_1(t) \\ \dot{q}_2(t) = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_1(t)}{2} - q_2(t) \end{cases} \quad (2.6)$$

Em outras palavras, \dot{q}_1 e \dot{q}_2 devem ser interpretadas como a variação da produção de cada firma em relação ao tempo.

O sistema de EDO's (2.6) deve ser considerado com as seguintes condições iniciais

$$q_i(0) = q_i^0. \quad (2.7)$$

Para analisarmos o ponto de equilíbrio, consideraremos (2.6) da forma matricial, dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a-c}{2b} \\ \frac{a-c}{2b} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Agora podemos encontrar o ponto de equilíbrio do sistema.

Primeiramente, considere as seguintes quantidades:

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} -1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & -1 \end{bmatrix} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

e

$$\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} -\frac{a-c}{2b} & \frac{-1}{2} \\ -\frac{a-c}{2b} & -1 \end{bmatrix} = \frac{a-c}{2b} - \frac{a-c}{4b} = \frac{(a-c)}{4b}$$

e ainda

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} -1 & -\frac{a-c}{2b} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{a-c}{2b} \end{bmatrix} = \frac{a-c}{2b} - \frac{a-c}{2b} = \frac{(a-c)}{4b}$$

Portanto, obtemos que o ponto de equilíbrio (estacionário) $(\dot{q}_1^*, \dot{q}_2^*) = (0, 0)$ é tal que

$$q_1^* = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(a-c)}{3b}, \quad q_2^* = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{(a-c)}{3b}$$

Na análise que segue (somente para facilitar as contas), deslocaremos o ponto de equilíbrio (q_1^*, q_2^*) para a origem. Faremos isso a partir da seguinte mudança de variáveis:

$$x(t) = q_1(t) - \frac{a-c}{3b} \quad (2.9)$$

$$y(t) = q_2(t) - \frac{a-c}{3b}. \quad (2.10)$$

De (2.9), obtemos que $\dot{x}(t) = \dot{q}_1(t)$ e $\dot{y}(t) = \dot{q}_2(t)$. Assim, o sistema (2.6) pode ser reescrito da forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) - \frac{a-c}{3b} - \frac{y(t)}{2} - \frac{a-c}{6b} + \frac{a-c}{2b} = -x(t) - \frac{y(t)}{2} \\ \dot{y}(t) = \frac{-x(t)}{2} - \frac{a-c}{6b} - y(t) - \frac{a-c}{3b} + \frac{a-c}{2b} = -\frac{x(t)}{2} - y(t). \end{cases} \quad (2.11)$$

Matricialmente, o sistema (2.11) fica escrito como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

2.1.2.1 Análise De Equilíbrio

Nesta pequena subseção analisaremos a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema (2.12).

Para tal sistema, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.1.1. O único ponto de equilíbrio do sistema (2.12) é o ponto $(0, 0)$. Tal ponto de equilíbrio é assintoticamente estável.

Demonstração. De fato, como a matriz do sistema (2.12) é dada por,

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

temos que o seu determinante é dado por $\Delta = \frac{3}{4}$. Portanto, o único ponto de equilíbrio é o $(0, 0)$. Além disso, o traço da matriz acima é dado por $T = -2$. Assim, temos que $T^2 - 4\Delta = (-2)^2 - 4\frac{3}{4} = 1 > 0$ e portanto, o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é um nó assintoticamente estável (ZILL; CULLEN, 2006). \square

2.1.2.2 Solução para o Modelo de Cournot Contínuo.

Nesta subsecção solucionaremos o sistema de EDO's 2.12. Para tal, nos utilizaremos do Teorema 1.1.2 enunciado anteriormente.

Teorema 2.1.2. A solução geral do sistema de EDO's 2.12 possui uma solução geral dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= k_1 e^{-\frac{3}{2}t} + k_2 e^{-\frac{1}{2}t} \\ y(t) &= k_1 e^{-\frac{3}{2}t} - k_2 e^{-\frac{1}{2}t}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde K_1 e K_2 são constantes indeterminadas.

Demonstração. Primeiramente, note que a equação característica do sistema (2.12) é dada por

$$\det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + \frac{3}{4} = 0.$$

Portanto, esta possui duas raízes reais e distintas, dadas pelos seguintes autovalores $\lambda_1 = \frac{-3}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{-1}{2}$.

Assim, pelo Teorema 1.1.2, basta que encontremos os autovetores associados a cada um dos autovalores acima.

Consideremos primeiramente o autovalor $\lambda_1 = \frac{-3}{2}$. Deste, substituído na matriz do sistema segue que

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 0 \\ -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 0. \end{cases}$$

O que implica em

$$x = y$$

Portanto, o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = \frac{-3}{2}$ é dado por

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Da mesma forma, substituindo o autovalor $\lambda_2 = \frac{-1}{2}$ na matriz do sistema, obtemos que

$$-q_1 = q_2.$$

Portanto, o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = \frac{-1}{2}$ é dado por

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Segue agora do Teorema (1.1.2) que a solução geral do sistema de EDO's (2.12) é dada por (2.13). \square

Note que se não tivéssemos realizado a mudança de variável precisaríamos encontrar a solução particular. Veja Abaixo:

$$\begin{cases} -P_1 - \frac{1}{2}P_2 = -\frac{a-c}{2b} \\ -\frac{1}{2}P_1 - P_2 = -\frac{a-c}{2b} \end{cases}$$

Este sistema pode ser facilmente resolvido e encontramos: $P_1 = \frac{a-c}{3b}$ e $P_2 = \frac{a-c}{3b}$.

2.1.3 Plano de Fases para o Modelo de Cournot Contínuo

Para visualizar os resultados obtidos nas Subseções 2.1.2.1-2.1.2.2, apresentaremos nesta subseção o plano de fase para o modelo (2.12). Este é dado pela Figura 1 abaixo. Fica visível na Figura 1 que o ponto de equilíbrio é o $(0, 0)$ e ainda que este é assintoticamente estável, conforme provado no Teorema 2.1.1.

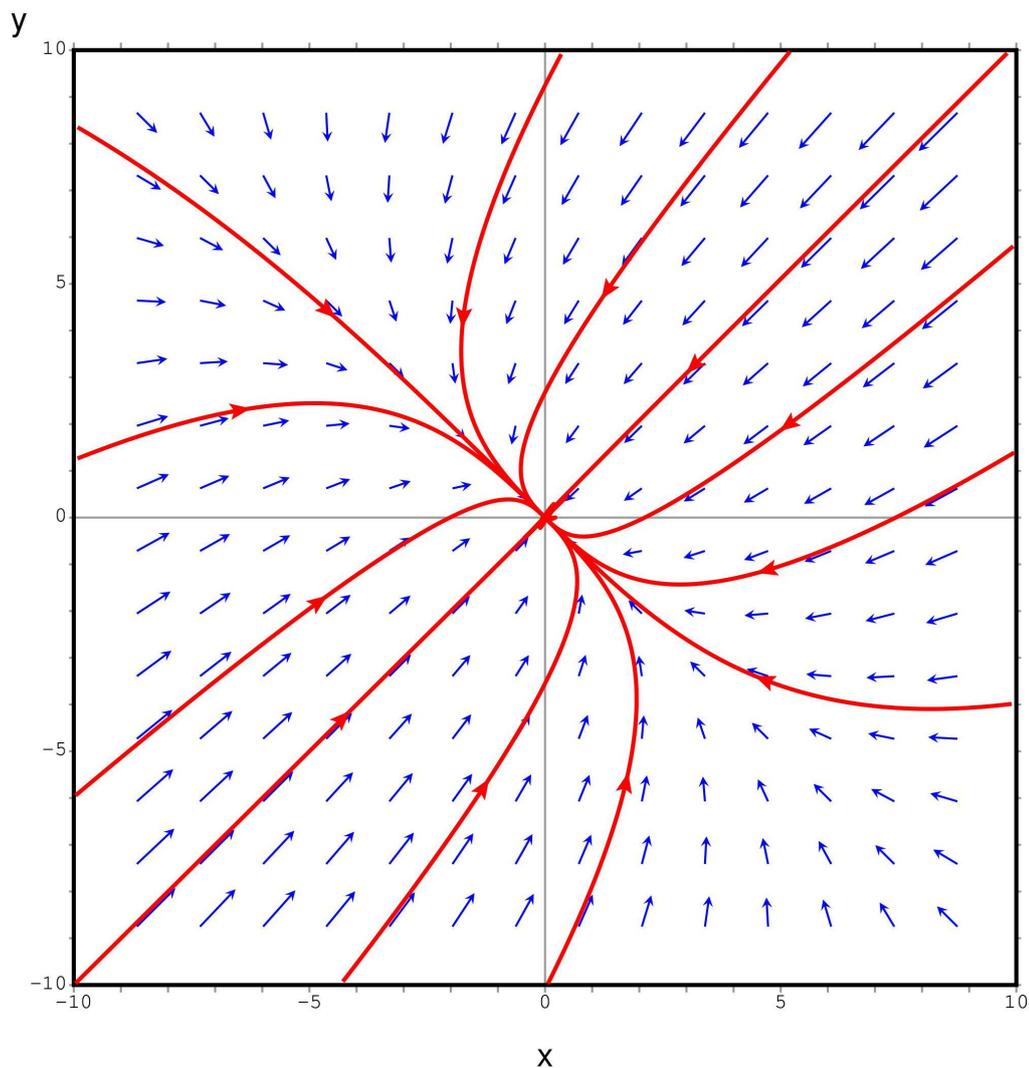


Figura 1 – Plano De Fases

2.2 Modelo de Cournot Discreto para duas Firmas usando Derivadas de ordens Fracionárias

Nesta seção, faremos a derivação do modelo de Cournot para duas firmas usando as derivadas de ordem fracionária. Até onde os autores sabem, esta abordagem não é comumente aplicada ao modelo de Cournot contudo, é possível ver que existe uma bibliografia tratando de tal assunto, veja (XIN; PENG; KWON, 2019). A Seção 2.4, faremos uma comparação entre os modelos com ordem inteira e fracionária, bem no Capítulo 3 daremos uma interpretação econômica das derivadas de ordem fracionária, de forma a deixar claro alguns pontos da abordagem que seguiremos aqui.

2.2.1 Modelo de Cournot Discreto com derivadas de ordem fracionárias.

Nesta subsecção pretendemos resolver o problema de Cournot com o auxílio do cálculo de ordem fracionária introduzido brevemente no Capítulo 1.

Faremos uso da seguinte interpretação (que será amplamente discutida no Capítulo 3, a qual adotaremos a partir de agora:

Interpretação econômica da derivada de ordem fracionária: Seja $0 < \alpha < 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Seja $\Pi_i(q_1, q_2)$ a função lucro da firma i , para $i = 1, 2$. Entenderemos a quantidade

$$\begin{aligned} D_{q_i}^{1-\alpha}(q_i,)\Pi_i &= \frac{(a - c - bq_2)q_1^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} - \frac{bq_1^{1+\alpha}2}{\Gamma(2 + \alpha)} = 0 \\ \implies q_1 &= (1 + \alpha) \frac{(a - c - bq_2)}{2b} \end{aligned}$$

como sendo a reação da firma i com relação a firma j com um peso $(1 + \alpha)$. Em suma, isto pode ser pensado como a memória da firma $i, j = 1, 2$, a qual, pela nature das derivadas fracionarias pode ser percebida como sendo o peso dos valores de Π_i sobre q_i .

Tendo em mente a interpretação acima, no que segue pretendemos encontrar as derivas fracionária $1 - \alpha$ de ordem para as funções 2.2 e 2.3 de cada firma com relação as suas respectivas produções. Faremos isso da seguinte forma.

Lema 2.2.1. Considere o sistema (2.4). Então, os pontos estacionários com relação a derivada de ordem $1 - \alpha$ satisfazem

$$q_1 = (1 + \alpha) \frac{a - bq_2 - c}{2b} \quad (2.16)$$

e

$$q_2 = (1 + \alpha) \frac{a - bq_1 - c}{2b}, \quad (2.17)$$

respectivamente.

Demonstração. Da definição da derivada fracionária e da função $\Pi_1(q_1, q_2)$ em (2.2), temos que

$$D_{q_1}^{1-\alpha}\Pi_1(q_1, q_2) = \frac{d}{dq_1} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{q_1} (q_1 - x)^{\alpha-1} \Pi_1(x, q_2) dx \right] = \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dq_1} \left[\int_0^{q_1} (q_1 - x)^{\alpha-1} (ax - bx^2 - bq_2x - xc) dx \right] \quad (2.19)$$

Da linearidade da derivada fracionaria e de (2.18) temos

$$D_{q_1}^{1-\alpha}\Pi_1(q_1, q_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dq_1} \int_0^{q_1} (q_1 - x)^{-\alpha} (a - bq_2 - c) x dx \quad (2.20)$$

$$- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dq_1} \int_0^{q_1} (q_1 - x)^{-\alpha} bx^2 dx$$

De (1.14) e (2.20) temos

$$D_{q_1}^{1-\alpha}\Pi_i(q_1, q_2) = \frac{d}{dq_1} \left[(a - bq_2 - c) \frac{q_1^{1+\alpha}\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha+2)} \right] - \frac{d}{dq_1} \left[b \frac{q_1^{2+\alpha}\Gamma(3)}{\Gamma(\alpha+3)} \right] \quad (2.21)$$

$$= (a - bq_2 - c) \frac{q_1^\alpha}{(1+\alpha)\Gamma(1+\alpha)} - b \frac{q_1^{1+\alpha} 2}{(2+\alpha)\Gamma(2+\alpha)}$$

Calculando $D_{q_1}^{1-\alpha}\Pi_i(q_1, q_2) = 0$ e isolando q_1 em (2.21) temos

$$q_1 = (1+\alpha) \frac{a - bq_2 - c}{2b\Gamma(1+\alpha)} = (1+\alpha) \frac{a - bq_2 - c}{2b} \quad (2.22)$$

De maneira análoga obtemos

$$q_2 = (1+\alpha) \frac{a - bq_1 - c}{2b}. \quad (2.23)$$

□

Utilizando o Lema 2.2.1, podemos obter a seguinte conclusão.

Teorema 2.2.1. Seja $0 \leq \alpha \leq 1$. Então a produção ótima de cada firma $i = 1, 2$ é dada por

$$q_1 = \frac{2(1+\alpha)(a-c) - (1+\alpha)^2(a-c)}{(4 - (1+\alpha)^2)b},$$

$$q_2 = \frac{2(1+\alpha)(a-c) - (1+\alpha)^2(a-c)}{(4 - (1+\alpha)^2)b} \quad (2.24)$$

Demonstração. Segue do Lema 2.2.1 que a função de reação de cada firma é dada por

$$\begin{cases} q_1 = (1+\alpha) \frac{a-c}{2b} - (1+\alpha) \frac{q_2}{2} \\ q_2 = (1+\alpha) \frac{a-c}{2b} - (1+\alpha) \frac{q_1}{2} \end{cases} \quad (2.25)$$

cuja solução única é exatamente (2.24). □

2.2.2 Modelo de Cournot Fracionário Contínuo

Nesta subsecção repetiremos as ideias apresentadas na subsecção 2.1.2, agora para o sistema de equações 2.25. Tal derivação consiste em somar $-q_i(t + \Delta t)$ para $i = 1, 2$ em 2.25 e tomar o limite quando $\Delta t \rightarrow 0$, o que resulta em

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(t) &= (1 + \alpha) \frac{a - c}{2b} - (1 + \alpha) \frac{q_2(t)}{2} - q_1(t) \\ \dot{q}_2(t) &= (1 + \alpha) \frac{a - c}{2b} - (1 + \alpha) \frac{q_1(t)}{2} - q_2(t)\end{aligned}\quad (2.26)$$

No próximo resultado encontraremos o ponto de equilíbrio para (2.26).

Lema 2.2.2. Seja $0 \leq \alpha < 1$. Os pontos estacionários para o modelo de Cournot fracionário contínuo (2.26) é dado por Por tanto:

$$\begin{aligned}q_1^* &= \frac{2(1+\alpha)(a-c) - (1+\alpha)^2(a-c)}{b(4 - (1+\alpha)^2)} \\ q_2^* &= \frac{2(1+\alpha)(a-c) - (1+\alpha)^2(a-c)}{b(4 - (1+\alpha)^2)}\end{aligned}\quad (2.27)$$

Demonstração. Note que o sistema (2.26) pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{(1+\alpha)}{2} \\ -\frac{(1+\alpha)}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{(1+\alpha)(a-c)}{2b} \\ \frac{(1+\alpha)(a-c)}{2b} \end{bmatrix}\quad (2.28)$$

Da forma matricial (2.28), temos que

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} -1 & -\frac{(1+\alpha)}{2} \\ -\frac{(1+\alpha)}{2} & -1 \end{bmatrix} = \frac{4 - (1 + \alpha)^2}{4}$$

$$\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} -\frac{(1+\alpha)(a-c)}{2b} & -\frac{(1+\alpha)}{2} \\ -\frac{(1+\alpha)(a-c)}{2b} & -1 \end{bmatrix} = \frac{2(1 + \alpha)(a - c) - (1 + \alpha)^2(a - c)}{4b}$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} -1 & -\frac{(1+\alpha)(a-c)}{2b} \\ -\frac{(1+\alpha)}{2} & -\frac{(1+\alpha)(a-c)}{2b} \end{bmatrix} = \frac{2(1 + \alpha)(a - c) - (1 + \alpha)^2(a - c)}{4b}$$

Assim, como os pontos de equilíbrios do sistema (2.26) são tais que $(\dot{q}_1^*(t), \dot{q}_2^*(t)) = (0, 0)$, obtemos que (q_1^*, q_2^*) satisfazem (2.27). \square

2.2.2.1 Análise De Equilíbrio

Assim como feito para o modelo de ordem inteira usaremos esta breve seção para analisar a estabilidade do modelo (2.26)

Teorema 2.2.2. O ponto de equilíbrio $q_1^* = \frac{2(1+\alpha)(a-c)-(1+\alpha)^2(a-c)}{b(4-(1+\alpha)^2)}$, $q_2^* = \frac{2(1+\alpha)(a-c)-(1+\alpha)^2(a-c)}{b(4-(1+\alpha)^2)}$ do sistema (2.26) é um nó assintoticamente estável

Demonstração. Considere a matriz do sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{(1+\alpha)}{2} \\ \frac{(1+\alpha)}{2} & -1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Podemos facilmente verificar que o determinante da matriz acima é $\Delta = \frac{4-(1+\alpha)^2}{4}$. Como $\alpha \in [0, 1)$ temos que Δ será positivo. É igualmente simples verificar que o traço da matriz é $T = -2$ é menor que zero. Portanto

$$T^2 - 4\Delta = 4 - \frac{(4 - (1 + \alpha)^2)^2}{16} <$$

Com isso verificamos que (q_1^*, q_2^*) é um nó assintoticamente estável. \square

2.2.3 Solução para o Modelo de Cournot Contínuo Fracionário

Nesta subsecção mostraremos a existência de uma solução para o modelo de Cournot contínuo fracionário (2.26).

Teorema 2.2.3. Considere o modelo de Cournot contínuo fracionário (2.26). Uma solução geral para (2.26) é dada por

$$\begin{aligned} q_1(t) &= k_1 e^{-\frac{(3+\alpha)}{2}t} + k_2 e^{\frac{(-1+\alpha)}{2}t} + \frac{(\alpha+1)(a-c)}{(\alpha+3)b} \\ q_2(t) &= k_1 e^{-\frac{(3+\alpha)}{2}t} - k_2 e^{\frac{(-1+\alpha)}{2}t} + \frac{(\alpha+1)(a-c)}{(\alpha+3)b} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Demonstração. Considere a matriz abaixo dos coeficientes do sistema (2.26), que é dada por

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{(1+\alpha)}{2} \\ -\frac{(1+\alpha)}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Primeiramente, vamos encontrar os autovalores da matriz acima. Para isso, olharemos para a equação coracterística, que é dada por

$$\det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & -\frac{(1+\alpha)}{2} \\ -\frac{(1+\alpha)}{2} & -1 - \lambda \end{bmatrix} = 1 + 2\lambda + \lambda^2 - \frac{(1+\alpha)^2}{4} = 0$$

Da equação característica temos que os autovalores são $\lambda_1 = \frac{-(3+\alpha)}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{-1+\alpha}{2}$.

Agora precisamos encontrar os autovetores associados a cada uma dos autovalores encontrados:

Para $\lambda_1 = \frac{-(3+\alpha)}{2}$, temos que

$$\begin{cases} \frac{(1+\alpha)}{2}x - \frac{(1+\alpha)}{2}y = 0 \\ -\frac{(1+\alpha)}{2}x + \frac{(1+\alpha)}{2}y = 0 \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

DE forma análoga, para $\lambda_2 = \frac{-1+\alpha}{2}$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} -\frac{(1+\alpha)}{2}a_1 - \frac{(1+\alpha)}{2}a_2 = 0 \\ -\frac{(1+\alpha)}{2}a_1 + \frac{(1+\alpha)}{2}a_2 = 0 \end{cases}$$

o que resulta na solução

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Do Teorema 1.1.2 podemos dizer que a solução do problema homogêneo associado ao modelo de Cournot fracionário contínuo (2.26) é dada por

$$\begin{aligned} q_{1,h}(t) &= k_1 e^{-\frac{(3+\alpha)}{2}t} + k_2 e^{\frac{(-1+\alpha)}{2}t} \\ q_{2,h}(t) &= k_1 e^{-\frac{(3+\alpha)}{2}t} - k_2 e^{\frac{(-1+\alpha)}{2}t}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Para apresentar a solução geral, temos que calcular ainda a solução particular. Portanto considere que a solução particular será dada da seguinte forma

$$Q = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

O que implica em

$$Q' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo para encontrar devemos resolver o sistema abaixo. Repare que o sistema possui um unica solução.

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{(1+\alpha)}{2} \\ -\frac{(1+\alpha)}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{(\alpha)(a-c)}{2b} \\ \frac{(\alpha)(a-c)}{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

E a solução é dada por:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{(\alpha+1)(a-c)}{(\alpha+3)b} \\ p_2 &= \frac{(\alpha+1)(a-c)}{(\alpha+3)b} \end{aligned} \quad (2.32)$$

De (2.31) e (2.32) concluímos que a solução geral do modelo de Cournot fracionário contínuo é dada por

$$\begin{cases} q_1(t) = k_1 e^{-\frac{(3+\alpha)t}{2}} + k_2 e^{\frac{(-1+\alpha)t}{2}} + \frac{(\alpha+1)(a-c)}{(\alpha+3)b} \\ q_2(t) = k_1 e^{-\frac{(3+\alpha)t}{2}} - k_2 e^{\frac{(-1+\alpha)t}{2}} + \frac{\alpha+1(a-c)}{(\alpha+3)b} \end{cases}$$

como anunciado. \square

2.3 Modelos de Cournot Multi-fracionários: Firmas com Derivadas de Diferentes Ordens

Nesta seção a ideia é considerar as firmas 1 e 2 com derivadas fracionárias de ordens diferentes, com o intuito de entender como "memórias" dadas por leis potências desempenham o papel na competição entre firmas. Faremos isso como nas seções anteriores, olhando primeiramente para o caso discreto e depois para o caso contínuo.

2.3.1 Modelo de Cournot Multi-fracionário Discreto

Nesta subseção iremos propor e analisar o problema de Cournot usando as derivadas de ordem fracionária de ordem diferente para cada firma. Desta forma, consideraremos $0 \leq \alpha < 1$ e $0 \leq \beta < 1$. Repetindo as contas apresentadas na Subseção (1.14) com a derivada de ordem α com relação a firma 1 e com ordem β com relação a firma 2, chegamos a conclusão que

$$\begin{cases} q_1 = \frac{(1+\alpha)(a-c)}{2b} - \frac{(1+\alpha)q_2}{2} \\ q_2 = \frac{(1+\beta)(a-c)}{2b} - \frac{(1+\beta)q_1}{2} \end{cases} \quad (2.33)$$

que possui uma solução estacionária dada por

$$q_1^* = -\frac{(1+\alpha)(a-c)(1-\beta)}{((1+\alpha)\beta + (\alpha-3))b}, \quad q_2^* = -\frac{(1+\beta)(a-c)(1-\alpha)}{((1+\alpha)\beta + (\alpha-3))b} \quad (2.34)$$

É interessante notar que a composição de α e β entram de maneira bastante interessante na composição do ponto de equilíbrio.

2.3.2 Modelo de Cournot Multi-fracionário Contínuo

Repetindo as ideias apresentadas nas Seções anteriores para a derivação do modelo contínuo, chegamos em

$$\begin{cases} \dot{q}_1(t) = \frac{(1+\alpha)(a-c)}{2b} - \frac{(1+\alpha)q_2(t)}{2} - q_1(t) \\ \dot{q}_2(t) = \frac{(1+\beta)(a-c)}{2b} - \frac{(1+\beta)q_1(t)}{2} - q_2(t) \end{cases} \quad (2.35)$$

A equação diferencial (2.35) acima pode ser reescrita na forma matricial por

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{(1+\alpha)}{2} \\ -\frac{(1+\beta)}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{(1+\alpha)(a-c)}{2b} \\ \frac{(1+\beta)(a-c)}{2b} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Como feito para os demais casos estudados até aqui, estudaremos também para este caso os pontos de equilíbrio e apresentaremos a solução global do modelo de Cournot Multi-fracionário.

Lema 2.3.1. Sejam $0 \leq \alpha < 1$ e $0 \leq \beta < 1$. Então os pontos estacionários correspondentes ao modelo de Cournot contínuo com multiplas-ordens fracionárias (2.35) é dado por

$$\begin{aligned} q_1^* &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(1+\alpha)(a-c)(1-\beta)}{(4-(1+\alpha)(1+\beta))b} = -\frac{(1+\alpha)(a-c)(1-\beta)}{((1+\alpha)\beta+(\alpha-3))b} \\ q_2^* &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{(1+\beta)(a-c)(1-\alpha)}{(4-(1+\alpha)(1+\beta))b} = -\frac{(1-\alpha)(a-c)(1+\beta)}{((1+\alpha)\beta+(\alpha-3))b} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Demonstração. Seja Δ o determinante das matriz dos coeficientes para o modelo de Cournot contínuo com multiplas-ordens fracionárias (2.35). Então temos

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} -1 & -\frac{(1+\alpha)}{2} \\ -\frac{(1+\beta)}{2} & -1 \end{bmatrix} = \frac{4 - (1 + \alpha)(1 + \beta)}{4}.$$

De forma similar, temos que

$$\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} -\frac{(1+\alpha)(a-c)}{2b} & -\frac{(1+\alpha)}{2} \\ -\frac{(1+\beta)(a-c)}{2b} & -1 \end{bmatrix} = \frac{(1 + \alpha)(a - c)(1 - \beta)}{4b}$$

e

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} -1 & -\frac{(1+\alpha)(a-c)}{2b} \\ -\frac{(1+\beta)}{2} & -\frac{(1+\beta)(a-c)}{2b} \end{bmatrix} = \frac{(1 + \beta)(a - c)(1 - \alpha)}{4b}.$$

Portanto, segue que a solução estacionária do sistema (2.36) é dada por (2.37) como enunciado. \square

2.3.3 Análise De Equilíbrio

Lema 2.3.2. O ponto de equilíbrio (q_1^*, q_2^*) é um nó assintoticamente estável

Demonstração. Considerando a matriz do sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{(1+\alpha)}{2} \\ -\frac{(\beta+1)}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Podemos verificar que $\Delta = \frac{4-(1+\alpha)(1+\beta)}{4}$. Como $\alpha, \beta \in [0, 1)$ temos que $\Delta > 0$. É fácil notar que $T = -2 < 0$. Por fim podemos verificar que

$$T^2 - 4\Delta = 4 - 4 + (\alpha + 1)(\beta + 1) = (\alpha + 1)(\beta + 1) > 0$$

□

O próximo resultado apresentaremos a solução geral para o problema de Cournot contínuo e com derivadas de ordem multi-fracionária.

Teorema 2.3.1. Sejam $0 \leq \alpha, \beta < 1$. Então uma solução geral para o modelo de Cournot contínuo e com derivadas fracionárias múltiplas (2.35) é dada por

$$\begin{aligned} q_1(t) &= k_1 e^{-\frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)+2}}{2}t} + k_2 e^{\frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)-2}}{2}t} + \frac{(\alpha+1)(\beta-1)(c-a)}{((\alpha+1)\beta+(\alpha-3))b} \\ q_2(t) &= k_1 \frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}}{(1+\alpha)} e^{-\frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)+2}}{2}t} - k_2 \frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}}{(1+\alpha)} e^{\frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)-2}}{2}t} + \frac{((\alpha-1)(\beta+1))(c-a)}{((\alpha+1)\beta+(\alpha-3))b}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Demonstração. Primeiramente vamos determinar a solução geral para o problema homogêneo associado. Para tal vamos considerar a forma matricial do modelo, dada por (2.36), cuja matriz do coeficientes é dada por

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{(1+\alpha)}{2b} \\ \frac{(1+\beta)}{2b} & -1 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Portanto, é fácil verificar que o polinômio característico é dado por

$$\det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & -\frac{(1+\alpha)}{2} \\ -\frac{(1+\beta)}{2} & -1 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + \frac{4 - (1+\alpha)(1+\beta)}{4} = 0 \quad (2.40)$$

cujas raízes reais são dadas por $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)+2}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)-2}}{2}$:

Agora iremos encontrar os autovetores associados a cada um dos autovalores.

Para $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)+2}}{2}$ obtemos

$$\begin{cases} \left(\frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}}{2} \right) x - \left(\frac{(1+\alpha)}{2} \right) y = 0 \\ - \left(\frac{(1+\beta)}{2} \right) x + \left(\frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}}{2} \right) y = 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

O que nós leva ao outovetor associado a λ_1 dado por

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}}{(1+\alpha)} \end{bmatrix}$$

Por outro lado, o autovalor $\lambda_2 = \frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}-2}{2}$ possui um auto-espaço associado dado pela solução do sistema

$$\begin{cases} \left(-\frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}}{2}\right)x - \left(\frac{(1+\alpha)}{2}\right)y = 0 \\ \left(-\frac{(1+\beta)}{2}\right)x - \left(-\frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}}{2}\right)y = 0, \end{cases} \quad (2.42)$$

o que resulta em

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}}{(1+\alpha)} \end{bmatrix}$$

Por fim, ainda resta resolver o problema particular. Tome

$$Q = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

O que nós leva a :

$$Q' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lopo para encontrar os valores de p_1 e p_2 precisamos encontrar a solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} -p_1 - \frac{(1+\alpha)}{2}p_2 = -(\alpha+1)\frac{a-c}{2b} \\ -\frac{(1+\beta)}{2}p_1 - p_2 = -(\beta+1)\frac{a-c}{2b} \end{cases} \quad (2.43)$$

A solução será

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{((\alpha+1)(\beta-1)(a-c))}{((\alpha+1)\beta+(\alpha-3))b} \\ p_2 &= \frac{((\alpha-1)(\beta+1)(a-c))}{((\alpha+1)\beta+(\alpha-3))b} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Juntando tudo obtemos que a solução geral é dada pela equação (2.38). \square

2.4 Comparação entre as Distintas Estratégias de Cournot

Até agora, tudo que fizemos foi resolver o problema de Cournot usando derivadas de diferentes ordens. Nessa seção, pretendemos investigar o efeito que as derivadas de ordem não inteira no lucro de cada firma. Para realizar tal análise iremos considerar (2.38) como o caso geral a ser analisado, haja visto que as demais soluções obtidas acima são casos especiais de (2.38) para distintos valores de $\alpha, \beta \in [0, 1[$.

Nossa análise se baseia em observar o que acontece entre a diferença das funções lucro das firmas 1 e 2, respectivamente. Para tanto, considere a função diferença de lucro

$$\Pi(t) = \Pi_2(t) - \Pi_1(t) \quad (2.45)$$

Onde $\pi_1(t)$ e $\pi_2(t)$ são as funções de lucro da firma 1 e 2, respectivamente.

Como demonstrado nas Seções 2.2 - 2.3, a equação de produção das firmas pode ser escrita, de forma geral, da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = k_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + k_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

onde $\{v_i, w_i, p_i, \lambda_i\}$ para $i = 1, 2$, dependem de (a, b, c) e das ordens $\alpha, \beta \in [0, 1]$, respectivamente.

Da definição de $\Pi_1(t)$ e $\Pi_2(t)$ e da forma geral para as quantidades de q_1 e q_2 dadas acima, temos que Π pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= \left[(a - c) - b \left(k_1 e^{\lambda_1 t} (v_1 + v_2) + k_2 e^{\lambda_2 t} (w_1 + w_2) + p_1 + p_2 \right) \right] \\ &= \left[k_1 e^{\lambda_1 t} (v_2 - v_1) + k_2 e^{\lambda_2 t} (w_2 - w_1) + (p_2 - p_1) \right]. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Rearranjando os termos, podemos escrever da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= k_1 \left[(a - c) e^{\lambda_1 t} (v_2 - v_1) - b (p_1 + p_2) e^{\lambda_1 t} (v_2 - v_1) - b (v_1 + v_2) e^{\lambda_1 t} (p_2 - p_1) \right] \\ &\quad + k_1^2 \left[-b (v_1 + v_2) e^{2\lambda_1 t} (v_2 - v_1) \right] \\ &\quad + k_1 k_2 \left[-b (w_1 + w_2) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} (v_2 - v_1) - b (v_1 + v_2) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} (w_2 - w_1) \right] \\ &\quad + k_2 \left[(a - c) e^{\lambda_2 t} (w_2 - w_1) - b (p_1 + p_2) e^{\lambda_2 t} (w_2 - w_1) - b (w_1 + w_2) e^{\lambda_2 t} (p_2 - p_1) \right] \\ &\quad + k_2^2 \left[-b (w_1 + w_2) e^{2\lambda_2 t} (w_2 - w_1) \right] (a - c) [p_2 - p_1] - b [p_1 + p_2] (p_2 - p_1) \end{aligned}$$

Agrupando as constantes, podemos reescrever

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= k_1 \left[e^{\lambda_1 t} \overbrace{\left((a - c)(v_2 - v_1) - b(p_1 + p_2)(v_2 - v_1) - b(v_1 + v_2)(p_2 - p_1) \right)}^{c_1} \right] \\ &\quad + k_1^2 \left[e^{2\lambda_1 t} \overbrace{\left(-b(w_1 + w_2)(v_2 - v_1) \right)}^{c_2} \right] \\ &\quad + k_1 k_2 \left[e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \overbrace{\left(-b(w_1 + w_2)(v_2 - v_1) - b(v_1 + v_2)(w_2 - w_1) \right)}^{c_3} \right] \\ &\quad + k_2 \left[e^{\lambda_2 t} \overbrace{\left((a - c)(w_2 - w_1) - b(p_1 + p_2)(w_2 - w_1) - b(w_1 + w_2)(p_2 - p_1) \right)}^{c_4} \right] \\ &\quad + k_2^2 \left[e^{2\lambda_2 t} \overbrace{\left(-b(w_1 + w_2)(w_2 - w_1) \right)}^{c_5} \right] \\ &\quad + \overbrace{\left((a - c)(p_2 - p_1) - b(p_1 + p_2)(p_2 - p_1) \right)}^{c_6} \end{aligned}$$

Podemos escrever a equação acima como

$$\Pi(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} c_1 + k_1^2 e^{2\lambda_1 t} c_2 + k_1 k_2 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} c_3 + k_2 e^{\lambda_2 t} c_4 + k_2^2 e^{2\lambda_2 t} c_5 + c_6 \quad (2.48)$$

Munidos da equação (2.48) e da solução do sistema multi fracionário (2.38) estamos preparados para verificar quando as derivadas fracionarias oferecem vantagens para a firma. Isto posto, não faremos uma análise pontual, mas uma análise média, que consiste em analisar a integral de Π em um intervalo de tempo. Isto é, olharemos para a quantidade

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} \Pi(t) dt &= \int_0^{t_0} k_1 e^{\lambda_1 t} c_1 + k_1^2 e^{2\lambda_1 t} c_2 + k_1 k_2 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} c_3 + k_2 e^{\lambda_2 t} c_4 + k_2^2 e^{2\lambda_2 t} c_5 + c_6 dt \\ &= k_1 \frac{1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} c_1 \Big|_0^{t_0} + k_1^2 \frac{1}{2\lambda_1} e^{2\lambda_1 t} c_2 \Big|_0^{t_0} + k_1 k_2 \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} c_3 \Big|_0^{t_0} + k_2 \frac{1}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t} c_4 \Big|_0^{t_0} \\ &\quad + k_2^2 \frac{1}{\lambda_2} e^{2\lambda_2 t} c_5 \Big|_0^{t_0} + t c_6 \Big|_0^{t_0} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Nosso próximo passo é mostrar que em uma estratégia de longo prazo, a firma com maior poder de memória possui uma estratégia vencedora.

Teorema 2.4.1. Sejam $\Pi_i(t)$, para $i = 1, 2$ a função de preço das firmas 1 e 2, respectivamente. Considere ainda os parâmetros $\{v_i, w_i, p_i, \lambda_i\}_{i=1,2}$ na equação (2.49), dados por (2.38), com $\alpha, \beta \in [0, 1[$. Suponha ainda que $b \geq 2/3$. Em uma estratégia de longo prazo (t_0 suficientemente grande), enquanto $\beta < \alpha$, a estratégia da firma 2 é a vencedora. Caso contrário, a estratégia da firma 1 é vencedora.

Demonstração. De (2.38), temos que $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)+2}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)-2}}{2}$ são ambos menores que zero. Portanto $e^{\lambda_i t_0} \rightarrow 1$ quando $t_0 \rightarrow \infty$.

Assim, segue que, quando $t_0 \rightarrow \infty$ em (2.49) temos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Pi(t) dt &= -k_1 \frac{2}{-\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)+2}} c_1 - k_1^2 \frac{1}{-\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)+2}} c_2 - k_1 k_2 \frac{1}{-2} c_3 \\ &\quad - k_2 \frac{1}{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)-2}} c_4 - k_2^2 \frac{1}{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)-2}} c_5 + \lim_{t_0 \rightarrow \infty} t_0 c_6. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Note que a conclusão do teorema passa pela análise do sinal da equação (2.50). Para tal, note que tal sinal será dado por $\lim_{t_0 \rightarrow \infty} t_0 c_6$, haja visto que o restante dos termos da equação contribuem somente com parcelas finitas para o resultado. Portanto nos resta analisar o sinal de c_6 .

Segue da equação (2.38) que

$$\begin{aligned}
c_6 &= (a - c) \left[\frac{(\alpha - 1)(\beta + 1)(a - c)}{((1 + \alpha)\beta + (\alpha - 3))b} - \frac{(\alpha + 1)(\beta - 1)(a - c)}{((1 + \alpha)\beta + (\alpha - 3))b} \right] \\
&\quad - b \left[\frac{(\alpha + 1)(\beta - 1)(a - c)}{((1 + \alpha)\beta + (\alpha - 3))b} + \frac{(\alpha - 1)(\beta + 1)(a - c)}{((1 + \alpha)\beta + (\alpha - 3))b} \right] \\
&\quad \cdot \left[\frac{(\alpha - 1)(\beta + 1)(a - c)}{((1 + \alpha)\beta + (\alpha - 3))b} - \frac{(\alpha + 1)(\beta - 1)(a - c)}{((1 + \alpha)\beta + (\alpha - 3))b} \right] \\
&= (a - c)^2 \left[\frac{2\alpha - 2\beta}{((1 + \alpha)\beta + (\alpha - 3))b} \right] \\
&\quad - b \left[\frac{(a - c)(2\beta\alpha - 2)}{((1 + \alpha)\beta + (\alpha - 3))b} \right] \left[\frac{(a - c)2(\alpha - \beta)}{((1 + \alpha)\beta + (\alpha - 3))b} \right] \\
&= \frac{(a - c)^2}{b} \left[\frac{2\alpha - 2\beta}{(1 + \alpha)\beta + (\alpha - 3)} \right] - \frac{(a - c)^2}{b} \left[\frac{4(\beta\alpha - 1)(\alpha - \beta)}{((1 + \alpha)\beta + (\alpha - 3))^2} \right] \\
&= \frac{2(a - c)^2}{b} \left[\frac{(\alpha - \beta)((\alpha + 1)\beta + (\alpha - 3)) - 2(\beta\alpha - 1)}{((\alpha + 1)\beta + (\alpha - 3))^2} \right].
\end{aligned}$$

Reagrupando os termos, temos que

$$c_6 = \frac{\overbrace{2(a - c)^2}^{>0}}{b} (\alpha - \beta) \left[\frac{\overbrace{((\beta - 1)(1 - \alpha))}^{<0}}{((\alpha + 1)\beta + (\alpha - 3))^2} \right] \quad (2.51)$$

Segue da limitação da escolha de $\alpha, \beta \in [0, 1[$ que o sinal de $\Pi(t)$ é dado por:

$$\beta - \alpha. \quad (2.52)$$

Portanto, segue que, sob as hipóteses do problema de Cournot, a firma que solucionar o problemas de Cournot derivando $n - \alpha$ vezes, terá vantagens sobre a firma que solucionar o problema de Cournot com derivadas de ordem $n - \beta$, quando o tempo vai para infinito sempre que $\alpha > \beta$. \square

Uma consequência muito interessante do Teorema 2.4.1 é o seguinte corolário.

Corolário 2.4.1. Considere as mesmas hipóteses do Teorema 2.4.1. Independente da condição inicial de cada firma competindo, a que utilizar mais memória terá uma estratégia vencedora a longo prazo.

Demonstração. De fato, as condições iniciais de cada firma estão relacionadas com as constantes k_1 e k_2 em (2.49). Agora, temos do Teorema 2.4.1 que para uma estratégia de longo prazo o resultado só depende da ordem das derivadas e independem de k_1 e k_2 . \square

2.4.0.1 Discutindo os Resultados

O resultado apresentado pelo Teorema 2.4.1 nos mostra que a ordem da derivada $\theta = \alpha$ ou β , com $0 < 1 - \theta < 1$ escolhida pela firma pode oferecer vantagens para a mesma em uma estratégia de longo prazo. Contudo, essa vantagem não é ilimitada, visto que a natureza do problema de Cournot analisado não permite que o lucro cresça indefinidamente.

Considere a solução geral do problema dada por (2.46). Vamos analisar cada uma das firmas 1 e 2 em separado.

Para a firma 1, temos que a função preço é dada por

$$\begin{aligned}
\Pi_1(t) &= \left(a - c - b \left(k_1 e^{\lambda_1 t} (v_1 + v_2) + k_2 e^{\lambda_2 t} (w_1 + w_2) + p_1 + p_2 \right) \right) \left(k_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + k_2 e^{\lambda_2 t} w_1 p_1 \right) \\
&= k_1 e^{\lambda_1 t} [(a - c)v_1 - b(p_1 + p_2) - b p_1 (v_1 + v_2)] + k_1^2 e^{2\lambda_1 t} [-b(w_1 + w_2)(v_1)] \\
&\quad + k_1 k_2 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} [-b(w_1 + w_2)v_1 - b(w_1 + w_2)w_1] \\
&\quad + k_2 e^{\lambda_2 t} [(a - c)w_1 - b(p_1 + p_2)w_1 - b(w_1 + w_2)p_1] \\
&\quad + k_2^2 e^{2\lambda_2 t} [-b(w_1 + w_2)w_1] + (a - c)p_1 - b(p_1 + p_2)p_1
\end{aligned} \tag{2.53}$$

e para a firma 2, temos

$$\begin{aligned}
\Pi_2(t) &= \left(a - c - b \left(k_1 e^{\lambda_1 t} (v_1 + v_2) + k_2 e^{\lambda_2 t} (w_1 + w_2) + p_1 + p_2 \right) \right) \left(k_1 e^{\lambda_1 t} v_2 + k_2 e^{\lambda_2 t} w_2 p_2 \right) \\
&= k_1 e^{\lambda_1 t} [(a - c)v_2 - b(p_1 + p_2) - b p_2 (v_1 + v_2)] + k_1^2 e^{2\lambda_1 t} [-b(w_1 + w_2)(v_2)] \\
&\quad + k_1 k_2 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} [-b(w_1 + w_2)v_2 - b(w_1 + w_2)w_2] \\
&\quad + k_2 e^{\lambda_2 t} [(a - c)w_2 - b(p_1 + p_2)w_2 - b(w_1 + w_2)p_1] \\
&\quad + k_2^2 e^{2\lambda_2 t} [-b(w_1 + w_2)w_2] + (a - c)p_2 - b(p_1 + p_2)p_2
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Repare que como λ_1 e λ_2 dados por (2.38) são menores que zero. Portanto, o lucro das firmas 1 e 2 convergem, quando $t \rightarrow \infty$, respectivamente, para

$$E_1 = (a - c)p_1 - b(p_1 + p_2)p_1 \tag{2.55}$$

e

$$E_2 = (a - c)p_2 - b(p_1 + p_2)p_2. \tag{2.56}$$

Vamos expandir cada uma dessas expressões tomando p_1 e p_2 dados por (2.38). Nosso objetivo é analisar o comportamento do lucro de cada firma (nessa estratégia de longo prazo) com relação a variação de α e β .

De (2.55) e (2.38) temos que

$$\begin{aligned}
 E_1 &= (a - c) \frac{(\alpha + 1)(\beta - 1)(a - c)}{((\alpha + 1)\beta + (\alpha - 3))b} - b \left(\frac{(a - c)(2\alpha\beta - 2)}{((\alpha + 1)\beta + (\alpha - 3))b} \right) \frac{(\alpha + 1)(\beta - 1)(a - c)}{((\alpha + 1)\beta + (\alpha - 3))b} \\
 &= \frac{(\alpha + 1)(\beta - 1)(a - c)^2}{b} \frac{((\beta - 1)(1 - \alpha))}{((\alpha + 1)\beta + (\alpha - 3))^2} \\
 &= (1 - \alpha^2)(\beta - 1)^2 \frac{(a - c)^2}{b((\alpha + 1)\beta + (\alpha - 3))^2}.
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Repare que mostramos anteriormente que sempre que tivermos $\alpha > \beta$ o lucro da firma 1 será maior que lucro da firma 2 e vice versa. Contudo não comparamos o lucro de da firma 1 com ela mesma para diferentes α 's. A seguir faremos uma comparação entre o lucro da firma 1 quando a mesma resolve o problema de Cournot com $\alpha = 0$ e $\alpha \neq 0$.

Para tal, vamos considerar que a firma 2 encontrou sua produção ótima usando a derivada de ordem primeira, isto é $\beta = 0$.

Denotando por E_1^0 e E_1^α as funções lucro das firma 1 para $\alpha = 1$ e $\alpha \neq 0$, respectivamente, numa estratégia de longo prazo (i.e. $t \rightarrow \infty$) temos que a diferença entre as funções lucro satisfazem

$$\begin{aligned}
 E_1^0 - E_1^\alpha &= \frac{(a - c)^2}{b(-3)^2} - (1 - \alpha^2) \frac{(a - c)^2}{b(\alpha - 3)^2} \\
 &= \frac{(a - c)^2}{b} \left[\frac{(\alpha - 3)^2 - 9(1 - \alpha^2)}{9(\alpha - 3)^2} \right] \frac{(a - c)^2}{b} \left[\frac{\alpha(10\alpha - 6)}{9(\alpha - 3)^2} \right].
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Repare que o sinal da equação acima é negativo quando $\alpha \in (0, \frac{1}{3})$. Logo se considerarmos que $\beta = 0$ e t tendendo ao infinito a firma 1 pode aumentar seu próprio lucro resolvendo o problema de Cournot com a derivada de ordem $1 - \alpha_0$, onde $\alpha_0 \in (0, \frac{1}{3})$.

Para exemplificar o que acabamos de demonstrar vamos plotar os gráficos do lucro em função do tempo da firma 1 obtidos com: $\beta = \alpha = 0$ e $\beta = 0, \alpha = 0.3$. Contudo para que fosse possível plotar os gráficos foi necessário fazer algumas simplificações tomando $a = 5, b = 1, c = 1$ e $k_1 = k_2 = 1$.

De forma análoga, de (2.56) e (2.38) obtemos que

$$\begin{aligned}
 E_2 &= (a - c) \frac{(\alpha - 1)(\beta + 1)(a - c)}{((\alpha + 1)\beta + (\alpha - 3))b} - b \left(\frac{(a - c)(2\alpha\beta - 2)}{((\alpha + 1)\beta + (\alpha - 3))b} \right) \frac{(\alpha - 1)(\beta + 1)(a - c)}{((\alpha + 1)\beta + (\alpha - 3))b} \\
 &= \frac{(\alpha - 1)(\beta + 1)(a - c)^2}{b} \frac{((\beta - 1)(1 - \alpha))}{((\alpha + 1)\beta + (\alpha - 3))^2} \\
 &= (1 - \beta^2)(\alpha - 1)^2 \frac{(a - c)^2}{b((\alpha + 1)\beta + (\alpha - 3))^2}.
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Realizando o mesmo raciocínio feito para firma 1 agora para a firma 2, supondo

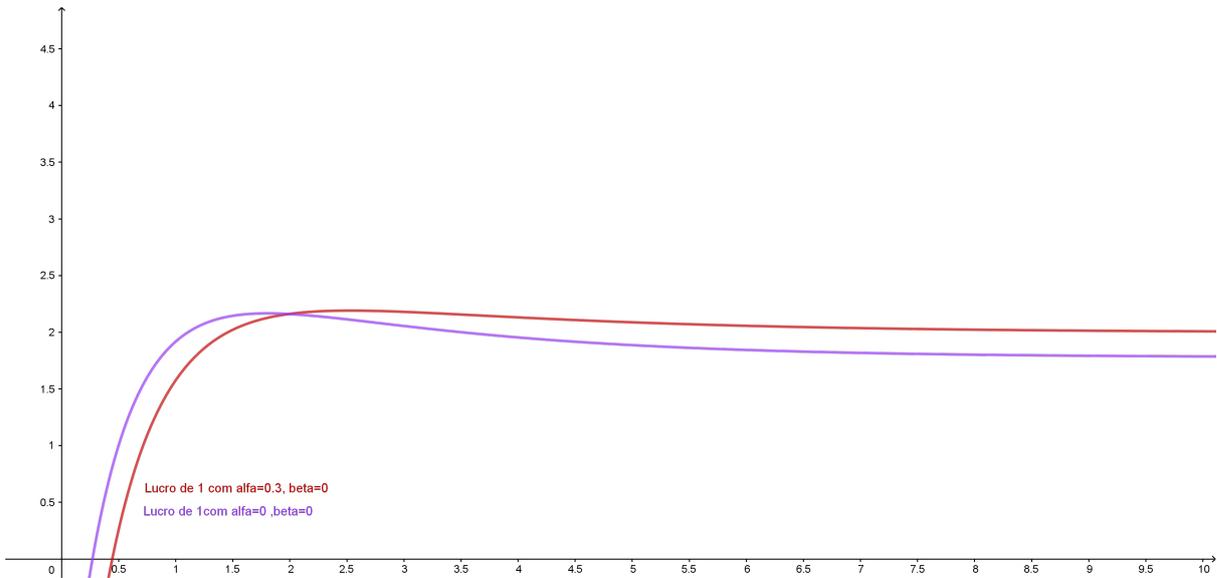


Figura 2 – Lucro Da Firma 1

que a firma 1 adotou a estratégia de escolher $\alpha = 0$, obtemos que

$$\begin{aligned}
 E_2^0 - E_2^\beta &= \frac{(a-c)^2}{b(-3)^2} - (1-\beta^2) \frac{(a-c)^2}{b(\beta-3)^2} \\
 &= \frac{(a-c)^2}{b} \left[\frac{(\beta-3)^2 - 9(1-\beta^2)}{9(\beta-3)^2} \right] = \frac{(a-c)^2}{b} \left[\frac{\beta(10\beta-6)}{b(\beta-3)^2} \right].
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

onde, E_2^0 e E_2^β representam, respectivamente, o lucro da firma 2, com o tempo tendendo ao infinito, quando o problema de Cournot é solucionado com a derivada de ordem 1 e $1-\beta$.

Repare que o sinal da equação (2.60) será negativa quando $\beta \in (0, \frac{1}{3})$. Portanto quando $\alpha = 0$ e t tende ao infinito a firma 2 pode aumentar seu lucro resolvendo o problema de Cournot usando a derivada de ordem $1-\beta_0$ onde $\beta \in (0, \frac{1}{3})$

Como feito para firma 1, a figura 3 apresenta a diferença de lucro da firma 2 para as escolhas de $\beta = 0$ e $\beta = 0.3$, supondo que $\alpha = 0$. As simplificações serão iguais as feitas no caso anterior ou seja, vamos considerar o caso especial em que $a = 5$, $b = 1$, $c = 1$ e $k_1 = k_2 = 1$.

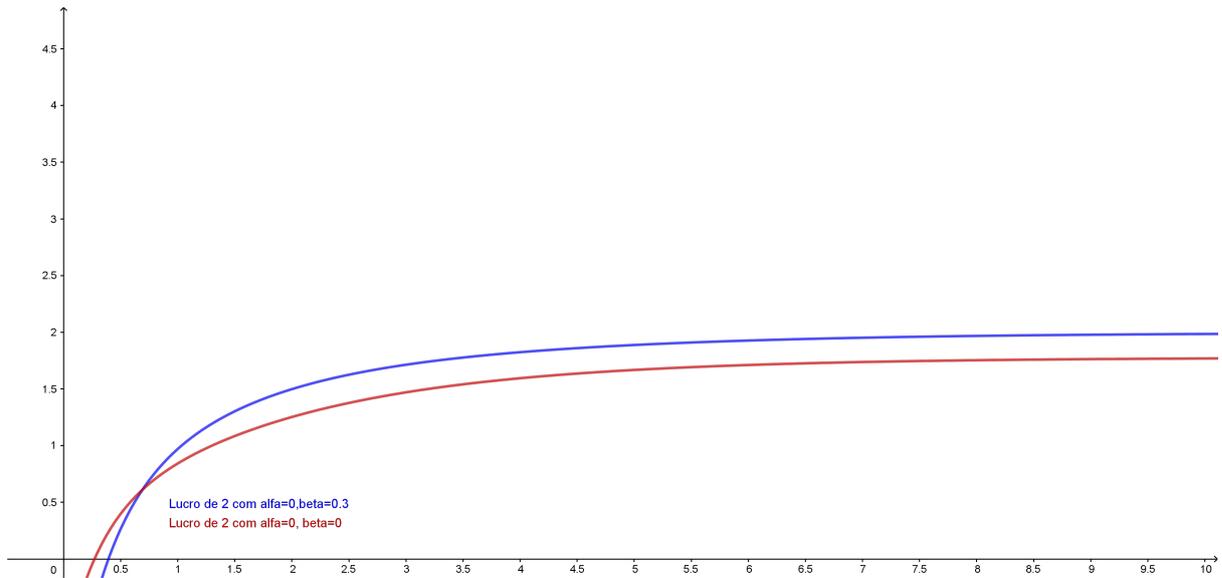


Figura 3 – Lucro Da Firma 2

2.4.1 Teoria dos Jogos: Jogando com a Ordem da Derivada

Nesta breve seção iremos introduzir um jogo onde, os jogadores são as firmas que estamos estudando. Neste jogo, tais firmas podem e devem decidir qual a ordem da derivada que iram escolher na resolução do problema de Cournot contínuo. Para simplificar iremos chamar este jogo de *jogo da ordem da derivada*. Por simplicidade de notação faremos a seguinte mudança de variável

$$r_{\alpha}^0 = \frac{(1 - \alpha^2)}{(\alpha - 3)^2}$$

$$r_{\alpha}^{\beta} = \frac{(1 - \alpha^2)(\beta - 1)^2}{((\alpha + 1)\beta + (\alpha - 3))^2}$$

$$r_0^{\beta} = \frac{(\beta - 1)^2}{(\beta - 3)^2} \quad (2.61)$$

$$r_0^0 = \frac{1}{9} \quad (2.62)$$

$$s_{\beta}^0 = \frac{(1 - \beta^2)}{((\beta - 3))^2}$$

$$s_{\beta}^{\alpha} = \frac{(1 - \beta^2)(\alpha - 1)^2}{((\alpha + 1)\beta + (\alpha - 3))^2}$$

$$s_0^{\alpha} = \frac{(\alpha - 1)^2}{(\alpha - 3)^2}$$

$$s_0^0 = \frac{1}{9} \quad (2.63)$$

Repare que:

$$r_0^{\beta} - r_{\alpha}^{\beta} = (\beta - 1)^2 \left[\frac{((\alpha + 1)\beta + (\alpha + 3))^2 - (1 - \alpha^2)(\beta - 3)^2}{(\beta - 3)^2((\alpha + 1)\beta + (\alpha + 3))^2} \right]$$

$$= (\beta - 1)^2 \left[\frac{\alpha\beta(2\alpha\beta + 2\beta - 4\alpha - 4) + \alpha(10\alpha - 6)}{(\beta - 3)^2((\alpha + 1)\beta + (\alpha + 3))^2} \right]$$

Agora observe que, quando $\alpha\beta(2\alpha\beta + 2\beta - 4\alpha - 4) < 0$ para todo α e β pertencente ao intervalo $(0, 1)$ e que $\alpha(10\alpha - 6) < 0$ para todo α pertencente ao intervalo $(1, 3/5)$.

Logo

$$r_0^\beta - r_\alpha^\beta < 0, \quad \alpha \in (0, 1/3). \quad (2.64)$$

De forma análoga podemos realizar o raciocínio feito anteriormente para $s_0^\alpha - s_\beta^\alpha$, do qual concluímos que

$$\begin{aligned} s_0^\alpha - s_\beta^\alpha &= (\alpha + 1)^2 \left[\frac{((\alpha + 1)\beta + (\alpha + 3))^2 - (1 - \beta^2)(\alpha - 3)^2}{(\alpha - 3)^2((\alpha + 1)\beta + (\alpha + 3))^2} \right] \\ &= (\alpha + 1)^2 \left[\frac{\alpha\beta(2\alpha\beta + 2\alpha - 4\beta - 4) + \beta(10\beta - 6)}{(\alpha - 3)^2((\alpha + 1)\beta + (\alpha + 3))^2} \right]. \end{aligned}$$

Portanto, $2\alpha\beta + 2\alpha - 4\beta - 4 < 0$ para todo α e β pertencentes a $(0, 1)$ e $\beta(10\beta - 6) < 0$ para todo β pertencente a $(0, 3/5)$.

Logo

$$r_0^\alpha - r_\beta^\alpha < 0, \quad \beta \in (0, 1/3). \quad (2.65)$$

Agora iremos introduzir algumas definições a respeito da teoria dos jogos, que podem ser encontradas em (VARIAN, 2006) e referências.

Definição 2.4.1 (Estratégia Dominante). Dizemos que uma estratégia é dominante para o jogador 1 quando é a melhor estratégia, não importando o que o jogador 2 faça .

O próximo resultado conhecido como *Equilíbrio De Nash*, em honra ao famoso trabalho de Jhon Nash.

Definição 2.4.2 (Equilíbrio De Nash). Dizemos que um par de estratégias constitui um *Equilíbrio De Nash* se a escolha do jogador 1 for ótima, dada a escolha do jogador 2, e a escolha do jogador 2 for ótima, em relação ao jogador 1.

A Tabela 2.4.1 abaixo reflete os jogos das firmas 1 e 2 respectivamente.

Agora vamos explorar as diferentes estratégias para cada firma, dadas pela Tabela 2.4.1 acima.

Jogo da firma 1:

Se a firma 2 jogar $\beta = 0$ a firma 1 joga $\alpha \in (0, 3/5)$, pois, neste caso, de (2.61) obtemos

$$r_\alpha^0 > 1.$$

Tabela 1 – Jogo da ordem da derivada

		Firma 1	
		$\alpha = 0$	$\alpha \in (0, 3/5)$
Firma 2	$\beta = 0$	$\left(\frac{(a-c)^2}{b} r_0^0, \frac{(a-c)^2}{b} s_0^0 \right)$	$\left(\frac{(a-c)^2}{b} r_\alpha^0, \frac{(a-c)^2}{b} s_0^\alpha \right)$
	$\beta \in (0, 3/5)$	$\left(\frac{(a-c)^2}{b} r_0^\beta, \frac{(a-c)^2}{b} s_\beta^0 \right)$	$\left(\frac{(a-c)^2}{b} r_\alpha^\beta, \frac{(a-c)^2}{b} s_\beta^\alpha \right)$

Se a firma 2 jogar $\beta \in (0, 1/3)$ a firma 1 joga $\alpha \in (0, 3/5)$, pois como visto anteriormente em (2.64), temos

$$r_\alpha^\beta > r_0^\beta.$$

Logo para firma 1 escolher α pertencente ao intervalo $(0, 1/3)$ é estratégia dominante, em acordo com a Definição 2.4.1.

Jogo da firma 2: As estratégias da firma 2 devem ser as seguintes:

Se a firma 1 joga $\alpha = 0$ a firma 2 joga $\beta \in (0, 3/5)$, pois neste caso, de (2.61) temos

$$1 - s_\beta^0 < 0$$

Se a firma 1 joga $\alpha \in (1, 1/3)$ a firma 2 deve jogar $\beta \in (0, 3/5)$, haja visto que, de (2.65) temos que

$$s_0^\alpha - s_\beta^\alpha < 0,$$

e assim, jogando $\beta \in (0, 3/5)$ a firma 2 esta utilizando uma estratégia dominante, de acordo com a Definição 2.4.1.

Por fim podemos concluir que o *jogo da ordem da derivada* possui um equilíbrio de Nash como enunciado na Definição (2.4.2), quando as firmas escolhem, simultaneamente, $\alpha, \beta \in (0, 3/5)$.

3 Uma Interpretação em Economia para as Derivadas de Ordem Fracionárias

Nos Capítulos anteriores, o significado das derivadas fracionárias em termos econômico não foi do nosso principal objeto de estudos. Em particular, no Capítulo 2, tais derivadas foram usadas para obter distintos modelos de Cournot, para os quais não demos uma devida explicação econômica e os resultados decorrentes foram baseados em fatos advindos da teoria de sistemas dinâmicos.

No entanto, a generalização para derivadas de ordem fracionária de indicadores econômicos ligados a produção e a função lucro foram de substancial importância para a determinação dos resultados obtidos.

A partir deste ângulo, neste Capítulo, faremos uma breve análise com respeito aos indicadores econômicos utilizando derivadas e integrais fracionárias. É importante salientar que tal abordagem não é totalmente nova e já foi explorada em outros contextos em (TARASOVA; TARASOV, 2017) e referências.

Em suma, neste Capítulo apresentaremos um estudo mais detalhado sobre o cálculo fracionário aplicado as função lucro. Para tal, assumiremos que a função lucro tem a forma genérica dada por

$$\Pi(Q) = P(Q)Q - C(Q)Q. \quad (3.1)$$

onde $P(\cdot)$ é a função preço, $C(\cdot)$ é a função custo e a variável independente Q representa as quantidades envolvidas.

Economicamente falando, a derivada ordinária de primeira ordem de $\Pi(\cdot)$ em (3.1) com relação a Q

$$\frac{d\Pi(Q)}{dQ} = LMG \quad (3.2)$$

dá origem ao lucro marginal, aqui denotado por LMG . Este por sua vez significa a sensibilidade de $\Pi(\cdot)$ com relação a variação de Q .

Considere ainda o lucro médio, definido da seguinte maneira

$$\frac{\Pi(Q)}{Q} = M\Pi(Q). \quad (3.3)$$

Assumindo que a produção Q é uma função do tempo ($Q(t)$), e assim, de maneira implícita, a função lucro Π também o é, podemos deduzir que o lucro marginal será dado

por

$$LMG(\Pi(t)) = \frac{d\Pi}{dQ} = \frac{\frac{d\Pi(t)}{dt}}{\frac{dQ(t)}{dt}}, \quad (3.4)$$

como considerado na Subseção (2.1.2) do Capítulo 2.

Agora, repare que, para cada tempo t_0 o lucro marginal construindo da forma (3.4) mede a sensibilidade apenas pontualmente. Isto é $LMG(\Pi(t))$ nós mostra o quanto o lucro varia com a variação de $Q(t)$, porém apenas em numa vizinhança de ponto t_0 .

A tradução da observação acima para uma estratégia de competição, como no modelo de Cournot, significa que as firmas envolvidas possuem completa amnésia, ou seja, que nenhuma informação de uma firma para a outra ou informações de competições passadas estão sendo consideradas. Isso não vai de encontro as teorias econômicas mais modernas (DIXON, 2001).

Neste caso, acreditamos que seja mais razoável crer que a competição entre firmas seja dada a partir de um prévio conhecimento, mesmo que parcial, entre as concorrentes. Em particular, tal conhecimento parcial vem de encontro com a teoria econômica moderna defendida em (DIXON, 2001) e referências.

Nossa hipótese é que as firmas competidoras guardam uma informação parcial (veja (DIXON, 2001) e referências para modelos que relacionados), dada por uma lei de potências da forma $(t_0 - z)^{\alpha-1}$, para $\alpha \in [0, 1[$, onde t_0 é o tempo presente. A forma da lei de potências propostas indica que as firmas competem guardando informações que são proporcionalmente mais relevantes, a medida que chegamos ao tempo presente. A este fenômeno chamamos de "memória". Portanto, é razoável pensar que os indicadores econômicos que mensuram as variabilidades envolvidas levem em consideração tal "memória". Em particular, o lucro marginal que mede a sensibilidade do lucro com relação produção no modelo de Cournot, deve satisfazer tal requisito. Em outras palavras, o lucro marginal em um determinado tempo t_0 deve depender de $Q(t)$, para $t \in [0, t_0]$, onde 0 representa o ponto inicial das competições.

Neste contexto, as derivadas de ordem fracionarias formam um conjunto de ferramentas muito úteis, visto que elas são definidas em um intervalo $(0, t_0)$ e levam em consideração uma média ponderada da lei de potências $(t_0 - z)^{1-\alpha}$.

Com tudo isto posto, é razoável considerar como indicador econômico o seguinte lucro marginal (fracionário)

$$LMG\Pi(t) = \frac{D_t^{1-\alpha}\Pi(t)}{D_t^{1-\alpha}Q(t)}, \quad (3.5)$$

em que

$$D_t^{1-\alpha}\Pi(t) = \frac{1}{\Gamma\alpha} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1}\Pi(x)dx \quad (3.6)$$

é a derivada de ordem $1 - \alpha$ segundo Riemman-Lioville, da função lucro, como uma maneira mais fidedigna de sugerir a modelagem dinâmica da competição entre firmas.

Por fim, é importante salientar que tal ideia não é completamente nova e já foi explorada em (TARASOVA; TARASOV, 2017), para outros contextos menos específicos. Tão pouco, em (TARASOVA; TARASOV, 2017) foram apresentados resultados relacionados ao modelo de Cournot e indicativos de que a memória advinda de competições utilizando derivadas de ordem fracionária gerem estratégias vencedoras a longo prazo.

4 Conclusões

Neste trabalho analisamos o modelo de Cournot para duas firmas em oligopólio, utilizando as hipóteses de que as quantidades produzidas estão igualmente espaçadas no tempo (caso em que as firmas trabalham de forma discreta) e para o caso em que a produção e em consequência, o preço é tempo dependente (caso contínuo) .

A análise do modelo de Cournot clássico (GREMAUD et al., 2017; DIXON, 2001) foi generalizada com o uso das ferramentas de derivadas de ordem fracionárias (DIETHELM, 2004). Neste caso, estamos estendendo o estudo do modelo para o caso em que as firmas envolvidas na competição não estão num ambiente de pura amnésia. memória, dada pelas derivadas de ordem fracionária.

De maneira a entender o papel que a memória (derivadas de ordem fracionária) introduzem na teoria de competição de Cournot, analisamos o que acontece com a função lucro como uma estratégia de longo prazo. Provamos que, em uma estratégia de longo prazo a firma que possui maior memória (derivada fracionária de ordem menor) tem uma estratégia vencedora. Até onde o autor conhece, esse resultado é novo e nunca foi explorado com a abordagem apresentada neste trabalho. Fizemos uma análise detalhada das diversas possibilidades, a longo prazo, para a competição entre as firmas e intra-firmas, ou seja, analisamos o que acontece com cada firma individualmente, considerando que ela tem a possibilidade de escolher a quantidade de memória. Tal análise possibilitou a determinação dos intervalos em que as derivadas de ordem fracionária de cada firma gera uma estratégia vencedora com relação a outra, na forma de um jogo sequencial.

Apresentamos alguns resultados numéricos comparativos que permitem visualizar as conclusões obtidas.

4.1 Trabalhos Futuros

Neste trabalho foram apresentados e analisados modelos do tipo Cournot, contudo este modelo é apenas um dos muitos que descrevem o comportamento de firmas em um duopólio. Portanto acreditamos que a junção do cálculo fracionário com a teoria econômica ainda é muito fértil para se estudar. Por essa razão futuramente pretendemos abordar modelos econômicos mais complexos e mais gerais que o modelo de Cournot. Veja abaixo algumas variações do modelo estudado que pretendemos trabalhar futuramente:

- Estudar um duopólio em que as firmas competem por preço.
- Considerar os produtos não são homogêneos.

-
- Analisar funções de demanda inversa não lineares.
 - Introduzir mais firmas no modelo.
 - Estudar modelos de competição mais complexos, nos quais o aprendizado das formas durante o processo de competição seja mais evidente. Um destes casos é o modelo de Bertrand (DIXON, 2001).
 - Determinar possíveis estratégias a de médio e curto prazo com relação as derivadas de ordem fracionária.

Referências

- CAMARGO, R. d. F. et al. Cálculo fracionário e aplicações. [sn], 2009. Citado 7 vezes nas páginas 12, 14, 15, 17, 20, 21 e 22.
- DIETHELM, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations: On Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. [S.l.]: Springer, 2004. Citado 6 vezes nas páginas 12, 17, 20, 21, 22 e 52.
- DIXON, H. D. *Surfing Economics: Essays for the Inquiring Economist*. [S.l.]: Springer, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 50, 52 e 53.
- GREMAUD, A. P. et al. *Manual de economia*. [S.l.]: Editora Saraiva, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 10, 24, 26 e 52.
- OLIVEIRA, D. d. S. d. et al. Derivada fracionária e as funções de mittag-leffler. [sn], 2014. Citado 9 vezes nas páginas 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21 e 22.
- OLIVEIRA, H. S. et al. Introdução ao cálculo de ordem arbitrária. [sn], 2010. Citado na página 22.
- PINDYCK, R. S.; RUBINFELD, D. L.; RABASCO, E. *Microeconomia*. [S.l.]: Pearson Italia, 2013. Citado na página 24.
- SNYDER, B. C.; GORDER, R. A. V.; VAJRARELU, K. Continuous-time dynamic games for the cournot adjustment process for competing oligopolists. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 219, n. 12, p. 6400–6409, 2013. Citado na página 26.
- TARASOVA, V. V.; TARASOV, V. E. Economic interpretation of fractional derivatives. *arXiv preprint arXiv:1712.09575*, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 10, 49 e 51.
- VARIAN, H. R. *Microeconomia-princípios básicos*. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2006. Citado na página 47.
- VASCONCELLOS, M. A. S. d.; OLIVEIRA, R. G. d.; BARBIERI, F. Manual de microeconomia. 2011. Citado na página 24.
- XIN, B.; PENG, W.; KWON, Y. A fractional-order difference cournot duopoly game with long memory. *arXiv preprint arXiv:1903.04305*, 2019. Citado na página 30.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações diferenciais*. [S.l.]: Pearson Makron Books, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 12, 13 e 28.