

MATHEUS SILVA COLMENERO DE OLIVEIRA

**Aplicação do Cálculo Fracionário em Mecânica
Celeste**

Rio Grande

2019

MATHEUS SILVA COLMENERO DE OLIVEIRA

Aplicação do Cálculo Fracionário em Mecânica Celeste

Este exemplar corresponde ao trabalho de conclusão do curso de bacharelado em matemática aplicada devidamente apresentado pelo estudante Matheus Silva Colmenero de Oliveira no Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande (FURG).

Área de concentração: Matemática

Versão corrigida contendo as alterações solicitadas pela comissão julgadora em 29 de novembro de 2019.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RIO GRANDE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E FÍSICA
BACHARELADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Orientador: Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo

Rio Grande
2019

O trabalho de conclusão de curso de Matheus Silva Colmenero de Oliveira, sob o título “**Aplicação do Cálculo Fracionário em Mecânica Celeste**”, apresentado ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), para obtenção do título de bacharel em matemática aplicada, aprovado em 29 de novembro de 2019 pela comissão julgadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo

Instituição: Universidade Federal do Rio Grande

Presidente

Prof. Ms. Luverci do Nascimento Ferreira

Instituição: Universidade Federal do Rio Grande

Prof. Dr. Fabricio Ferrari

Instituição: Universidade Federal do Rio Grande

Dedico este trabalho

Agradecimentos

Agradeço ao meu professor, Matheus Jatkoske Lazo, por me orientar e me guiar ao longo desses 3 anos como meu orientador na minha bolsa científica e TCC, agradeço a minha família que me ajudou durante esses 4 anos financeiramente e emocionalmente. Aos professores do IMEF por me ensinar matemática e física, educarem e me guiarem nesta carreira acadêmica. Aos meus amigos Israel, Luan, Fabio, Kaique, Jessica, Estefany e Nayani por terem sido companheiros durante o curso e terem sido minha família aqui no cassino. Aos meus amigos do Cassino: Dona Ió e seu Pingo por terem sido os meus pais e me apoiarem emocionalmente. E agradeço aos professores Mario, Flavio Aranha, Alvarenga e Marcos do meu ensino médio. Buscarei sem desanimar responder às perguntas que faço, não para alcançar prestígio ou glória, mas para o desenvolvimento de novas tecnologias e avanços científicos para o bem da vida. Sou grato a todos que indiretamente me ajudaram ou permitiram estar terminando o meu trabalho de conclusão de curso e sempre, até minha morte, irei dedicar-me a Ciência e ao estudo da natureza na busca implacável da compreensão do Universo.

Em Prol a vida na terra.

“E pur si muove”
(Galileu Galilei)

Resumo

Neste trabalho de conclusão de curso formulamos uma teoria modificada para a gravitação com o objetivo de estudar o problema da curva de rotação das galáxias. Em vez de supor a existência de um tipo diferente de matéria (a matéria escura) para explicar uma queda mais lenta do que a prevista pela gravitação newtoniana para a velocidade orbital de uma estrela ao redor do centro da galáxia, partimos da hipótese de que a teoria de gravitação newtoniana precisa ser modificada. A teoria de gravitação que propomos neste trabalho baseia-se em uma recente hipótese de que a dimensão do espaço-tempo é não inteira, resultando em equações de campo com derivadas fracionárias. Neste contexto, definimos um campo de gravitação à partir de um operador gradiente com derivadas fracionárias de um potencial. Para investigar se com esta teoria a velocidade orbital de planetas/estrelas caem com a distância mais lentamente do que com a gravitação newtoniana, obtivemos a velocidade orbital para o caso de um campo central e uma órbita circular. Nossos resultados mostram que neste caso a velocidade orbital cai mais lentamente do que no caso da gravitação newtoniana.

Palavras-chaves: mecânica celeste; matéria escura; cálculo fracionário;

Abstract

In this undergraduate thesis, we formulate a modified theory for gravitation in order to study the problem of the galaxies rotation curve. Instead of assuming a different kind of matter (dark matter) to explain a slower fall than predicted by Newtonian gravitation for the orbital velocity of a star around the center of the galaxy, we assume that the Newtonian gravity theory needs to be modified. The theory of gravitation we propose in this work is based on a recent hypothesis that the dimension of spacetime is not integer, resulting in field equations with fractional derivatives. In this context, we define a gravity field from a gradient operator with fractional derivatives of a potential. In order to investigate whether with this theory the orbital velocity of planets/stars falls with the distance more slowly than with Newtonian gravitation, we obtain the orbital velocity for a central field and a circular orbit. Our results show that in this case the orbital velocity drops more slowly than in the case of Newtonian gravitation.

Keywords: celestial dynamics; dark matter; fractional calculus;

Sumário

1	INTRODUÇÃO	9
2	A CURVA DE ROTAÇÃO DAS GALÁXIAS: MATÉRIA ESCURA E TEORIAS ALTERNATIVAS	12
2.1	O problema de rotação das galaxias	12
2.2	A matéria escura e a teoria MOND	13
3	ORBITA PLANETÁRIA NA MECÂNICA NEWTONIANA	16
3.1	A Mecânica Newtoniana e as leis de Kepler	16
3.2	Relação entre velocidade orbital e distância ao Sol	19
4	CALCULO FRACIONÁRIO	21
4.1	As principais definições de derivadas fracionárias	21
4.2	O Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville	23
4.2.1	As integrais de Riemann-Liouville	23
4.3	As derivadas de Riemann-Liouville	25
4.4	Regras de derivação	26
4.5	Relações entre integrais e derivadas de Riemann-Liouville	29
5	UMA GRAVITAÇÃO FRACIONÁRIA	31
5.1	A gravitação fracionária	31
5.2	Relação entre velocidade orbital e distância ao Sol na gravitação fracionária	32
6	CONCLUSÃO	34
	REFERÊNCIAS	36

1 Introdução

O papel da ciência, e em especial a Física, é compreender os fenômenos da natureza. Desde os trabalhos pioneira de Galileo Galilei e Isaac Newton, no século XVII, a matemática é vista como a linguagem da natureza. De fato, todas as leis físicas que conhecemos são leis matemáticas.

Apesar de todos os avanços nos últimos séculos, no universo observamos ainda vários fenômenos que não sabemos explicar com as teorias físicas que conhecemos. Um exemplo importante é o problema da curva de rotação das galáxias. Esta curva descreve as velocidades orbitais das estrelas e gases visíveis na galáxia em função da sua distância radial ao centro da galáxia . As observações astronômicas mostram que as velocidades de rotação orbital não podem ser explicadas pela nem gravitação newtoniana, nem pela gravitação de Einstein [1]. As estrelas giram em torno do centro de sua galáxia com velocidades aproximadamente constantes com a distância ao centro, enquanto a gravitação newtoniana (e também a gravitação de Einstein) preveem que essa velocidade deveria cair com a distância [1].

O problema da curva de rotação das galáxias leva a duas possibilidades: a primeira é a de que existe um tipo desconhecido de matéria que não conseguimos observar, chamada de matéria escura, presente em grande quantidade nas galáxias. A segunda possibilidade é a de que as teorias física que conhecemos deixam de valer para distâncias muito grandes.

A hipótese da matéria escura é atualmente a mais popular entre os cientistas. Segundo esta hipótese um tipo de matéria que não podemos ver, a matéria escura, deve estar presente no universo gerando a gravidade extra necessária para explicar o que observamos. Essa matéria escura, embora não seja visível diretamente, soma mais de cerca de 85% de toda a matéria do universo. Ao ajustar um modelo teórico da composição do universo ao conjunto combinado de observações cosmológicas, supondo válidas a teoria de Gravitação de Einstein, os cientistas acreditam que a composição do universo deve ser de aproximadamente 68% de energia escura, 27% de matéria escura, e somente 5% de matéria normal [1, 3]. A matéria escura, se existir, ao contrário da matéria normal, não interage com a força eletromagnética. Isso significa que ele não absorve, reflete ou emite

luz, tornando-a extremamente difícil de detectar (e portanto, difícil de provar se ela existe ou não).

Neste trabalho de conclusão de curso consideraremos a segunda possibilidade para estudar o problema orbital. Em vez de supor a existência de um tipo diferente de matéria (a matéria escura) para explicar uma queda mais lenta do que a prevista pela gravitação newtoniana para a velocidade orbital de uma estrela, vamos partir da hipótese de que a teoria de gravitação newtoniana precisa ser modificada. Um exemplo de teoria alternativa para este problema é a chamada dinâmica newtoniana modificada (MOND). A MOND é uma teoria que propõe uma modificação das leis da mecânica newtoniana, preservando a gravitação, para explicar as propriedades observadas das galáxias. É uma alternativa à teoria da matéria escura em termos de explicar por que as galáxias parecem não obedecer às leis da física atualmente entendidas [1].

A teoria de gravitação que propomos neste trabalho baseia-se em uma recente hipótese de que a dimensão do espaço-tempo é não inteira, nem constante [2]. Como na escala do sistema solar a interação gravitacional é observada, com grande precisão, como sendo inversamente proporcional ao quadrado da distância, precisaríamos de um mecanismo para modificar a forma da força gravitacional com a distância. Em trabalhos recentes foi proposto que se a dimensão do espaço-tempo for não inteira, resultando em equações de campo com derivadas fracionárias, efeitos que são atribuídos a matéria e a energia escuras poderiam ser descritos de forma unificada por uma dinâmica para a dimensão do espaço-tempo [2]. Neste caso a dimensão seria uma variável dinâmica dependendo da posição e do tempo [2].

Para uma primeira análise desta possibilidade de um espaço-tempo com dimensão não inteira descrever a curva de rotação das galáxias sem a necessidade de introduzir a matéria escura, propomos uma modificação na gravitação newtoniana para espaços com dimensão não inteiras. Em um tal espaço com dimensão não inteira, como em um espaço fractal, os operadores com derivadas inteiras não são bem definidos. Nesta situação as equações de campo envolveriam derivadas fracionárias [2]. Neste contexto, definimos um campo de gravitação à partir de um operador gradiente com derivadas fracionárias de um potencial. Para investigar se com esta teoria a velocidade orbital de planetas/estrelas caem com a distancia mais lentamente do que com a gravitação newtoniana, obtivemos a velocidade orbital para o caso de um campo central e uma órbita circular. Nosso resultados mostram que neste caso a velocidade orbital cai mais lentamente do que no caso da

gravitação newtoniana. Este resultado motiva futuras pesquisas nesta teoria fracionária como alternativa à hipótese de matéria escura.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 2 apresentamos brevemente o problema da curva de rotação das galáxias e as teorias da matéria escura e MOND. No capítulo 3 mostramos como a mecânica newtoniana e a gravitação de Newton explicam as leis de Kepler para o movimento orbital no sistema solar. O capítulo 4 é dedicado ao estudo do cálculo fracionário. A teoria de gravitação fracionária que propomos é desenvolvida no capítulo 5. Finalmente, no capítulo 6 apresentamos nossa conclusão e perspectivas de trabalhos futuros.

2 A curva de rotação das galáxias: matéria escura e teorias alternativas

Neste capítulo apresentamos uma breve introdução ao problema das curvas de rotação das galáxias, a hipótese de existência de um tipo exótico de matéria chamada de matéria escura, e a uma teoria alternativa à mecânica newtoniana.

2.1 O problema de rotação das galaxias

Galáxias são objetos astronômicos constituídos de dezenas à centenas de estrelas orbitando um centro de gravidade comum. Um exemplo famoso é a Via-Láctea, a galáxia em que vivemos. As galáxias são divididas basicamente em três grupos, as elípticas, as espirais e as irregulares. As galáxias elípticas tem esse nome devido a sua forma que varia de esférica à elíptica. Essas galáxias geralmente apresentam pouca atividade de formação de novas estrelas. As galáxias espirais, como a Via-Láctea, têm forma espiral e apresentam grande atividade de formação de novas estrelas. Já as galáxias irregulares não apresentam uma forma definida, e são geralmente galáxias menores ou que sofreram processos de colisão.

A curva de rotação de uma galáxia (também chamada de curva de velocidade) descreve as velocidades orbitais das estrelas e gases visíveis nessa galáxia em função da sua distância radial ao centro da galáxia. Um fato importante é que observações astronômicas mostram que as velocidades de rotação orbital das estrelas em torno das galáxias não seguem as regras encontradas em outros sistemas orbitais, como planetas em torno de estrelas e de satélites em torno de planetas [1]. Este fenômeno foi descoberto por Bosma e Rubin quando estudaram a curva de rotação de galáxias nos anos de 1970 e 1980. Na época, pensava-se que a gravidade das estrelas nas galáxias era a única força que mantinha as galáxias unidas. Observando a luz e o movimento dessas galáxias, pode-se calcular a velocidade com que as galáxias estavam girando. Havia um problema: comparando a força da gravidade das estrelas com a taxa de rotação das galáxias, verificou-se que as galáxias deveriam estar se desintegrando. Elas estavam simplesmente girando rápido

demais para conseguir manter suas formas usando apenas a gravidade de suas estrelas. Isso ficou conhecido como o problema de rotação de galáxias.

As estrelas giram em torno do centro de sua galáxia com velocidades aproximadamente constantes ou crescentes com a distância ao centro. Em contraste, as velocidades orbitais dos planetas nos sistemas planetários, e das luas que orbitam os planetas, declinam com a distância. Nos últimos casos, isso reflete as distribuições de massa dentro desses sistemas. No entanto, supondo válidas as leis da mecânica newtoniana, as estimativas de massa para galáxias baseadas na luz que elas emitem são muito baixas para explicar as observações das velocidades orbitais de suas estrelas [1].

2.2 A matéria escura e a teoria MOND

O problema de rotação de galáxias é a discrepância entre as curvas de rotação de galáxias observadas e a previsão teórica (Veja a figura 1). Quando os perfis de massa das galáxias são calculados à partir da distribuição das estrelas nas galáxias, na razão massa/luz nos discos galácticos, eles não coincidem com as massas derivadas das curvas de rotação observadas considerando válida as leis da mecânica newtoniana. Uma possível solução para esse enigma é hipotetizar a existência de um tipo de matéria que não conseguimos observar, chamada de matéria escura, e assumir sua distribuição do centro da galáxia até seu halo.

Este problema na velocidade orbital também é observada em estruturas ainda maiores, como no movimento orbital de galáxias em aglomerados de galáxias. Este fato leva a maioria dos cientistas a acreditar que algo que não podemos ver, a matéria escura, deve estar presente no universo, gerando a gravidade extra necessária para explicar o que observamos. Essa matéria escura, embora não seja visível diretamente, soma cerca de 85% de toda a matéria do universo. Ao ajustar um modelo teórico da composição do universo ao conjunto combinado de observações cosmológicas, supondo válidas a teoria de Gravitação de Einstein, os cientistas acreditam que a composição do universo deve ser de aproximadamente 68% de energia escura, 27% de matéria escura, e somente 5% de matéria normal [1, 3].

Mas o que seria essa matéria escura? Existem algumas hipóteses ainda não confirmadas de como poderia ser essa matéria escura, só sabemos de fato o que ela não é. Ela é chamada de escura pois é um tipo de matéria que não pode ser observada através

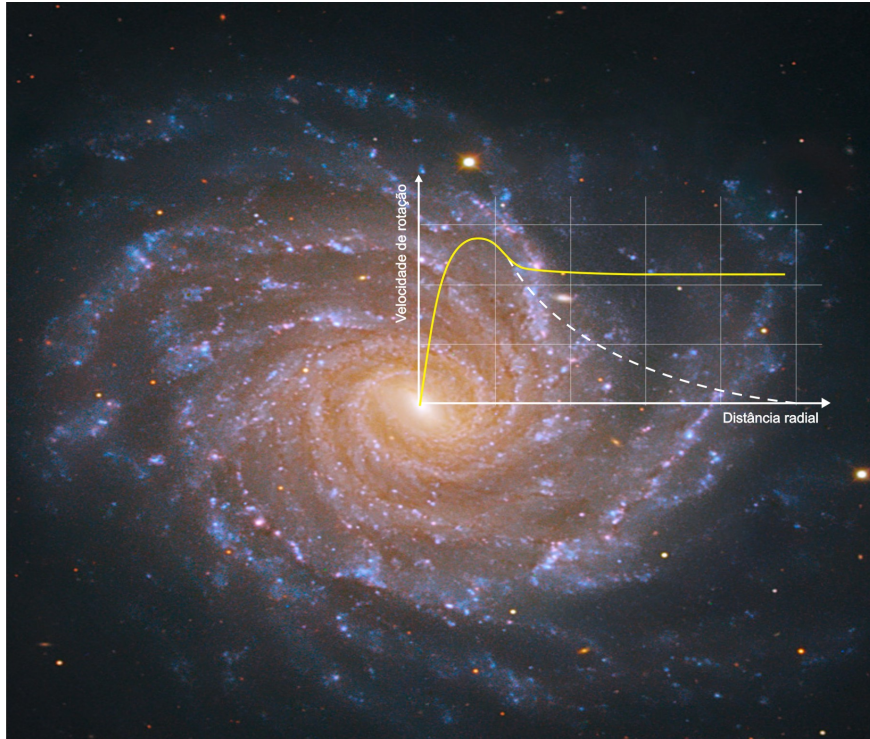


Figura 1 – curva de rotação de uma galáxia espiral

da luz, como estrelas e planetas. As observações mostram que há muito pouco material visível no universo para compor os 27% de massa exigidos pelas observações astronômicas. Matéria escura também não é formada por nuvens escuras da matéria normal, matéria composta de partículas chamadas bárions. Sabemos disso porque seríamos capazes de detectar nuvens bariônicas pela absorção de radiação luminosa que passa por elas. A matéria escura também não é antimatéria, porque não vemos os raios gama que são produzidos quando a antimatéria se aniquila com a matéria. Finalmente, podemos excluir grandes buracos negros do tamanho de galáxias com base em quantas lentes gravitacionais vemos. Altas concentrações de matéria dobram a luz que passa perto deles a partir de objetos mais distantes, mas não vemos eventos de lentes gravitacionais suficientes para sugerir que esses objetos constituam a necessária contribuição de 27% da matéria escura [1, 3].

Ao contrário da matéria normal, a matéria escura não interage com a força eletromagnética. Isso significa que ele não absorve, reflete ou emite luz, tornando-a extremamente difícil de detectar. De fato, os pesquisadores conseguiram inferir a existência de matéria escura apenas pelo efeito gravitacional que parece ter sobre a matéria visível. Uma idéia é que ela poderia conter partículas supersimétricas, que são partículas hipotéticas parceiras

às partículas conhecidas do Modelo Padrão. Neste caso, os experimentos no Large Hadron Collider (LHC) podem fornecer pistas mais diretas sobre a matéria escura [4].

Neste trabalho consideraremos uma abordagem diferente para estudar o problema orbital. Em vez de supor a existência de um tipo diferente de matéria (a matéria escura) para explicar uma queda mais lenta do que a prevista pela gravitação newtoniana para a velocidade orbital de uma estrela, vamos partir da hipótese de que a teoria de gravitação newtoniana precisa ser modificada. Um exemplo de teoria alternativa para este problema é a chamada dinâmica newtoniana modificada (MOND). A MOND é uma teoria que propõe uma modificação das leis da mecânica newtoniana para explicar as propriedades observadas das galáxias. É uma alternativa à teoria da matéria escura em termos de explicar por que as galáxias parecem não obedecer às leis da física atualmente entendidas [1].

Criada em 1982 e publicada pela primeira vez em 1983 pelo físico israelense Mordehai Milgrom, a motivação original da teoria era explicar por que as velocidades das estrelas nas galáxias são maiores do que o esperado com base na mecânica newtoniana. Milgrom observou que essa discrepância poderia ser resolvida se a força gravitacional experimentada por uma estrela nas regiões externas de uma galáxia fosse proporcional ao quadrado de sua aceleração centrípeta (em oposição à aceleração centrípeta em si, como na segunda lei de Newton), ou alternativamente se a força gravitacional variar inversamente com o raio (em oposição ao quadrado inverso do raio, como na lei da gravidade de Newton). Em MOND, a violação das leis de Newton ocorre em acelerações extremamente pequenas, características nas estrelas orbitando o centro galáctico, mas ainda muito abaixo de qualquer coisa tipicamente encontrada no Sistema Solar ou na Terra [1].

3 Órbita planetária na Mecânica Newtoniana

Neste capítulo estudamos o problema da órbita de uma partícula (estrela, planeta, etc) sob a ação da gravidade newtoniana. A teoria da gravitação proposta por Newton no século XVII foi capaz de explicar o movimento dos planetas do sistema solar e da Lua com extrema precisão, confirmando a hipótese heliocêntrica do mundo. Essa teoria desempenhou um papel fundamental na história da Física e na nossa compreensão sobre as leis da natureza. Tal como Richard Feynman dizia:

“a natureza é um enorme jogo de xadrez disputado por deuses, e que temos o privilégio de observar. As regras do jogo são o que chamamos de física fundamental, e compreender essas regras é a nossa meta”

A mecânica celeste, o estudo dos movimentos dos corpos celestes, juntamente com a astronomia de posição, foi um dos principais ramos da astronomia até o final do século XIX, quando a astrofísica começou a se desenvolver rapidamente. O principal objetivo da mecânica celeste clássica era explicar e prever os movimentos dos planetas e seus satélites. Antes da mecânica newtoniana, vários modelos empíricos, como os epiciclos gregos e as leis kepler, foram empregados para descrever esses movimentos. Mas nenhum desses modelos explicava por que os planetas se moviam. Foi somente em 1680 que uma explicação simples foi encontrada para todos esses movimentos: a lei de Newton da gravitação universal. Neste capítulo, vamos mostrar como a mecânica newtoniana explica o movimento orbital dos planetas e explica as leis de Kepler. As principais referências que usamos neste capítulo são os livros do Nivaldo Lemos [5] e do Goldstein [6].

3.1 A Mecânica Newtoniana e as leis de Kepler

As leis de Kepler para o movimento planetário são divididas em três. A primeira lei diz que a órbita de um planeta em torno do sol é sempre descrita como uma elipse onde o sol ocupa um dos focos. Para demonstrar tal lei a partir da mecânica newtoniana, descreveremos nosso problema no sistema de coordenadas polares. Se a massa do Sol é muito maior que a massa do planeta, podemos considerar aproximadamente que o centro

de gravidade do sistema coincide com o centro do Sol. Seja $\vec{r} = r\hat{r}$ o vetor posição do planeta em relação ao centro do Sol. Derivando até segunda ordem obtemos

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

e igualando $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ à força gravitacional de Newton, $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$, encontramos

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}.$$

Portanto

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2}, \quad (3.1)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0. \quad (3.2)$$

Multiplicando a equação (3.2) por mr obtemos a conservação do momento angular

$$mr^2\dot{\theta} + m2r\dot{r}\dot{\theta} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{dL}{dt} = 0, \quad (3.3)$$

onde $L = mr^2\dot{\theta}$ é momento angular. Para reescrever a (3.1) em função do momentum angular usamos

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{L}{mr^2}, \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta}, \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} \left[\frac{L}{mr^2} \frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2L}{mr^3} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Substituindo na equação (3.1) obtemos

$$\frac{L}{mr^2} \left[\frac{L}{mr^2} \frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2L}{mr^3} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right] - \frac{L^2}{m^2r^3} = -\frac{GM}{r^2},$$

portanto

$$-2\frac{L^2}{m^2r^5} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{m^2r^4} \frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{L^2}{m^2r^3} = -\frac{GM}{r^2}.$$

Fazendo a mudança de coordenadas

$$u = r^{-1}, \quad \frac{du}{d\theta} = -r^{-2} \frac{dr}{d\theta}, \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = 2r^{-3} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r^{-2} \frac{d^2r}{d\theta^2},$$

obtemos,

$$-\frac{L^2}{m^2r^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{L^2}{m^2r^3} = -\frac{GM}{r^2},$$

resultando em

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2}. \quad (3.4)$$

A solução geral da equação (3.4) é dada por

$$u = \frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L^2} + \epsilon \cos(\theta - \theta_0),$$

de onde ϵ e θ_0 são constantes a serem fixadas pela condição inicial do problema. Finalmente,

$$r = \frac{L^2}{GMm^2} \frac{1}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)}. \quad (3.5)$$

Obtemos como resultado que todas as órbitas de planetas em torno de uma estrela, ou de um corpo massivo qualquer, são dadas pela equação (3.5), de maneira que o valor de ϵ nos dita como será o movimento. Usando a energia total do sistema, podemos classificar os tipos de órbitas em função de ϵ . Para $\epsilon = 0$ temos uma órbita circular pois r fica constante. Para $0 < \epsilon < 1$ a órbita será elíptica com excentricidade ϵ . Quando $\epsilon = 1$ e $\epsilon > 1$ as órbitas serão parabólicas e hiperbólicas, respectivamente. Portanto, à partir da Mecânica e da gravitação newtonianas obtemos a primeira lei de Kepler.

A segunda lei de Kepler nos diz que a velocidade areal é constante no tempo, ou seja, o planeta varre áreas iguais A em tempos iguais (Veja a Figura 2). O fato da

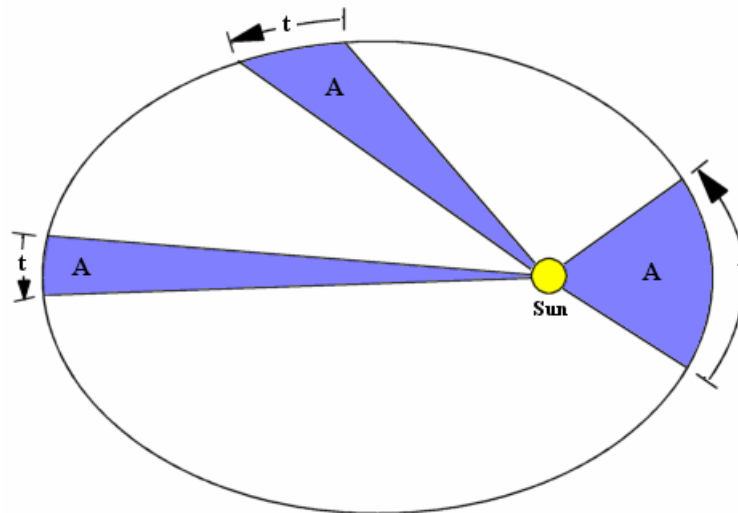


Figura 2 – O planeta varre áreas iguais A em intervalos de tempo t iguais. Imagem: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/75/Kepler2.gif>

velocidade areal ser constante está diretamente relacionado com a conservação de momento angular $L = mr^2\dot{\theta} = cte$. Sendo o diferencial da área A dado por:

$$dA = \frac{1}{2}r^2d\theta,$$

e dividindo por dt obtem-se a velocidade vetorial areal

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{L}{2m} = \text{cte.}$$

Portanto, a área varrida em função do tempo é

$$A(t) = \frac{L}{2m}t, \quad (3.6)$$

onde consideramos sem perda de generalidade que $A(0) = 0$.

Finalmente, a terceira lei de Kepler estabelece que o o quadrado do período orbital T de um planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior a de sua órbita. O semi-eixo maior a pode ser obtido à partir da (3.5) pois

$$a = \frac{r_{max} + r_{min}}{2} = \frac{L^2}{2GMm^2} \left[\frac{1}{1-\epsilon} + \frac{1}{1+\epsilon} \right] = \frac{L^2}{GMm^2} \frac{1}{1-\epsilon^2}, \quad (3.7)$$

onde r_{max} e r_{min} são as distâncias máximas e mínimas do planeta em relação ao Sol, respectivamente. O período orbital T de um planeta é o tempo que ele leva para completar uma órbita completa em relação ao Sol. Escolhendo $t = T$ na (3.6) resulta em

$$T = \frac{2m}{L}A(T) = \frac{2m}{L}\pi ab,$$

onde $A(T) = \pi ab$ é a área da elipse que representa a órbita do planeta, e b é o semi-eixo menor da elipse. Da geometria sabemos que $b = a\sqrt{1-\epsilon^2}$, portanto, da equação anterior obtemos

$$T = \frac{2m}{L}A(T) = 2\pi a^2 \frac{m}{L} \sqrt{1-\epsilon^2} = 2\pi a^2 \frac{1}{\sqrt{GMa}} = a^{\frac{3}{2}} \frac{2\pi}{GM}, \quad (3.8)$$

onde usamos a (3.7). Finalmente, da (3.8) obtemos a terceira lei de Kepler, pois $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G^2M^2} = \text{cte.}$

3.2 Relação entre velocidade orbital e distância ao Sol

Neste trabalho temos como objetivo investigar a relação entre a velocidade orbital e a distância ao centro da órbita em uma teoria alternativa à gravitação newtoniana. Para efeito de comparação, é importante obtermos esta relação para o caso da gravitação newtoniana. A curva de rotação das galáxias está diretamente relacionada à esta relação velocidade/distância. Uma teoria que possa explicar, sem a hipótese de matéria escura, a anomalia encontrada na curva de rotação das galáxias deve apresentar uma relação

velocidade/distância onde a velocidade cai com a distância mais lentamente do que no caso da gravitação newtoniana.

Por simplicidade, vamos considerar apenas órbitas circulares. Neste caso, o módulo da força centrípeta é igual ao módulo da força de gravitação newtoniana, ou seja,

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2},$$

onde v é o módulo da velocidade do planeta. Portanto, a velocidade orbital na gravitação newtoniana cai com o inverso da raiz da distância ao Sol. ou seja,

$$v = \frac{\sqrt{GM}}{\sqrt{r}}. \quad (3.9)$$

Antes de obter a relação entre velocidade/distância para a teoria modificada da gravitação que propomos neste trabalho, no próximo capítulo faremos uma breve introdução ao cálculo fracionário.

4 Cálculo Fracionário

O cálculo fracionário, envolvendo derivadas e integrais de ordem não-inteiras, teve seu início a mais de três séculos atrás. Em 1695 l'Hôpital escreveu uma carta à Leibniz perguntando qual seria o significado da expressão $\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}}$, ou seja, qual seria o significado de uma derivada de ordem $\frac{1}{2}$ [7]. Outros grandes matemáticos da história contribuíram para o desenvolvimento do cálculo fracionário, entre eles podemos citar nomes como Euler, Laplace, Liouville, Grunwald, Letnikov, Riemann e muitos outros. Apesar de ser quase tão antigo quanto o cálculo usual de derivadas e integrais de ordem inteira, só nas últimas três décadas o cálculo fracionário despertou maior atenção devido a suas aplicações em vários campos da ciência e da engenharia. Esta demora no surgimento de aplicações do cálculo fracionário se explica devido as dificuldades de se interpretar física e geometricamente as derivadas e integrais não inteiras. Até hoje, mais de trezentos anos após sua criação, ainda não temos uma interpretação física e geométrica consistente para essas derivadas e integrais. Recentemente foi proposta uma interpretação geométrica como "sombras de uma área" e uma interpretação física como "sombras do passado" [8]. Embora essas interpretações ainda pareçam não totalmente satisfatórias, ficou evidente nestas últimas três décadas que o cálculo fracionário é uma ferramenta matemática extremamente importante para aplicações que envolvam o estudo de sistemas complexos. Os sistemas complexos que podemos utilizar o cálculo fracionário são sistemas com comportamento não-local ou com dinâmica dependente de memória. Entre as áreas de aplicações temos vários campos da ciência e da engenharia, incluindo escoamento de fluidos, meios viscosos, reologia, transporte difusivo, redes elétricas, teoria eletromagnética, teoria do campo, probabilidade, etc.

4.1 As principais definições de derivadas fracionárias

Existem diferentes definições para o cálculo fracionário. Embora essas definições sejam diferentes, é possível relacionar essas várias formulações [7]. Uma das mais antiga

definição do cálculo fracionário se deve a Euler e foi formulada em 1730. Euler generalizou a fórmula

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} \quad (4.1)$$

para m e n inteiros com $m > n$, substituindo os m e n por números reais β e α , e os fatoriais por funções Gamma:

$$\frac{d^\alpha x^\beta}{dx^\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}, \quad (4.2)$$

onde a função $\Gamma(z)$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (4.3)$$

generaliza a função fatorial para números não inteiros (para $z = m + 1$ inteiro, temos $\Gamma(m+1) = m!$). Atualmente a definição mais utilizada em matemática pura é a formulação de Riemann-Liouville [7]

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad (4.4)$$

onde $n \leq \alpha < n+1$ é um inteiro e a um número real arbitrário. A formulação mais utilizada em ciências e engenharia é a definição de Caputo [7]

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \frac{d^n y(t)}{dt^n} dt. \quad (4.5)$$

O cálculo fracionário de Caputo é mais popular entre cientistas e engenheiros pois as equações diferenciais envolvendo derivadas de Caputo (4.5) requerem condições de contorno regulares (semelhantes às equações diferenciais com derivadas usuais de ordem inteira). Ambos os cálculos fracionários de Caputo e de Riemann-Liouville são construídos a partir da continuação analítica da fórmula de Cauchy para integrais repetidas[7]

$$\begin{aligned} \int_a^x f(\tilde{x})(d\tilde{x})^n &= \int_a^x \int_a^{x_n} \int_a^{x_{n-1}} \cdots \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} f(x_1) dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} dx_n \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}} dt, \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde o inteiro n é substituído pelo real $n - \alpha$ ($0 < \alpha < 1$) resultando em uma integral fracionária de ordem $n - \alpha$ (integração de $n - \alpha$ vezes da função), utilizada na definição das derivadas de Riemann-Liouville e Caputo. Na próxima seção estudaremos com mais detalhes o cálculo fracionário de Riemann-Liouville.

4.2 O Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville

Nesta seção vamos definir e estudar algumas propriedades da formulação de Riemann-Liouville para o cálculo fracionário.

4.2.1 As integrais de Riemann-Liouville

Apesar de existirem diversas propostas para derivadas fracionárias, um grande número dessas formulações estão de alguma forma conectadas com a continuação analítica da fórmula de Cauchy para integrais repetidas.

Teorema 4.2.1 (Formula de Cauchy) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável segundo Riemann no intervalo $[a, b]$. Então, temos para a integral de ordem n ($n \in \mathbb{N}$):*

$$\begin{aligned} \int_a^x f(\tilde{x})(d\tilde{x})^n &= \int_a^x \int_a^{x_n} \int_a^{x_{n-1}} \cdots \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} f(x_1) dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} dx_n \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{1-n}} du \quad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde Γ é a função gamma de Euler.

A prova da fórmula de Cauchy pode ser encontrada em diversos livros textos (por exemplo, em [7]). A continuação analítica da (4.7) nos dá uma definição para a integral de ordem não inteira (historicamente chamada de ordem fracionária). Essa integral de ordem fracionária é a pedra fundamental do cálculo fracionário de Riemann-Liouville, assim como de diversas outras formulações [7]. As integrais fracionárias obtidas a partir da (4.7) são chamadas de integrais à direita e à esquerda de Riemann-Liouville:

Definição 4.2.1 *Seja $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Os operadores ${}_a J_x^\alpha$ e ${}_x J_b^\alpha$ definidos em $L_1[a, b]$ por*

$${}_a J_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{1-\alpha}} du \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+) \quad (4.8)$$

e

$${}_x J_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(u)}{(u-x)^{1-\alpha}} du \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+), \quad (4.9)$$

com $a < b$ e $a, b \in \mathbb{R}$, são chamados de integrais fracionárias à esquerda e à direita de Riemann-Liouville de ordem $\alpha \in \mathbb{R}_+$, respectivamente.

Para α inteiro as integrais de Riemann-Liouville (4.8) e (4.9) coincidem com integrais repetidas usuais (4.7). Além disso, das definições (4.8) e (4.9) é fácil de ver que as integrais

fracionárias de Riemann-Liouville convergem para quaisquer funções integráveis f se $\alpha > 1$. Mais ainda, é possível provar a convergência das (4.8) e (4.9) para funções $f \in L_1[a, b]$ mesmo quando $0 < \alpha < 1$ [9].

As integrais fracionárias de Riemann-Liouville (4.8) e (4.9) preservam uma importante propriedade algébrica das integrais usuais:

Teorema 4.2.2 *Seja $\alpha, \beta \geq 0$ e $f \in L_1[a, b]$. Então*

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = {}_a J_x^{\alpha+\beta} f(x) \quad e \quad {}_x J_b^\alpha {}_x J_b^\beta f(x) = {}_x J_b^{\alpha+\beta} f(x). \quad (4.10)$$

Prova (veja [9]): Vamos apresentar a prova para as derivadas à direita (para as derivadas à esquerda segue uma prova similar). Da definição (4.8) temos

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_a^t (t-u)^{\beta-1} f(u) du dt. \quad (4.11)$$

Como as integrais existem para $f \in L_1[a, b]$, usando o Teorema de Fubini podemos trocar a ordem de integração

$$\begin{aligned} {}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_u^x (x-t)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta-1} f(u) dt du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \int_u^x (x-t)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta-1} dt du. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Fazendo a mudança de variável $t = u + s(x-u)$ obtemos

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds du. \quad (4.13)$$

Identificando $\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds = B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$ com a função Beta de Euler $B(\alpha, \beta)$ resulta, finalmente,

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} du = {}_a J_x^{\alpha+\beta} f(x). \quad (4.14)$$

□.

Uma importante consequência do Teorema (4.2.2) é a comutatividade dos operadores integrais:

Nota 1 *Sobre as considerações do Teorema (4.2.2) temos*

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = {}_a J_x^\beta {}_a J_x^\alpha f(x) \quad e \quad {}_x J_b^\alpha {}_x J_b^\beta f(x) = {}_x J_b^\beta {}_x J_b^\alpha f(x). \quad (4.15)$$

Em outras palavras, os conjuntos dos operadores $\{{}_a J_x^\alpha : L_1[a, b] \rightarrow L_1[a, b]; \alpha \geq 0\}$ e $\{{}_x J_b^\alpha : L_1[a, b] \rightarrow L_1[a, b]; \alpha \geq 0\}$ formam semigrupos com respeito à concatenação, onde o elemento neutro é o operador identidade, ${}_a J_x^0$ e ${}_x J_b^0$, respectivamente. Estas propriedades (4.15) são uma generalização direta do caso usual de integrais de ordem inteira, onde as integrais também comutam formando um semigrupo.

4.3 As derivadas de Riemann-Liouville

Os operadores de integração ${}_a J_x^\alpha$ e ${}_x J_b^\alpha$, definidos em (4.8) e (4.9), desempenham papel central no Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville. Antes de definir as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville, relembremos que para inteiros positivos $n > m$ vale a identidade $D_x^m f(x) = D_{xa}^n J_x^{n-m} f(x)$, onde D_x^m é uma derivada usual de ordem inteira m .

Definição 4.3.1 (Derivadas de Riemann-Liouville) *As derivadas fracionárias de ordem $\alpha > 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) de Riemann-Liouville à esquerda e à direita são definidas, respectivamente, por ${}_a D_x^\alpha f(x) = D_{xa}^n J_x^{n-\alpha} f(x)$ e ${}_x D_b^\alpha f(x) = (-1)^n D_{xx}^n J_b^{n-\alpha} f(x)$ com $n = [\alpha] + 1$, ou seja,*

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{1+\alpha-n}} du \quad (n = [\alpha] + 1, \alpha \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R}) \quad (4.16)$$

e

$${}_x D_b^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b \frac{f(u)}{(u-x)^{1+\alpha-n}} du \quad (n = [\alpha] + 1, \alpha \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}), \quad (4.17)$$

onde $D_x^n = \frac{d^n}{dx^n}$ é uma derivada usual de ordem inteira n .

Uma consequência importante das definições (4.16) e (4.17) é que as derivadas de Riemann-Liouville são operadores não locais. O operador à esquerda (à direita) definido pela expressão integro-diferencial (4.16) (e (4.17)) depende de valores da função à esquerda (à direita) de x , isto é, $a \leq u \leq x$ ($x \leq u \leq b$).

Nota 2 *Quando α é um inteiro, as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville (4.16) e (4.17) reduzem à derivadas usuais de ordem inteira α .*

Nota 3 *Para $0 < \alpha < 1$ as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville (4.16) e (4.17) podem ser aplicadas mesmo em funções não diferenciáveis. Esta propriedade é uma consequência direta do fato das derivadas de Riemann-Liouville serem dadas a partir da derivada de primeira ordem da integral fracionária da função. Podemos tomar a derivada de Riemann-Liouville mesmo de funções não diferenciáveis em todo o domínio, como a função de Weierstrass.*

Para ilustrar a aplicação das derivadas de Riemann-Liouville em funções simples, vamos calcular a derivada à esquerda ${}_a D_x^\alpha f(x)$ (4.16) da função potência $f(x) = (x-a)^\beta$.

Temos

$${}_a D_x^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{(u-a)^\beta}{(x-u)^{1+\alpha-n}} du, \quad (4.18)$$

onde $n = [\alpha] + 1$, e devemos ter $\beta > -1$ em ordem de garantir a convergência da integral em (4.18). Fazendo a mudança de variável $s = (u - a)/(x - a)$ obtemos

$$\begin{aligned} {}_a D_x^\alpha (x - a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} (x - a)^{\beta - \alpha + n} \int_0^1 s^\beta (1 - s)^{n - \alpha - 1} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha + \beta + 1)} \frac{d^n}{dx^n} (x - a)^{\beta - \alpha + n}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde identificamos $\int_0^1 s^\beta (1 - s)^{n - \alpha - 1} ds = B(n - \alpha, \beta + 1)$ com a função Beta de Euler. Temos duas possibilidades para a derivada (4.19). A primeira, quando $\alpha - \beta \in \mathbb{N}$, o lado direito da (4.19) se reduz à um polinômio de grau inteiro $n - (\alpha - \beta) \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ e, portanto, a derivada é nula. Na segunda, quando $\alpha - \beta \notin \mathbb{N}$ a derivada é não nula:

$${}_a D_x^\alpha (x - a)^\beta = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha - \beta \in \mathbb{N} \\ \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha} & \text{se } \alpha - \beta \notin \mathbb{N} \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+, \beta > -1), \quad (4.20)$$

onde usamos a propriedade $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ da função Gamma de Euler. De forma equivalente, temos para a derivada à direita (4.17)

$${}_x D_b^\alpha (b - x)^\beta = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha - \beta \in \mathbb{N} \\ \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (b - x)^{\beta - \alpha} & \text{se } \alpha - \beta \notin \mathbb{N} \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+, \beta > -1). \quad (4.21)$$

Nota 4 É importante notar que a derivada de Riemann-Liouville (4.16) e (4.17) de uma constante não é zero para $\alpha \notin \mathbb{N}$.

$${}_a D_x^\alpha 1 = \frac{(x - a)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}, \quad {}_x D_b^\alpha 1 = \frac{(b - x)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}. \quad (4.22)$$

Para $\alpha \in \mathbb{N}$ recuperamos as derivadas usuais de ordem inteira, e o lado direito da (4.22) se torna igual à zero devido aos polos da função Gamma de Euler. Devido ao fato da derivada de uma constante ser diferente de zero, as equações diferenciais envolvendo derivadas de Riemann-Liouville requerem condições iniciais e de contorno não regulares [7, 9].

4.4 Regras de derivação

Além da derivada da constante ser não nula, outra propriedade importante das derivadas inteiras que não é satisfeita pelas definições de Riemann-Liouville é a comutatividade. No cálculo usual, a comutatividade dos operadores é uma consequência direta da

bem conhecida Lei dos Expoentes para as derivadas e integrais de ordem inteira $m, n \in \mathbb{N}_+$,

$$\begin{aligned} {}_a J_x^m {}_a J_x^n f(x) &= {}_a J_x^n {}_a J_x^m f(x) = {}_a J_x^{m+n} f(x), \\ D_x^m D_x^n f(x) &= D_x^n D_x^m f(x) = D_x^{m+n} f(x), \end{aligned} \quad (4.23)$$

sendo D_x^n e ${}_a J_x^m$ as derivadas e integrais usuais de ordem inteira. Enquanto a primeira relação em (4.23) é estendida para as integrais fracionárias de Riemann-Liouville (4.8) e (4.9) (veja a (4.15)), para as derivadas de Riemann-Liouville (4.16) e (4.17) podemos ter situações como:

$$\begin{aligned} {}_a D_x^\alpha {}_a D_x^\beta f(x) &= {}_a D_x^\beta {}_a D_x^\alpha f(x) \neq {}_a D_x^{\alpha+\beta} f(x), \\ {}_a D_x^\alpha {}_a D_x^\beta f(x) &\neq {}_a D_x^\beta {}_a D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^{\alpha+\beta} f(x). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Em outras palavras, a Lei dos Expoentes não é satisfeita pelas derivadas fracionárias de Riemann-Liouville (4.16) e (4.17), que conseqüentemente não formam um semigrupo. Vamos ilustrar as situações expostas em (4.24) com dois exemplos.

Exemplo 1 No caso da primeira relação em (4.24), vamos tomar $f(x) = (x - a)^{-1/2}$ com $\alpha = \beta = 1/2$. Então, usando (4.20) obtemos ${}_a D_x^{1/2} f(x) = 0$, e portanto ${}_a D_x^{1/2} {}_a D_x^{1/2} f(x) = 0$, mas ${}_a D_x^{1/2+1/2} f(x) = D_x^1 f(x) = -(x - a)^{-3/2}/2$.

Exemplo 2 No caso da segunda relação em (4.24), vamos tomar $f(x) = (x - a)^{1/2}$ com $\alpha = 1/2$ e $\beta = 3/2$. Então, usando (4.20) obtemos ${}_a D_x^{1/2} f(x) = \sqrt{\pi}/2$ e ${}_a D_x^{3/2} f(x) = 0$. Portanto, temos ${}_a D_x^{1/2} {}_a D_x^{3/2} f(x) = 0$, mas ${}_a D_x^{3/2} {}_a D_x^{1/2} f(x) = {}_a D_x^{1/2+3/2} f(x) = D_x^2 f(x) = -(x - a)^{-3/2}/4$.

Em (4.24) consideramos apenas derivadas à esquerda, mas os mesmos resultados podem ser automaticamente estendidos para derivadas à direita. No que segue o restante do capítulo, utilizaremos apenas derivadas e integrais à esquerda.

Vamos investigar agora a generalização de algumas regras clássicas do cálculo usual envolvendo mais de uma função na mesma derivada. Essas generalizações são importantes para simplificar o cálculo de derivadas fracionárias de funções mais complexas.

Teorema 4.4.1 *Sejam f e g duas funções definidas em $[a, b]$ tal que ${}_a D_x^\alpha f(x)$ e ${}_a D_x^\alpha g(x)$ existam. Sejam ainda $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ duas constantes quaisquer. Então, ${}_a D_x^\alpha (c_1 f(x) + c_2 g(x))$ existe, e*

$${}_a D_x^\alpha (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 {}_a D_x^\alpha f(x) + c_2 {}_a D_x^\alpha g(x). \quad (4.25)$$

Prova: A prova segue diretamente da definição (4.16) pois derivadas e integrais usuais são operadores lineares \square .

Outra regra importante do cálculo é a chamada Regra do Produto, ou Regra de Leibniz. A regra para derivada primeira do produto de duas funções $f(x)$ e $g(x)$, $D_x^1(f(x)g(x)) = (D_x^1 f(x))g(x) + f(x)(D_x^1 g(x))$, pode facilmente ser estendida para derivada de ordem inteira $m \in \mathbb{N}_+$ qualquer:

Teorema 4.4.2 (Regra de Leibniz) *Seja $m \in \mathbb{N}_+$, e seja $j, g \in C^m[a, b]$ duas funções.*

Então

$$D_x^m (f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (D_x^k f(x)) (D_x^{m-k} g(x)). \quad (4.26)$$

A Regra de Leibniz é aplicável a quaisquer funções de classe $C^m[a, b]$, além de ser simétrica nas funções $f(x)$ e $g(x)$, ou seja, podemos trocar a ordem das funções em (4.26) que não altera o resultado. Essas propriedades da Regra de Leibniz não são preservadas quando utilizamos derivadas de Riemann-Liouville.

Teorema 4.4.3 (Regra de Leibniz para derivadas de Riemann-Liouville) *Sejam*

f e g funções analíticas em $[a, b]$. Seja $n = [\alpha] + 1$ com $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Então

$${}_a D_x^\alpha (f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\alpha}{k} (D_x^k f(x)) ({}_a D_x^{\alpha-k} g(x)) + \sum_{k=n}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (D_x^k f(x)) ({}_a J_x^{k-\alpha} g(x)). \quad (4.27)$$

A prova do Teorema é mais elaborada e pode ser encontrada, por exemplo, em [7, 9]. É importante notar que diferente da Regra de Leibniz para derivadas inteiras (4.26), para derivadas fracionárias (4.27) a derivada do produto só é aplicável à funções analíticas.

Finalmente, terminamos esta seção com a Regra da Cadeia. Para derivadas de Riemann-Liouville essa regra é importante para ilustrar o quão complicado pode ser calcular derivadas fracionárias de funções simples. Na prática, o resultado que vamos enunciar sem prova é de pouca, ou mesmo nenhuma, utilidade prática devido a sua complexidade. A falta de uma regra simples para a derivada de funções compostas é a maior dificuldade para o uso do Cálculo Fracionário em aplicações. A Regra da Cadeia para derivadas inteiras de ordem m já é de pouca utilidade quando m é grande. Essa regra é dada pela fórmula de Faà di Bruno

Teorema 4.4.4 (Fórmula de Faà di Bruno) *Sejam $f, g \in C^m[a, b]$ e $m \in \mathbb{N}$. Então*

$$D_x^m g(f(x)) = m! \sum_{k=1}^m D_u^k g(u)|_{u=f(x)} \sum_{l=1}^m \prod_{i=1}^l \frac{1}{P_i!} \left(\frac{D_x^l f(x)}{l!} \right)^{P_i}, \quad (4.28)$$

onde a segunda soma \sum estende-se sobre todas as combinações de inteiros positivos P_1, P_2, \dots, P_m tais que

$$\sum_{l=1}^m lP_l = m \quad e \quad \sum_{l=1}^m P_l = k. \quad (4.29)$$

Para derivadas de Riemann-Liouville temos [7, 9]:

Teorema 4.4.5 (Fórmula de Faà di Bruno para derivadas de Riemann-Liouville)

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções analíticas em $[a, b]$, e seja $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Então

$$\begin{aligned} {}_a D_x^\alpha g(f(x)) &= \sum_{j=1}^{\infty} \binom{\alpha}{j} \frac{j!(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} \sum_{k=1}^j D_u^k g(u)|_{u=f(x)} \sum \prod_{l=1}^j \frac{1}{P_l!} \left(\frac{D_x^l f(x)}{l!} \right)^{P_l} \\ &+ \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} g(f(x)), \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde a terceira soma \sum estende-se sobre todas as combinações de inteiros positivos P_1, P_2, \dots, P_j tais que

$$\sum_{l=1}^j lP_l = m \quad e \quad \sum_{l=1}^j P_l = k. \quad (4.31)$$

4.5 Relações entre integrais e derivadas de Riemann-Liouville

Nesta seção vamos estudar as relações mais importantes entre as derivadas e integrais de Riemann-Liouville. Definimos em (4.16) e (4.17) as derivadas de Riemann-Liouville como sendo a derivada de ordem inteira $n = [\alpha] + 1$ de uma integral fracionária de ordem $n - \alpha$. No entanto, essa definição não é única, como pode ser visto pelo Lema abaixo:

Lema 4.5.1 *Seja $\alpha \in \mathbb{R}_+$, e $m \in \mathbb{N}_+$ tal que $m > \alpha$. Então*

$${}_a D_x^\alpha f(x) = D_x^m {}_a J_x^{m-\alpha} f(x). \quad (4.32)$$

Prova: A condição $m > \alpha$ implica que $m \geq n = [\alpha] + 1$. Da propriedade de semigrupo das derivadas inteiras (4.23), e das integrais fracionárias (4.10) e (4.15), obtemos

$$\begin{aligned} D_x^m {}_a J_x^{m-\alpha} f(x) &= D_x^n D_x^{m-n} {}_a J_x^{m-n} {}_a J_x^{n-\alpha} f(x) \\ &= D_x^n {}_a J_x^{n-\alpha} f(x) = {}_a D_x^\alpha f(x), \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde $D_x^{m-n} {}_a J_x^{m-n} = \mathbf{1}$ já que D_x^{m-n} e ${}_a J_x^{m-n}$ são derivadas e integrais usuais de ordem inteira, e usamos a definição (4.16) \square .

Além de mostrar que as definições (4.16) e (4.17) não são únicas, o Lema acima permite provar que a derivada fracionária de Riemann-Liouville (4.16) é a operação inversa à integral de Riemann-Liouville (4.8):

Teorema 4.5.1 *Seja $\alpha > 0$. Então, para toda $f \in L_1[a, b]$ temos*

$${}_a D_x^\alpha {}_a J_x^\alpha f(x) = f(x). \quad (4.34)$$

Prova: O caso $\alpha = 0$ é trivial. Vamos então considerar $\alpha > 0$. Usando o Lema (4.5.1) e a propriedade (4.10) obtemos

$${}_a D_x^\alpha {}_a J_x^\alpha f(x) = D_x^m {}_a J_x^{m-\alpha} {}_a J_x^\alpha f(x) = D_x^m {}_a J_x^m f(x) = f(x) \quad \square. \quad (4.35)$$

Enquanto a derivada de Riemann-Liouville é a operação inversa da integral, podemos provar que a integral não é o inverso da derivada. No cálculo usual temos o Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 4.5.2 (Teorema Fundamental do Cálculo) *Seja $f \in C^1[a, b]$, então*

$${}_a J_x^1 D_x^1 f(x) = \int_a^x \frac{df(u)}{du} du = f(x) - f(a). \quad (4.36)$$

Para o Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville temos

Teorema 4.5.3 *Seja $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e $n = [\alpha] + 1$. Consideremos ainda que ${}_a J_x^{n-\alpha} f(x)$ exista. Então,*

$${}_a J_x^\alpha {}_a D_x^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} \lim_{z \rightarrow a^+} D_x^{n-k-1} {}_a J_x^{n-\alpha} f(x). \quad (4.37)$$

A prova do Teorema (4.5.3) pode ser encontrada em diversos livros textos, por exemplo, veja [9].

5 Uma Gravitação Fracionária

Neste capítulo apresentaremos uma teoria alternativa para a gravitação baseada no uso do cálculo fracionário. O objetivo é obter uma teoria que possa explicar a anomalia observada na curva de rotação das galáxias sem a necessidade de incluir matéria escura. A existência ou não da matéria escura é um dos maiores mistérios da física na atualidade. De fato, ainda não sabemos se a discrepância na curva de rotação das galáxias é consequência da existência da matéria escura ou é uma evidência de que nossa compreensão sobre as leis da Natureza (nossas teorias) estão equivocadas. Como dizia Richard Feynman: “a natureza é um enorme jogo de xadrez disputado por deuses, e que temos o privilégio de observar. As regras do jogo são o que chamamos de física fundamental, e compreender essas regras é a nossa meta”.

5.1 A gravitação fracionária

Sem a hipótese de matéria escura, e preservando a mecânica newtoniana, para poder descrever a curva de rotação observada das galáxias deveríamos ter uma força de gravidade caindo mais lentamente com a distância. Mais precisamente, para distâncias da ordem de centenas à milhares de anos-luz a gravidade não seria inversamente proporcional ao quadrado da distância. Como na escala do sistema solar a interação gravitacional é observada, com grande precisão, como sendo inversamente proporcional ao quadrado da distância, precisaríamos de um mecanismo para modificar a forma da força gravitacional com a distância. Em trabalhos recentes foi proposto que se a dimensão do espaço-tempo não fosse inteira, resultando em equações de campo com derivadas fracionárias, efeitos que são atribuídos a matéria e a energia escuras poderiam ser descritos de forma unificada por uma dinâmica de dimensão do espaço-tempo [2]. Neste caso a dimensão seria uma variável dinâmica dependendo da posição e do tempo [2].

Partindo desta última hipótese de dimensão espacial não inteira podemos modificar a gravitação newtoniana. Se considerarmos que esta nova teoria preserve a conservação do fluxo total do campo gravitacional, resultado que está diretamente relacionado à conservação de energia, devemos ter um fluxo independente da distância à fonte do campo.

Por exemplo, na gravitação newtoniana o fluxo total através de uma superfície S esférica de raio r é

$$\text{Fluxo} = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_S F dA = \int_S \frac{GM}{r^2} r^2 d\Omega = 4\pi GM, \quad (5.1)$$

onde $\vec{F} = \frac{GM}{r^2} \hat{r}$ é o campo de gravitação newtoniano, $dA = r^2 d\Omega$ é o elemento de área da superfície esférica S , e $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido. Vamos supor agora que para distâncias de centenas a milhares de anos-luz o módulo do campo de gravidade não é mais inversamente proporcional ao quadrado da distância, mas sim dado por:

$$F_\alpha = \frac{G_\alpha M}{r^{2\alpha}}, \quad (5.2)$$

onde $0 < \alpha \leq 1$ e a constante de gravitação G_α tem dimensão $\frac{[L]^{1+2\alpha}}{[M][T]^2}$, sendo $[L]$, $[M]$ e $[T]$ as unidades de comprimento, massa e tempo, respectivamente. Neste caso, para o fluxo total do campo ser independente da distância deveríamos ter um espaço com dimensão não inteira, de forma que o elemento de área seja dado por $dA = r^{2\alpha} d\Omega$. Neste caso:

$$\text{Fluxo} = \int_S \vec{F}_\alpha \cdot d\vec{A} = \int_S F_\alpha dA = \int_S \frac{G_\alpha M}{r^{2\alpha}} r^{2\alpha} d\Omega = 4\pi G_\alpha M. \quad (5.3)$$

Em um tal espaço com dimensão não inteira, como em um espaço fractal, os operadores com derivadas inteiras não são bem definidos. Nesta situação as equações de campo envolveriam derivadas fracionárias [2]. Neste contexto podemos definir o campo de gravitação à partir de um operador gradiente com derivadas fracionárias de um potencial ϕ_α como

$$\vec{F}_\alpha = \nabla^\alpha \phi_\alpha = -{}_0D_r^\alpha \left(\frac{\Gamma(1-2\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{G_\alpha M}{r^\alpha} \right) \hat{r} = -\frac{G_\alpha M}{r^{2\alpha}} \hat{r}, \quad (5.4)$$

onde usamos a (4.20) com $a = 0$, $x = r$ e $\beta = -1$, e definimos a função potencial

$$\phi_\alpha = -\frac{\Gamma(1-2\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{G_\alpha M}{r^\alpha}.$$

5.2 Relação entre velocidade orbital e distância ao Sol na gravitação fracionária

O objetivo principal deste trabalho é investigar a relação entre a velocidade orbital e a distância ao centro da órbita em uma teoria alternativa à gravitação newtoniana. A curva de rotação das galáxias está diretamente relacionada à esta relação velocidade/distância. Por simplicidade, vamos supor válidas as leis da mecânica newtoniana, modificando apenas

a gravitação. Vamos ainda considerar apenas órbitas circulares. Neste caso, o módulo da força centrípeta é igual ao módulo da força de gravitação fracionária (5.2), ou seja,

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{G_\alpha M m}{r^{2\alpha}},$$

onde v é o módulo da velocidade do planeta. Portanto, a velocidade orbital na gravitação fracionária cai com a distância ao Sol como

$$v = \frac{\sqrt{G_\alpha M}}{\sqrt{r^{2\alpha-1}}}, \quad (5.5)$$

onde $0 < \alpha \leq 1$. Na Figura 3, apresentamos o comportamento da velocidade orbital em função de r para vários valores de α , onde consideramos para efeito de comparação, sem perda de generalidade, $G_\alpha M = 1$.

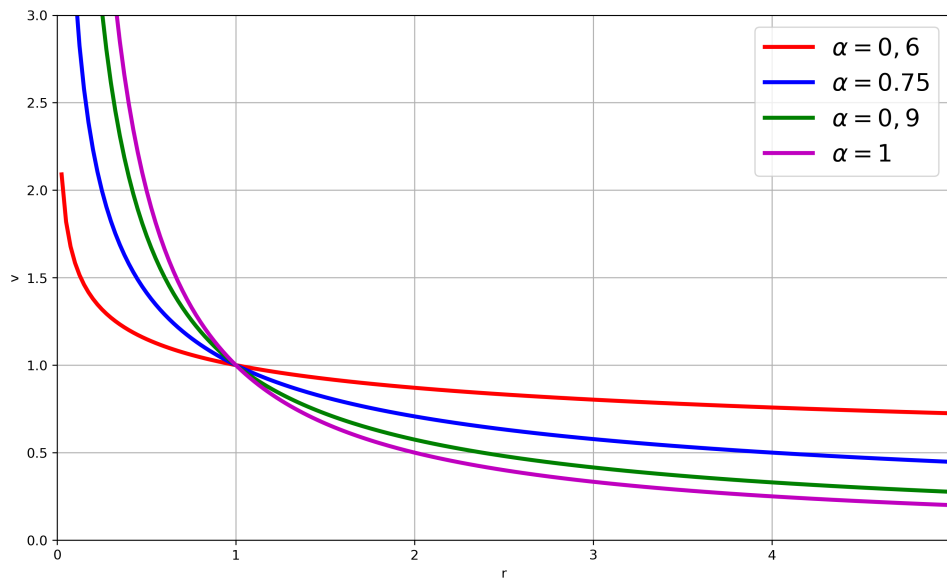


Figura 3 – Velocidade orbital em função de r para diversos valores de α .

Vemos na Figura 3 que a gravitação fracionária resulta em uma velocidade orbital que cai mais lentamente com a distância ao Sol do que a gravitação newtoniana. Este resultado está de acordo com o esperado para uma teoria alternativa a existência da matéria escura.

6 Conclusão

Neste trabalho de conclusão de curso formulamos uma teoria modificada para a gravitação com o objetivo de estudar o problema da curva de rotação das galáxias. Em vez de supor a existência de um tipo diferente de matéria (a matéria escura) para explicar uma queda mais lenta do que a prevista pela gravitação newtoniana para a velocidade orbital de uma estrela ao redor do centro da galáxia, partimos da hipótese de que a teoria de gravitação newtoniana precisa ser modificada.

A teoria de gravitação que propomos neste trabalho baseia-se em uma recente hipótese de que a dimensão do espaço-tempo é não inteira, nem constante [2]. Como na escala do sistema solar a interação gravitacional é observada, com grande precisão, como sendo inversamente proporcional ao quadrado da distância, precisaríamos de um mecanismo para modificar a forma da força gravitacional com a distância. Em trabalhos recentes foi proposto que se a dimensão do espaço-tempo for não inteira, resultando em equações de campo com derivadas fracionárias, efeitos que são atribuídos a matéria e a energia escuras poderiam ser descritos de forma unificada por uma dinâmica para a dimensão do espaço-tempo [2]. Neste caso a dimensão seria uma variável dinâmica dependendo da posição e do tempo [2].

Para uma primeira análise desta possibilidade de um espaço-tempo com dimensão não inteira descrever a curva de rotação das galáxias sem a necessidade de introduzir a matéria escura, propomos uma modificação na gravitação newtoniana para espaços com dimensão não inteiras. Em um tal espaço com dimensão não inteira, como em um espaço fractal, os operadores com derivadas inteiras não são bem definidos. Nesta situação as equações de campo envolveriam derivadas fracionárias [2]. Neste contexto, definimos um campo de gravitação à partir de um operador gradiente com derivadas fracionárias de um potencial. Para investigar se com esta teoria a velocidade orbital de planetas/estrelas caem com a distancia mais lentamente do que com a gravitação newtoniana, obtivemos a velocidade orbital para o caso de um campo central e uma órbita circular. Nosso resultados mostram que neste caso a velocidade orbital cai mais lentamente do que no caso da gravitação newtoniana.

O resultado que obtivemos motiva futuras pesquisas do uso do cálculo fracionária como alternativa à hipótese de matéria escura. Uma continuação natural deste trabalho é usar a gravitação fracionária proposta para obter a curva de rotação de galáxias partindo da densidade de massa bariônica obtida por observações astronômicas. Outra possibilidade é estudar a modificação da mecânica newtoniana através do uso do cálculo fracionário. Esta possibilidade iria de encontro à proposta da teoria MOND, que modifica a mecânica newtoniana mas preserva a gravitação de Newton. A inclusão de derivadas fracionárias na dinâmica, e não na gravitação, permitiria o estudo de feitos dissipativos e de não localidade no problema. Finalmente, a terceira possibilidade de continuação consistiria em estudar o problema da dimensão não inteira e do uso do cálculo fracionário em um contexto relativístico, como sugerido em [2].

Referências

- [1] B. Famaey and S. S. McGaugh, *Modified Newtonian Dynamics (MOND): Observational Phenomenology and Relativistic Extensions*, *Living Reviews in Relativity*, vol. 15:10 (2012).
- [2] R. Herrmann, *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists*, 2 ed., World Scientific Publishing Company (2014).
- [3] <https://science.nasa.gov/astrophysics/focus-areas/what-is-dark-energy>
- [4] *Hindawi Publishing Corporation Discrete Dynamics in Nature and Society* Volume 2011, Article ID 562494, 15 pages, doi:10.1155/2011/562494
- [5] *Mecanica analitica Nivaldo A.Lemos 2004*
- [6] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical mechanics*, 3 ed., San Francisco : Addison Wesley, (2002).
- [7] K. B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York (1974).
- [8] I. Podlubny, *Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation* em *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 5 (2002).
- [9] K. Diethelm, *The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*, Heidelberg and New York: Springer-Verlag (2010).