

Nickolas Leitão Dias

A Teoria da Flexão de Placas Envolvendo a Equação Diferencial de Lagrange

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Novembro, 2019

Nickolas Leitão Dias

A Teoria da Flexão de Placas Envolvendo a Equação Diferencial de Lagrange

Trabalho de Conclusão de Curso, Matemática Aplicada Bacharelado, submetido por Nickolas Leitão Dias junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Matemática Aplicada Bacharelado

Orientador: Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Novembro, 2019

Este trabalho é dedicado à minha família, que mesmo estando longe, me apoiou nos momentos mais difíceis. E a todas as pessoas que amo.

Estude a si mesmo, observando que o auto conhecimento traz humildade e sem humildade é impossível ser feliz.

(Allan Kardec)

Agradecimentos

A Deus, por todo seu amparo e que esteve sempre junto comigo nessa caminhada mantendo-me firme e forte.

Aos meus pais, Simone Catarina Feijó Leitão e Rogério Godoy Dias, por toda a educação e apoio. E também por todo amor e carinho.

A minha namorada Rosana Ribeiro da Costa, que sempre esteve do meu lado. Assim também como meus amigos presentes pela motivação, mas em particular, a Juliana Teixeira.

A minha orientadora Bárbara Rodriguez por toda a orientação, paciência, conhecimento e conversa. Muito obrigado!

A todos professores, que fizeram parte do meu desenvolvimento educacional, aquele eterno agradecimento por ter terem compartilhado suas experiências e o valor do que é o conhecimento.

A Universidade Federal do Rio Grande por todo o acolhimento e hospitalidade que me deram no momento mais importante da minha vida profissional. Eterna Mãe FURG!

Resumo

Este trabalho tem por finalidade apresentar a solução da Equação Diferencial de Lagrange, uma equação diferencial de quarta ordem, obtida a partir do emprego da Teoria de Flexão das Placas e das hipóteses da Teoria de Kirchoff. A solução dessa equação, que descreve o comportamento físico de uma placa (elemento estrutural de uma edificação), é obtida de acordo com a condição de contorno pré-estabelecida, através de dois métodos: a Solução de Navier e a Solução de Lévy. Os resultados obtidos são comparados com dados disponíveis na literatura. Os algoritmos desenvolvidos foram implementados em linguagem Octave versão 5.1.0.

Palavras-chaves: Equações Diferenciais, Flexão de placas, Condições de contorno, Solução de Navier, Solução de Lévy, Linguagem Octave.

Abstract

This paper aims to present the solution of the Lagrange Differential Equation, a fourth order differential equation, obtained from the use of the Plate Flexion Theory and the hypotheses of the Kirchoff Theory. The solution of this equation, which describes the physical behavior of a plate (structural element of a building), is obtained according to the predefined boundary condition, using two methods: the Navier Solution and the Lévy Solution. The results obtained are compared with data available in the literature. The developed algorithms were implemented in Octave language version 5.1.0.

Key-words: Differential Equations, Plate Flexion, Boundary Conditions, Navier Solution, Lévy Solution, Octave Language.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Estrutura de uma laje	10
Figura 2 – Representação de um vetor	17
Figura 3 – Interpretação Geométrica da Derivada	19
Figura 4 – Carga Concentrada/Carga Distribuída	37
Figura 5 – Convenção de apoios	37
Figura 6 – Esforço Cortante e Momento Fletor	40
Figura 7 – Tensões em um Elemento Tridimensional	41
Figura 8 – Deformações do elemento no plano xy	42
Figura 9 – Deformação de uma seção transversal	46
Figura 10 – Tensões em uma fibra genérica	48
Figura 11 – Equilíbrio do elemento de placa	49
Figura 12 – Placa engastada em todos os lados	51
Figura 13 – Placa simplesmente apoiada em todos os lados	52
Figura 14 – Placa engastada e livre	52
Figura 15 – Placa com bordos apoiados e condições distintas	58
Figura 16 – Placa retangular simplesmente apoiada	63
Figura 17 – Solução de Navier para a flexão máxima da placa	65
Figura 18 – Comportamento da solução de Navier para w_{max}	66
Figura 19 – Sub-rotina para o cálculo de M_x - Solução de Navier	67
Figura 20 – Momento fletor M_x - Solução de Navier, até 80 termos	68
Figura 21 – Momento fletor M_x - Solução de Navier, acima de 80 termos	68
Figura 22 – Sub-rotina para o cálculo M_y	70
Figura 23 – Comportamento da solução M_y - Solução de Navier - até 50 termos	70
Figura 24 – Comportamento da solução M_y - Solução de Navier - número de termos maior que 50	71
Figura 25 – Placa retangular parcialmente carregada	73
Figura 26 – Cálculo das Constantes	76
Figura 27 – Sub-rotina para cálculo de w_p equação (4.27)	79
Figura 28 – Gráfico da solução w_p equação (4.27)	79
Figura 29 – Sub-rotina para o cálculo de w_p equação (4.28)	80
Figura 30 – Gráfico da solução w_p equação (4.28)	81
Figura 31 – Sub-rotina para calcular w_h para $k_m = 2, m$ ímpar	82
Figura 32 – Gráfico da solução w_h para $k_m = 2, m$ ímpar	82
Figura 33 – Sub-rotina para calcular w_h para $k_m = 4, m = 2, 6, 10, \dots$	83
Figura 34 – Solução w_h para $k_m = 4, m = 2, 6, 10, \dots$	84

Lista de tabelas

Tabela 1 – Flexão Máxima - Solução de Navier	65
Tabela 2 – Flexão Máxima - Solução de Navier	69
Tabela 3 – Flexão Máxima - Solução de Navier	71
Tabela 4 – Comparação dos Coeficientes de Flexão e Momentos Fletores	72
Tabela 5 – Flexão Máxima - Solução de Lévy	80
Tabela 6 – Flexão Máxima - Solução de Lévy	83
Tabela 7 – Comparação dos Coeficientes de Flexão	84

Lista de Símbolos

Letras Romanas Maiúsculas

D	Rigidez de flexão da placa
E	Módulo de elasticidade longitudinal
G	Módulo de elasticidade transversal
M_x	Momento fletor em x
M_y	Momento fletor em y
M_{xy}	Momentos torsores aos eixos x e y
V_x	Esforço cortante em x
V_y	Esforço cortante em y

Letras Romanas Minúsculas

a, b	Dimensões da placa
dx, dy, dz	Elementos infinitesimais da placa nas direções x, y e z
m, n	Índices dos somatórios
p_0	Carga uniformemente distribuída
u, v, w	Deslocamentos dos pontos médios da placa, nas direções x, y e z

Letras Gregas Minúsculas

α, β, γ	Coefficientes numéricos para cálculo de flexões e momentos
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Ângulos de distorções na seção da placa
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Deformações lineares nas direções x, y e z
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Rotação de seções da placa nas direções x, y e z
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Tensões normais nas direções x, y e z
$\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}$	Tensões tangenciais em coordenadas retangulares
ν	Coefficiente de Poisson

Sumário

	Introdução	10
1	TEORIA MATEMÁTICA	13
1.1	Conceitos sobre Funções	13
1.1.1	Função Exponencial	14
1.1.2	Funções Hiperbólicas	14
1.1.3	Funções Trigonométricas	15
1.2	Conceitos de Geometria Analítica	17
1.3	Conceitos de Cálculo Diferencial e Integral	17
1.4	Funções de Classe C	21
1.5	Equações Diferenciais	22
1.6	Equações Lineares Não-Homogêneas com Coeficientes Constantes .	23
1.7	Problemas de Valor Inicial e de Contorno EDP's	26
1.8	Relações de Ortogonalidade	26
1.9	Sequências e Séries	29
1.10	Séries de Fourier	30
1.11	Séries Duplas de Fourier	33
2	CONCEITOS DE ENGENHARIA CIVIL	36
2.1	Noções de Resistência dos Materiais	36
2.2	Algumas Relações da Teoria da Elasticidade	40
3	EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE LAGRANGE	45
3.1	Condições de Contorno	51
3.2	Solução da Equação Diferencial de Lagrange	53
3.2.1	Solução ou Método de Navier	53
3.2.2	Solução ou Método de Lévy	57
4	APLICAÇÕES DOS MÉTODOS DE NAVIER E LÉVY	63
4.1	Solução de Navier	63
4.2	Problema pela Solução de Lévy	72
4.2.1	Obtenção da Solução Particular w_p	79
4.2.2	Obtenção da Solução Homogênea w_h	81
5	CONCLUSÃO	86
	REFERÊNCIAS	88

Introdução

A Matemática é uma ciência indispensável para o desenvolvimento social e tecnológico do ser humano. Essa ferramenta está presente nas mais diversas situações do cotidiano, e abrange o estudo, a compreensão e a sistematização de fenômenos modelados por equações, algoritmos e formas geométricas. Além disso, tem uma importância estratégica, pois desenvolve o pensamento lógico, sendo imprescindível para a geração de profissionais qualificados nas áreas de ciências exatas e engenharias e aptos para competir no mercado de trabalho do mundo contemporâneo. A partir dessa ciência, desenvolvem-se áreas como a da Engenharia Civil, que é o ramo que engloba a concepção, o projeto, a construção e a manutenção de todos os tipos de infraestrutura (edificações, estradas, pontes) necessários ao bem estar e ao desenvolvimento da sociedade (LUCA, 2018).

As teorias estudadas na Engenharia Civil são permeadas por conceitos matemáticos e englobam desde a Geometria Analítica, passando pela Álgebra Linear, até o Cálculo Diferencial e Integral (COSTA, 2010). Dentre os tópicos estudados, as aplicações de equações diferenciais merecem destaque, pois representam matematicamente modelos que descrevem o comportamento dos elementos estruturais de uma edificação. No âmbito estrutural, há elementos fundamentais, dentre eles, as lajes, usualmente conhecidas como placas de concreto que podem apoiar-se em pilares ou sustentar-se em vigas (Figura 1). As lajes podem estar vinculadas à estrutura e, de acordo com o tipo de vinculação de sua borda, classificadas como livre, engastada ou apoiada.

Figura 1 – Estrutura de uma laje



Fonte: <http://www.utfpr.edu.br/reuni/fotosLD-4/2010.06/Concretagem>

As placas, geralmente, destinam-se a suportar cargas verticais que atuam nas estruturas, transmitindo-as para os respectivos apoios. Além de ações provenientes de

pessoas, de móveis e de paredes, conhecidas como cargas de construção, as lajes estão sujeitas ainda a ações de incêndios, explosões, entre outros (FILHO, 2004). Para o estudo da Teoria de Flexão de Placas foram desenvolvidas algumas teorias, entre as quais destaca-se a Teoria Clássica das Placas Finas, proposta por Gustav R. Kirchoff, que prevê simplificações e resulta em uma equação diferencial de quarta ordem (TAGUTI, 2010).

A fim de ilustrar a aplicabilidade de conceitos matemáticos na Engenharia Civil, esse trabalho tem por finalidade apresentar a dedução e a solução da Equação Diferencial da Placa, conhecida como Equação de Lagrange. Tal equação diferencial é obtida a partir do emprego da Teoria de Flexão das Placas e das hipóteses da Teoria de Kirchoff (ARAÚJO, 2003). A solução dessa equação, que descreve o comportamento físico de uma placa, é obtida de acordo com a condição de contorno pré-estabelecida, através de dois métodos: a Solução de Navier, através de Séries Duplas de Fourier e a Solução de Lévy, que utiliza Série de Fourier em uma variável (TIMOSHENKO, 1959). A implementação computacional de algoritmos para o cálculo das soluções, pelos dois métodos propostos no presente trabalho, foi desenvolvida para a obtenção dos resultados, bem como sua representação gráfica, tendo em vista uma maior eficácia em relação a convergência desses resultados. A implementação foi feita em linguagem Octave versão 5.1.0 (disponível <https://www.gnu.org/software/octave/>).

Para atingir os objetivos propostos, o trabalho está estruturado da seguinte forma: no capítulo 1, introduzem-se os principais conceitos matemáticos presentes na dedução da Equação, tais como, conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, Equações Diferenciais e Séries de Fourier.

No capítulo seguinte, abordam-se os conceitos de Engenharia Civil, fundamentados em (HIBBELER, 2004) e (ARAÚJO, 2003), essenciais para compreender os elementos estruturais de uma edificação e que serão utilizados na dedução da Equação junto com a fundamentação matemática. Além disso, descrevem-se algumas relações, envolvendo a Teoria da Elasticidade, também necessárias para deduzir a Equação de Lagrange.

No capítulo 3, tem-se a dedução da Equação Diferencial de Lagrange, assim como sua resolução, conforme as condições de contorno estabelecidas. A solução da equação é obtida analiticamente através de dois métodos: a Solução de Navier e a Solução de Lévy (TIMOSHENKO, 1959), admitindo-se as hipóteses baseadas na Teoria de Kirchoff como indicado em (ARAÚJO, 2003).

Por conseguinte, no quarto capítulo deste trabalho, apresenta-se a resolução de problemas aplicando-se a Solução de Navier e a Solução de Lévy (SZILARD, 2004). Tais problemas são resolvidos a partir da solução das equações do deslocamento w e dos momentos fletores M_x , M_y nas direções x e y , já que a placa é considerada um elemento bidimensional. Os algoritmos para a obtenção das soluções e sua representação gráfica são implementados em linguagem Octave. Os resultados obtidos são comparados com

dados disponíveis na literatura.

Finalmente, no capítulo 5, tem-se a conclusão, onde descrevem-se as considerações finais pertinentes ao trabalho.

1 Teoria Matemática

Neste capítulo apresenta-se a fundamentação matemática, base para a realização deste trabalho, destacando-se os conceitos necessários para o estudo da Equação de Lagrange.

1.1 Conceitos sobre Funções

Definição 1.1.1. Sejam A e B subconjuntos de \mathbb{R} . Uma função é uma lei ou regra que a cada elemento de A faz corresponder em um único elemento de B . O conjunto de A é chamado domínio de f e é denotado por $D(f)$. B é chamado contradomínio ou campo de valores de f . Escreve-se:

$$f : A \rightarrow B.$$

Definição 1.1.2. Se uma variável y depende de uma variável x de tal modo que cada valor de x determina exatamente um valor de y , então dizemos que y é uma função de x (ANTON, 2014). Ou seja,

$$y = f(x).$$

Definição 1.1.3. Seja D um conjunto de n -uplas de números reais (x_1, x_2, \dots, x_n) . Uma função a valores reais f em D é uma regra que associa um único número real

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{1.1}$$

a cada elemento em D . O conjunto D representa o domínio da função. O conjunto de valores de z assumidos por f é a imagem da função. z é a variável dependente de f , e diz-se que f é uma função de n variáveis independentes x_1, \dots, x_n (THOMAS, 2013b).

Definição 1.1.4. Uma função $f(x)$ é dita par (HSU, 1970) se satisfaz a condição de que

$$f(-x) = f(x), \forall x \text{ no domínio de } f. \tag{1.2}$$

Definição 1.1.5. Uma função $f(x)$ é dita ímpar (HSU, 1970) se satisfaz a condição de que

$$f(-x) = -f(x), \forall x \text{ no domínio de } f. \tag{1.3}$$

Deve-se notar que uma função par é simétrica em relação ao eixo vertical na origem, enquanto que uma função ímpar é anti-simétrica em relação ao eixo vertical na origem (HSU, 1970).

Destacam-se, a seguir, algumas propriedades das funções pares e ímpares (HSU, 1970) empregadas neste trabalho:

1. O produto de duas funções pares é par.
2. O produto de duas funções ímpares é par.
3. O produto de uma função par por uma ímpar é uma função ímpar.

1.1.1 Função Exponencial

Definição 1.1.6. Chama-se função exponencial de base a , a função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} que associa a cada x real o número real a^x , sendo a um número real positivo, $a > 0, a \neq 1$, ou seja,

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y = a^x, a > 0, a \neq 1.$$

O domínio da função exponencial corresponde ao conjunto dos números reais. Já a imagem é o intervalo $(0, \infty)$ (GONÇALVES; FLEMMING, 2006).

1.1.2 Funções Hiperbólicas

As funções hiperbólicas são formadas a partir de combinações de duas funções exponenciais e^x e e^{-x} . As funções hiperbólicas simplificam diversas expressões matemáticas e são importantes em aplicações práticas, tendo papel fundamental na determinação de soluções de equações diferenciais.

Nesta seção, será feita uma breve apresentação das funções hiperbólicas, como suas derivadas são calculadas e por que são consideradas primitivas importantes (THOMAS, 2013a).

De acordo com as Definições 1.2 e 1.3 de função par e ímpar, toda função f que seja definida em um intervalo centrado na origem pode ser escrita de uma maneira única como a soma de uma função par e de uma função ímpar. Nesse caso, tem-se

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \quad (1.4)$$

Ao substituir $f(x) = e^x$ na equação (1.4) tem-se

$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (1.5)$$

As partes par e ímpar de e^x são denominadas cosseno hiperbólico e seno hiperbólico de x , respectivamente.

Apresentam-se, desta maneira, as definições e identidades de acordo com a equação (1.5):

$$\sinh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (1.6)$$

e

$$\cosh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (1.7)$$

A partir das equações (1.6) e (1.7) são desenvolvidas outras identidades, como segue

$$\operatorname{tgh}(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \quad (1.8)$$

$$\operatorname{cotgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}, \quad (1.9)$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}, \quad (1.10)$$

$$\operatorname{cossech}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}. \quad (1.11)$$

Portanto, as equações (1.8), (1.9), (1.10) e (1.11) são identidades das funções hiperbólicas (THOMAS, 2013a).

As funções hiperbólicas serão usadas no momento de obter a solução homogênea da Equação de Lagrange.

1.1.3 Funções Trigonométricas

Nas funções trigonométricas tem-se exemplos de funções periódicas.

Definição 1.1.7. Uma função periódica (HSU, 1970) pode se definir como uma função para a qual, exista um $t \in \mathbb{R}$ tal que :

$$f(x) = f(x + T) \quad (1.12)$$

para todo valor de x . Através da repetição da equação 1.12, obtém-se

$$f(x) = f(x + nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.13)$$

onde T é chamado de período de f .

Definição 1.1.8. Define-se a função seno como a função f de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder o número real $y = \text{sen}(x)$, isto é,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &= \text{sen}(x). \end{aligned}$$

O domínio da função seno é o conjunto \mathbb{R} e conjunto imagem é o intervalo $[-1, 1]$.

A função $y = \text{sen}(x)$ é periódica e seu período é 2π , já que $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x)$.

Definição 1.1.9. Define-se a função cosseno como a função f de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder o número real $y = \text{cos}(x)$, isto é,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &= \text{cos}(x). \end{aligned}$$

O domínio da função cosseno é representado pelo conjunto \mathbb{R} e a imagem pelo intervalo $[-1, 1]$.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $\text{cos}(x + 2\pi) = \text{cos}(x)$. Portanto, a função cosseno é periódica e seu período é 2π (GONÇALVES; FLEMMING, 2006).

Exemplo 1.1.1. Determinar o período da função $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right) + \cos\left(\frac{x}{4}\right)$.

Se a função $f(x)$ é periódica com um período T , então de (1.12) tem-se

$$\cos\frac{1}{3}(x + T) + \cos\frac{1}{4}(x + T) = \cos\left(\frac{x}{3}\right) + \cos\left(\frac{x}{4}\right). \quad (1.14)$$

Posto que $\text{cos}(\theta + 2\pi m) = \text{cos}\theta$ para qualquer m inteiro tem-se que

$$\frac{1}{3}T = 2\pi m, \quad \frac{1}{4}T = 2\pi n, \quad (1.15)$$

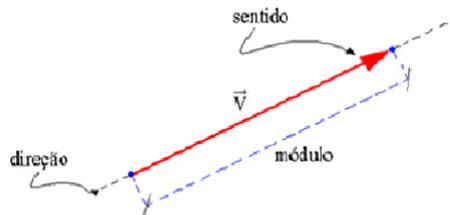
onde m e n são inteiros. Por conseguinte $T = 6\pi m = 8\pi n$; quando $m = 4$ e $n = 3$, obtém-se o valor mínimo para o período T .

1.2 Conceitos de Geometria Analítica

Definição 1.2.1. Um vetor é uma grandeza representada por um segmento de reta orientado, que, em linguagem habitual, chamamos de seta. Essa seta possui módulo (também chamado de comprimento ou magnitude), direção e sentido (STEINBRUCH, 1987).

Essa grandeza, por exemplo, é utilizada para denotar deslocamento, velocidade, aceleração e força. Na Figura 2, tem-se a representação de um vetor.

Figura 2 – Representação de um vetor



Fonte: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/conceito-vetor.htm>

Definição 1.2.2. Chama-se matriz de ordem m por n a um quadro de $m \times n$ elementos (números, funções, etc.) dispostos em m linhas e n colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

Cada elemento da matriz A é representado por dois índices: a_{ij} . O primeiro índice indica a linha e o segundo, a coluna a que o elemento pertence.

1.3 Conceitos de Cálculo Diferencial e Integral

Definição 1.3.1. Dada uma função f com domínio $D(f)$, seja a um ponto de acumulação de $D(f)$ e L um número. Diz-se que o número L é o limite de $f(x)$ com x tendendo a “ a ” se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\forall x \in D(f)$ e $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$ (RODRIGUEZ; MENEGHETTI; POFFAL, 2016).

Para indicar essa definição, escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Definição 1.3.2. Uma função f é contínua em $x = a$ (ponto de acumulação do domínio de f) se as seguintes condições forem satisfeitas:

- a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, ou seja, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
- b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Caso contrário, f é descontínua em $x = a$.

Formalmente, diz-se que uma função f é contínua em um ponto a se, dado um $\epsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Logo, para a função ser contínua, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (RODRIGUEZ; POFFAL; MENEGHETTI, 2016).

Definição 1.3.3. Uma função $f = f(x)$ é seccionalmente contínua sobre um intervalo real $[a, b]$ fechado e limitado, se ela é contínua no interior de um número finito de pontos x_1, x_2, \dots, x_n , existem os limites laterais à esquerda e a direita de f e a diferença entre esses dois limites laterais em cada ponto x_j (salto de f em x_j) deve ser sempre finita (RODRIGUEZ; POFFAL; MENEGHETTI, 2016). Ou seja:

- a) O intervalo pode ser subdividido em um número finito de subintervalos e em cada um deles a função é contínua.
- b) Os limites laterais de f quando x tende para os extremos desses subintervalos são finitos.

Logo, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f_1 = L$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f_2 = M$, com $L, M \in \mathbb{R}$.

Definição 1.3.4. A derivada de uma função $f(x)$ em relação à variável x é a função f' , cujo valor em x é

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (1.17)$$

desde que o limite exista.

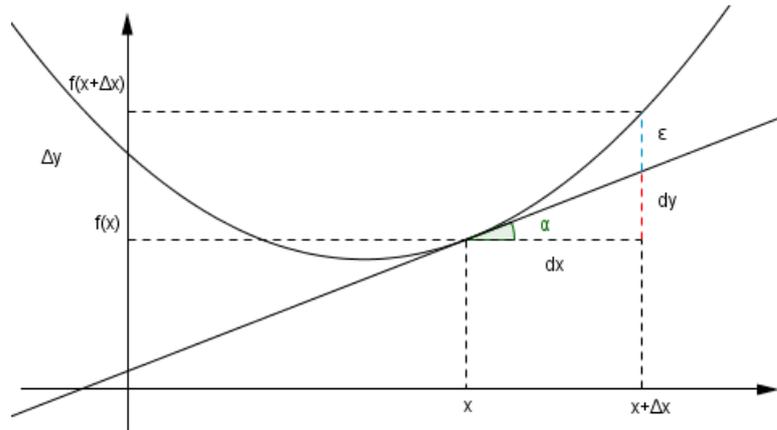
Usa-se a notação $f(x)$ na definição para enfatizar a variável independente x em relação a qual a função derivada $f'(x)$ que está sendo definida. O domínio de f' é conjunto de pontos no domínio de f para o qual o limite existe, o que significa que o domínio pode ser o mesmo ou menor que o domínio de f . Se f' existe em um determinado x , se diz que f é derivável em x . Se f' existe em cada ponto do domínio de f , chama-se f de derivável (THOMAS, 2013a).

Há vários modos de representar a derivada de uma função $y = f(x)$ conforme (THOMAS, 2013a). Algumas das notações alternativas mais comuns para a derivada são

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)] = D(f)(x) = D_x f(x). \quad (1.18)$$

Assim sendo, a derivada $\frac{dy}{dx}$ pode ser interpretada como o quociente entre dois acréscimos. Olha-se para dx como um acréscimo de x e, em seguida, procura-se uma interpretação para o acréscimo dy . Sabe-se que a derivada da função y , no ponto $(x, f(x))$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = f(x)$ e, a partir disso, entende-se dy como o acréscimo na ordenada da reta tangente conforme a Figura 3. Tem-se que $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Figura 3 – Interpretação Geométrica da Derivada



Fonte: Universidade Federal do Semiárido (UFERSA)

Observa-se, ainda, que Δy é o acúmulo na função $f(x)$, quando x passa para $x + dx$. O acréscimo dy pode ser entendido como um valor aproximado para Δy . O erro, $\epsilon = |\Delta y - dy|$ que se comete com esta aproximação, será menor quanto menor for o valor de dx .

O conceito de derivada de funções de uma variável pode ser estendido para funções de duas variáveis. Veja a Definição 1.3.5.

Definição 1.3.5. Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que envolve duas variáveis, e $(x_0, y_0) \in A$. Fixando $y = y_0$, pode-se considerar a função $f(x, y_0)$. A derivada de f no ponto $x = x_0$ denomina-se derivada parcial de f em relação a x no ponto (x_0, y_0) , é denotada por $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e definida por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \tag{1.19}$$

se o limite existir. Analogamente, define-se a derivada parcial de f em relação a y no ponto (x_0, y_0) por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}, \tag{1.20}$$

se o limite existir (GONÇALVES; FLEMMING, 1999).

Definição 1.3.6. Uma função F é uma antiderivada de uma função f em um dado intervalo aberto se $F'(x) = f(x)$ em cada x do intervalo (ANTON, 2014).

O processo de encontrar antiderivadas é denominado antiderivação, ou integração. Assim, se

$$\frac{d}{dx}[F'(x)] = f(x) \quad (1.21)$$

então, antiderivando ou integrando a função $f(x)$, obtém-se uma antiderivada da forma $F(x) + c$. Para enfatizar esse processo, reescreve-se a equação (1.21) usando notação integral

$$\int f(x)dx = F(x) + c. \quad (1.22)$$

O adjetivo indefinida enfatiza que o resultado da antiderivação é uma função “gênérica”, descrita só a menos de um termo constante. Logo, define-se:

Definição 1.3.7. Chama-se de Integral Indefinida de f e indica-se pelo símbolo $\int f(x)dx$ a uma primitiva qualquer de f adicionada a uma constante arbitrária c , conforme a equação (1.22).

Definição 1.3.8. Seja $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ tal que $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ com $k = 1, \dots, n - 1$. Uma função f é integrável em um intervalo fechado finito $[a, b]$ se o limite

$$\lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k \quad (1.23)$$

existir e não depender da escolha das partições ou da escolha dos pontos x_k^* nos subintervalos. Nesse caso, denota-se o limite pelo símbolo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k \quad (1.24)$$

que é denominado integral definida de f de a até b (ANTON, 2014).

Os números a e b são denominados limite de integração inferior e limite de integração superior, respectivamente, e $f(x)$ é denominado integrando.

A notação usada para integral definida merece algum comentário. Historicamente, a expressão $f(x)dx$ era interpretada como uma área infinitesimal de um retângulo de altura $f(x)$ e base infinitesimal dx . Então, área total sob a curva era obtida somando

essas áreas infinitesimais. O símbolo f é um S espichado que era usado para indicar soma. Logo, o símbolo \int de integral e o símbolo dx podem servir para lembrar que a integral definida é o limite de um somatório quando $\Delta x_k \rightarrow 0$. Essa soma é chamada de Integral de Riemann para homenagear o matemático alemão Bernhard Riemann, que formulou muitos conceitos básicos do Cálculo Integral (ANTON, 2014).

Teorema 1.3.1. Se f for integrável em $[a, b]$ e se F for uma antiderivada de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

No caso, a integral definida pode ser calculada encontrando-se uma antiderivada do integrando e, então, subtraindo-se o valor dessa antiderivada no extremo inferior de integração de seu valor no extremo superior de integração (ANTON, 2014).

A noção de integral definida pode ser estendida para funções de duas ou mais variáveis. Nesse caso, calcula-se o volume sob uma superfície (ANTON, 2014). Basta estender a equação (1.24) para duas ou mais variáveis, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k. \quad (1.25)$$

Logo,

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k. \quad (1.26)$$

que é denominada integral dupla de $f(x, y)$ em $R = [a, b] \times [c, d]$ (ANTON, 2014).

1.4 Funções de Classe C

Para definir as funções de Classe C necessita-se definir antes o que é uma aplicação diferenciável.

Definição 1.4.1. Seja $U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Diz-se que uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em um ponto $x \in U$ quando existe, na vizinhança de x , uma boa aproximação linear para f (LIMA, 2004).

É claro que se f é diferenciável no ponto x , então f é contínua neste ponto.

Portanto, pode-se definir as funções de classes C , que aparecerão neste trabalho, conforme segue:

Definição 1.4.2. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui as n derivadas parciais em todos os pontos do aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Ficam então definidas n funções

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{onde} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x). \quad (1.27)$$

Se estas funções forem contínuas em U , diz-se que f é uma função de classe C^1 e escreve-se $f \in C^1$ (LIMA, 2009).

Definição 1.4.3. Quando f é duas vezes diferenciável em todos os pontos do aberto U , se diz que f é duas vezes diferenciável em U . Se além disso, f'' for contínua, se diz que f é duas vezes continuamente diferenciável em U e escreve-se $f \in C^2$. Logo, pode-se dizer que f é de classe C^2 (LIMA, 2004).

1.5 Equações Diferenciais

A Equação de Lagrange, objeto de estudo deste trabalho, é uma Equação Diferencial Parcial, logo, é necessário definir algumas propriedades para a obtenção de sua solução. A seguir apresentam-se tais definições e propriedades.

Definição 1.5.1. Uma equação que contém as derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de Equação Diferencial (ED) (ZILL, 2011).

Definição 1.5.2. Se uma equação contiver somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente, ela será chamada de Equação Diferencial Ordinária (EDO) (ZILL, 2011).

Definição 1.5.3. Uma Equação a Derivadas Parciais ou Equação Diferencial Parcial (EDP) é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ e derivadas parciais de uma função (variável dependente) $u = u(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$. De maneira mais precisa, uma EDP em n variáveis independentes x_1, \dots, x_n é uma equação da forma:

$$F \left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k} \right) = g(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.28)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, Ω é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , F é uma função dada, $u = u(x)$ é a função que quer se determinar e $g(x_1, \dots, x_n)$ é o termo da equação que só depende das variáveis independentes (LÓRIO, 1989).

A ordem de uma EDP é dada pela derivada parcial de maior ordem que ocorre na equação (LÓRIO, 1989).

A EDP representada pela equação (1.28) é dita linear se F é linear em u e em todas as derivadas parciais de u que ocorrem na equação; caso contrário, ela será dita não linear.

Definição 1.5.4. Dada uma EDP Linear $L[u] = g(x)$, a EDP será dita homogênea para $g(x) = 0$. Neste caso, tem-se

$$L[u] = 0.$$

Para $g(x) \neq 0$, a EDP será dita não-homogênea.

Definição 1.5.5. Dada uma EDP Linear não-homogênea $L[u] = g(x)$, $g(x) \neq 0$, a EDP homogênea $L[u] = 0$ será chamada de equação homogênea associada.

Aplicando-se a linearidade do Operador L , pode-se perceber que qualquer combinação linear de soluções da equação $L[u] = 0$ também é solução desta equação, isto é, dados $u_1 = u_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $u_2 = u_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ soluções da equação homogênea $L[u] = 0$ tem-se, que

$$L[u_1 + \alpha u_2] = L[u_1] + \alpha L[u_2] = 0 + \alpha 0 = 0. \quad (1.29)$$

Dessa forma, sendo u_1, u_2, \dots, u_n soluções de $L[u] = 0$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ escalares, tem-se

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \quad (1.30)$$

também é uma solução de $L[u] = 0$. Esta consequência de (1.29) é chamada de Princípio da Superposição. Baseado neste princípio, destaca-se o método de resolução de EDP's chamado de Método de Separação de Variáveis, uma técnica clássica e bastante eficaz na solução de várias EDP's. O leitor poderá obter maiores informações sobre o método em (LÓRIO, 1989).

Neste trabalho não será utilizado o Método de Separação de Variáveis para resolver a Equação de Lagrange, pois não é adequado para o problema proposto (LÓRIO, 1989), (JOHN, 1982). Particularmente, serão empregados métodos envolvendo a aplicação de Séries de Fourier em uma e duas variáveis. Esses métodos são utilizados conforme as condições de contorno estabelecidas, que serão abordadas ao longo do trabalho.

1.6 Equações Lineares Não-Homogêneas com Coeficientes Constantes

Essa seção tem como base (ABUNAHMAN, 1989).

A Equação de Lagrange é uma EDP Linear não-homogênea com coeficientes constantes (ARAÚJO, 2003). Desta forma, o método para determinar sua solução pode ser comparado ao método para resolver uma Equação Diferencial Ordinária. Seja a equação diferencial ordinária linear não-homogênea

$$A_0 \frac{d^n y(x)}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y(x)}{dx^{n-2}} + \dots + A_n y(x) = B(x), \quad (1.31)$$

$A_0 \neq 0$.

A solução geral da equação (1.31) é dada por

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x), \quad (1.32)$$

onde $y_h(x)$ é a função complementar de $y_p(x)$, ou ainda, a solução da equação homogênea associada e $y_p(x)$ é solução particular (supostamente conhecida). A fim de simplificar a notação empregada escreve-se, a partir daqui, y para denotar $y(x)$.

Derivando-se a equação (1.32) até a ordem da equação (1.31) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy_c}{dx} + \frac{dy_p}{dx} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d^2 y_h}{dx^2} + \frac{d^2 y_p}{dx^2} \\ &\vdots \\ \frac{d^n y}{dx^n} &= \frac{d^n y_h}{dx^n} + \frac{d^n y_p}{dx^n}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Substituindo-se a equação (1.33) em (1.31), tem-se

$$\begin{aligned} &\left[A_0 \frac{d^n y_p}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y_p}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y_p}{dx^{n-2}} + \dots + A_n y_p \right] + \\ &\quad + \left[A_0 \frac{d^n y_h}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y_h}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y_h}{dx^{n-2}} + \dots + A_n y_h \right] = B(x). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Como y_p é solução particular da equação dada, o primeiro termo da igualdade (1.34) satisfaz a equação (1.31). Assim,

$$A_0 \frac{d^n y_p}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y_p}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y_p}{dx^{n-2}} + \dots + A_n y_p = B(x) \quad (1.35)$$

e, conseqüentemente de (1.34),

$$A_0 \frac{d^n y_h}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y_h}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y_h}{dx^{n-2}} + \dots + A_n y_h = 0. \quad (1.36)$$

A equação (1.36) é uma equação linear homogênea, dita equação linear homogênea associada, cuja solução corresponde à uma função complementar da equação não-homogênea (1.31).

A dedução detalhada do método de solução das equações lineares homogêneas com coeficientes constantes pode ser encontrada em (ABUNAHMAN, 1989).

Para calcular a solução y_h supõe-se que Ce^{rx} , com $Ce^{rx} \neq 0$, é solução da equação (1.36). Logo, tem-se

$$A_0r^nCe^{rx} + A_1r^{n-1}Ce^{rx} + \dots + A_nCe^{rx} = 0. \quad (1.37)$$

Evidenciando o termo Ce^{rx} tem-se

$$Ce^{rx}[A_0r^n + A_1r^{n-1} + \dots + A_n] = 0. \quad (1.38)$$

Como $Ce^{rx} \neq 0$, pode-se escrever

$$A_0r^n + A_1r^{n-1} + \dots + A_n = 0, \quad (1.39)$$

que é chamada de equação característica (ou auxiliar) da equação dada.

Em relação à equação característica tem-se três casos a considerar:

- A equação característica admite somente raízes reais e distintas.

Nesse caso, a solução geral é dada por:

$$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + C_3e^{r_3x} + \dots + C_ne^{r_nx}. \quad (1.40)$$

- A equação característica admite raízes complexas distintas da forma $a + bi$ e $a - bi$, com $a, b > 0$ e números reais.

Nessa situação, para o caso particular de duas raízes, a solução geral é dada por:

$$y(x) = e^{ax}[C_1 \cos(bx) + C_2 \text{sen}(bx)]. \quad (1.41)$$

Para equações de ordem superior, o leitor poderá consultar (ZILL, 2011).

- A equação característica admite raízes múltiplas.

Nesse caso, a solução geral é dada por:

$$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2xe^{r_1x} + C_3x^2e^{r_1x} + \dots + C_px^{p-1}e^{r_1x} + C_{p+1}e^{r_{p+1}x} + \dots + C_ne^{r_nx}. \quad (1.42)$$

Cabe ressaltar que deve-se verificar, em cada um dos casos, se as soluções são linearmente independentes no intervalo $(-\infty, +\infty)$ (ZILL, 2011).

Para calcular y_p considera-se o Método dos Coeficientes a Determinar ou Variação de Parâmetros. Esses métodos podem ser encontrados em (ABUNAHMAN, 1989). Cabe enfatizar que o Método para EDO's desenvolvido nessa seção pode ser expandido para EDP's. A diferença está apenas no número de variáveis envolvidas. Esse método será utilizado na solução de Lévy, onde a solução particular será expandida para uma Série de Fourier Simples.

1.7 Problemas de Valor Inicial e de Contorno EDP's

Quando se descreve matematicamente um fenômeno físico, precisa-se enunciar condições suficientes para a determinação unívoca do processo. Tanto as EDO's quanto as EDP's possuem uma infinidade de soluções. Por isso, no caso em que um problema físico se reduz a uma equação diferencial, para a caracterização unívoca do processo é necessário agregar à equação certas condições complementares (LÓRIO, 1989).

Um Problema de Valor Inicial (PVI) consiste em uma equação diferencial sujeita a determinadas condições pré-estabelecidas, ou seja, condições subsidiárias relativas a função incógnita e suas derivadas tudo dado para um mesmo valor da variável independente. Já um Problema de Valor de Contorno (PVC) é uma equação diferencial que também está sujeita a determinadas condições pré-estabelecidas, as chamadas condições de fronteira, ou seja, quando impõem-se condições sobre o valor da solução e de suas derivadas no bordo da região (JOHN, 1982).

No exemplo 1.7.1 tem-se a situação que envolvem problema de valor inicial e problema de valor de contorno para a Equação do Calor.

Exemplo 1.7.1. Equação do calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L. \end{cases} \quad (1.43)$$

1.8 Relações de Ortogonalidade

Para mostrar as relações de ortogonalidade, Definição 1.8.1, serão, primeiramente, investigadas algumas propriedades importantes das funções que definem séries trigonométricas. Da trigonometria elementar, empregam-se as fórmulas para o seno e o cosseno da

soma e da diferença de arcos. Essas propriedades encontram-se em (JR, 1954) e seguem como

$$\operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) + \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi), \quad (1.44)$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos(\theta) \cos(\phi) - \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi), \quad (1.45)$$

$$\operatorname{sen}(\theta - \phi) = \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) - \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi), \quad (1.46)$$

$$\cos(\theta - \phi) = \cos(\theta) \cos(\phi) + \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi). \quad (1.47)$$

A partir das fórmulas (1.44) à (1.47), obtém-se três identidades que serão utilizadas no cálculo de algumas integrais ao longo do trabalho.

Pela soma das equações (1.45) e (1.47) obtém-se:

$$2 \cos(\theta) \cos(\phi) = \cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi). \quad (1.48)$$

Pela diferença das equações (1.47) e (1.45) obtém-se:

$$2 \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) = \cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi). \quad (1.49)$$

Pela diferenças das equações (1.44) e (1.46) obtém-se:

$$2 \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) = \operatorname{sen}(\theta + \phi) - \operatorname{sen}(\theta - \phi). \quad (1.50)$$

Definição 1.8.1. Um conjunto de funções $\Phi_k(x)$ é ortogonal (HSU, 1970) em um intervalo $[a, b] \in x$ se para duas funções quaisquer $\Phi_m(x)$ e $\Phi_n(x)$ pertencentes ao conjunto $\Phi_k(x)$, cumpre-se

$$\int_a^b \Phi_m(x) \Phi_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \tau_n, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (1.51)$$

Considera-se, por exemplo, um conjunto de funções sinusoidais; pode-se demonstrar que

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) dx = 0 \quad \text{para } m \neq 0, \quad (1.52)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) dx = 0 \quad \text{para todo valor de } m, \quad (1.53)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{T}{2}, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (1.54)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{T}{2}, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (1.55)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx = 0, \forall m, n. \quad (1.56)$$

As equações (1.54), (1.55), (1.56) são chamadas relações de ortogonalidade.

Estas relações demonstram que as funções sinusoidais formam um conjunto de funções ortogonais em um intervalo $-\frac{T}{2} < x < \frac{T}{2}$ (HSU, 1970).

Observação 1.8.1. Será feita a demonstração apenas da equação (1.54). Para as demais relações de ortogonalidade, as demonstrações são obtidas de forma de análogo.

Demonstração. A demonstração será dividida em dois casos.

- Caso $m \neq n$: utilizando-se da identidade (1.48) pode-se escrever,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \left[\cos\left(\frac{2m\pi x}{T} + \frac{2n\pi x}{T}\right) + \cos\left(\frac{2m\pi x}{T} - \frac{2n\pi x}{T}\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \left[\cos\left(\frac{2(m+n)\pi x}{T}\right) + \cos\left(\frac{2(m-n)\pi x}{T}\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{T}{2(m+n)\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2(m+n)\pi x}{T}\right) \right]_0^T + \frac{1}{2} \left[\frac{T}{2(m-n)\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2(m-n)\pi x}{T}\right) \right]_0^T \\ &= \frac{T}{4\pi(m+n)} [\operatorname{sen}(2(m+n)\pi) - \operatorname{sen}(0)] + \frac{T}{4\pi(m-n)} [\operatorname{sen}(2(m-n)\pi) - \operatorname{sen}(0)] \end{aligned}$$

= 0, pois $2(m+n)\pi$ e $2(m-n)\pi$ são múltiplos de $m, n \in \mathbb{Z}^*$ e \mathbb{Z}^* é fechado para adição.

Portanto,

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx = 0, m \neq n.$$

- Caso $m = n \in \mathbb{Z}^*$. Nesse caso tem-se:

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx = \int_0^T \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)^2 dx.$$

Utilizando-se a identidade trigonométrica

$$\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)^2 = \frac{1 + \cos\left(\frac{4n\pi x}{T}\right)}{2}$$

para resolução da integral, tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \left[1 + \cos\left(\frac{4n\pi x}{T}\right)\right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x + \frac{T}{4n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{4n\pi x}{T}\right) \right]_0^T \\ &= \frac{1}{2} \left[T + \frac{T}{4n\pi} \operatorname{sen}(4n\pi) - 0 - \frac{T}{4n\pi} \operatorname{sen}(0) \right] \\ &= \frac{1}{2} [T] = \frac{T}{2}, \text{ uma vez que } \operatorname{sen}(0) = \operatorname{sen}(4n\pi) = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx = \frac{T}{2}, m = n.$$

□

1.9 Sequências e Séries

Os conceitos acerca de sequências numéricas são fundamentais para o estudo de séries infinitas e muitas aplicações da matemática (THOMAS, 2013b). Nesta seção serão definidas algumas propriedades empregadas nas Séries de Fourier, utilizadas nos Métodos de Navier e Lévy.

Definição 1.9.1. Uma sequência numérica é uma lista de números $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ em uma ordem determinada. Cada a_1, a_2, a_3 , e assim por diante, representa um número (THOMAS, 2013b).

Definição 1.9.2. A sequência a_n converge para um número L se para todo número positivo ϵ corresponder um número inteiro N , de forma que para todo n

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon.$$

Se nenhum número L existir, diz-se que $\{a_n\}$ diverge. Se $\{a_n\}$ converge para L , escreve-se $a_n \rightarrow L$, e chama-se L o limite da sequência (THOMAS, 2013b).

Definição 1.9.3. Dada a sequência de números $\{a_n\}$, uma expressão da forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \dots$$

é uma série infinita. O número a_n é o n -ésimo termo da série. A sequência $\{s_n\}$ definida por

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

é a sequência de somas parciais da série, com o número s_n sendo a n -ésima soma parcial. Se a sequência de somas parciais convergir para um limite L , diz-se que a série $\sum_{k=1}^n a_k$ converge e que a soma é um número L . Nesse caso, também escreve-se

$$a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = L.$$

Se a sequência de somas parciais da série não converge, diz-se que a série diverge (THOMAS, 2013b).

1.10 Séries de Fourier

Definição 1.10.1. Seja uma função f , seccionalmente contínua em um intervalo $(-L, L)$, periódica de período $2L$ e centrada na origem. Então a função f pode ser representada por:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{T}\right). \quad (1.57)$$

Diz-se que a série em (1.10.1) é a Série de Fourier para f , onde os coeficientes a_0 , a_n e b_n são chamados de Coeficientes de Fourier e são definidos como:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad (1.58)$$

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad (1.59)$$

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad (1.60)$$

para $m = 1, 2, 3, \dots$

Os coeficientes a_0 , a_m e b_m são também conhecidos como fórmulas de Euler-Fourier para os coeficientes de uma Série de Fourier. A demonstração para a obtenção dos coeficientes de Fourier pode ser encontrada em (BIEZUNER, 2007).

Teorema 1.10.1. (Teorema de Fourier) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, tal que f e f' são contínuas por partes no intervalo $[-L, L]$. Então a Série de Fourier para a função f ,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right)$$

converge para $f(x)$ nos pontos do intervalo $(-L, L)$, se f é contínua em x , e para $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, se f é descontínua em x .

Em geral, se uma função f e a sua derivada f' forem contínuas por partes, diz-se simplesmente que f é diferenciável por partes. Observe que se f é contínua em x , então a média dos limites laterais de f em x é exatamente igual a f : o teorema poderia ter sido anunciado em uma forma mais compacta simplesmente afirmando que f satisfaz as condições do enunciado, então a Série de Fourier converge para $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ (BIEZUNER, 2007).

A demonstração do Teorema 1.10.1 não será feita e pode ser encontrada em (KREIDER, 1966)

A observação 1.10.1 será usada na Definição 1.10.2.

Observação 1.10.1. A importância de funções pares e ímpares para este trabalho provém das igualdades

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx \quad (1.61)$$

quando f é par e integrável, e

$$\int_{-L}^L f(x)dx = 0 \quad (1.62)$$

quando f é ímpar e integrável (KREIDER, 1966).

Definição 1.10.2. Se f é uma função par em $[-L, L]$, então para todos os valores de m , $f(x)\cos(mx)$ é par e $f(x)\sin(mx)$ é ímpar. Logo, mediante as equações (1.61) e (1.62) tem-se

$$\int_{-L}^L f(x)\cos(mx)dx = 2 \int_0^L f(x)\cos(mx)dx \quad (1.63)$$

e

$$\int_{-L}^L f(x)\sin(mx)dx = 0. \quad (1.64)$$

Portanto, tem-se que o desenvolvimento em série de Fourier de uma função par no intervalo $[-L, L]$ envolve somente termos em cossenos e pode ser calculado a partir da equação (1.57) que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_m^{\infty} a_m \cos(mx), \quad (1.65)$$

onde

$$a_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\cos(mx)dx \quad (1.66)$$

(KREIDER, 1966).

De forma análoga, mostra-se que a série de Fourier de uma função ímpar no intervalo $[-L, L]$ envolve somente termos em seno, e calcula-se como

$$f(x) = \sum_m^{\infty} b_m \sin(mx), \quad (1.67)$$

onde

$$b_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\sin(mx)dx \quad (1.68)$$

(KREIDER, 1966).

1.11 Séries Duplas de Fourier

Seja $f : [0, a] \times [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis. A fim de representar f através de uma série infinita de senos e cossenos, da mesma forma que para funções de uma variável, com o objetivo de resolver equações diferenciais parciais bidimensionais (BIEZUNER, 2007), primeiro fixa-se y , de modo a produzir uma função $f_y(x) = f(x, y)$ de uma variável. Supõe-se que, para cada y fixado, a função $f_y : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Fourier 1.10.1. Estendendo-se f_y a uma função periódica de período $2a$, pode-se escrever

$$f(x, y) = f_y(x) = \frac{a_0(y)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n(y) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + b_n(y) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right], \quad (1.69)$$

onde, para cada $y \in [0, b]$, os coeficientes de Fourier são dados por

$$a_n(y) = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x, y) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx, \quad (1.70)$$

para $n \geq 0$ e

$$b_n(y) = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x, y) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx, \quad (1.71)$$

para $n \geq 1$ (BIEZUNER, 2007).

Em seguida, supõe-se que cada um dos coeficientes $a_n, b_n : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, que na verdade são funções de y , satisfaçam as hipóteses do Teorema de Fourier 1.10.1, de modo que se estender cada um deles a uma função periódica de período $2b$, pode-se escrever

$$a_n(y) = \frac{a_{n0}}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_{nm} \cos\left(\frac{m\pi x}{b}\right) + b_{nm} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{b}\right) \right], n \geq 0, \quad (1.72)$$

$$b_n(y) = \frac{c_{n0}}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_{nm} \cos\left(\frac{m\pi x}{b}\right) + d_{nm} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{b}\right) \right], n \geq 1, \quad (1.73)$$

em que

$$a_{nm}(y) = \frac{1}{b} \int_{-b}^b a_n(y) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy, m \geq 0, \quad (1.74)$$

$$b_{nm}(y) = \frac{1}{b} \int_{-b}^b a_n(y) \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy, m \geq 1, \quad (1.75)$$

$$c_{nm}(y) = \frac{1}{b} \int_{-b}^b b_n(y) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy, m \geq 0, \quad (1.76)$$

$$d_{nm}(y) = \frac{1}{b} \int_{-b}^b b_n(y) \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy, m \geq 1. \quad (1.77)$$

Em outras palavras,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{0m} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + b_{0m} \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right) \right] \\ &+ \left[\frac{a_{n0}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{nm} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + b_{nm} \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right) \right] \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\ &+ \left[\frac{c_{n0}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(c_{nm} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + d_{nm} \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right) \right] \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n0} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + c_{n0} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right) + \\ &\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{0m} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + b_{0m} \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right) + \\ &\sum_{n,m=1}^{\infty} \left[a_{nm} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + b_{nm} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + \right. \\ &\left. c_{nm} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + d_{nm} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right], \quad (1.78) \end{aligned}$$

onde

$$a_{nm} = \frac{1}{ab} \int_{-a}^a \int_{-b}^b f(x, y) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy dx, \quad (1.79)$$

para $n, m \geq 0$,

$$b_{nm} = \frac{1}{ab} \int_{-a}^a \int_{-b}^b f(x, y) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy dx, \quad (1.80)$$

para $n \geq 0, m \geq 1$,

$$c_{nm} = \frac{1}{ab} \int_{-a}^a \int_{-b}^b f(x, y) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy dx, \quad (1.81)$$

para $n \geq 1$, $m \geq 0$ e

$$d_{nm} = \frac{1}{ab} \int_{-a}^a \int_{-b}^b f(x, y) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi y}{b} \right) dy dx, \quad (1.82)$$

para $n, m \geq 1$ (BIEZUNER, 2007).

As condições que f precisa satisfazer para que a série definida na equação (1.78) seja convergente e convirja para f são feitas através do Teorema 1.11.1, cuja demonstração pode ser obtida em (BIEZUNER, 2007).

Teorema 1.11.1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , periódica de período $2a$ na variável x e periódica de período $2b$ na variável y e tal que existe a derivada parcial mista f_{xy} em cada ponto. Então a série de Fourier de f definida na equação (1.78) converge uniformemente para f .

No próximo capítulo são apresentados os conceitos de Engenharia Civil indispensáveis para entender os fenômenos físicos modelados matematicamente pela Equação Diferencial de Lagrange.

2 Conceitos de Engenharia Civil

Nesse capítulo descrevem-se os principais conceitos empregados na Engenharia Civil necessários para estudar, particularmente, a Teoria de Flexão de Placas foco desse trabalho.

2.1 Noções de Resistência dos Materiais

Os carregamentos são representações da atuação de cargas aplicadas em uma estrutura, sendo gerados a partir da ação destas sobre a mesma, podendo ser exatas ou aproximadas. Quanto ao tipo, as cargas são classificadas em forças e em momentos, e quanto à forma de aplicação ao longo da extensão da estrutura, são classificadas em concentradas e distribuídas (SOUSA, 2013).

Observação: Todas as definições a seguir foram retiradas de (SOUSA, 2013).

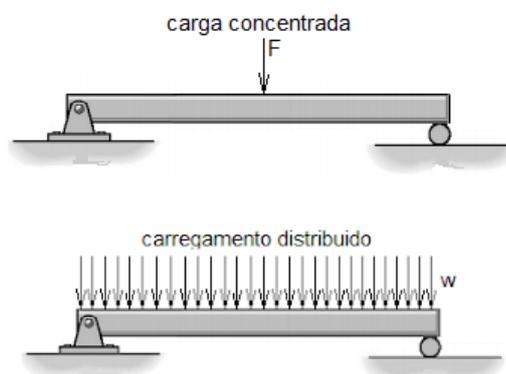
Definição 2.1.1. Força é a grandeza vetorial que apresenta módulo (intensidade), direção, sentido e ponto de aplicação, provocando um deslocamento linear (translação).

Definição 2.1.2. Momento é uma grandeza vetorial que apresenta módulo (intensidade), direção, sentido e ponto de aplicação, provocando um deslocamento angular (rotação).

Definição 2.1.3. Uma carga é dita concentrada quando é aplicada a uma força ou um momento em uma região muito pequena (quando comparada as dimensões totais) de uma estrutura (Figura 4).

Definição 2.1.4. Uma carga é dita distribuída quando é aplicada uma força ou um momento em uma região de dimensões consideráveis (quando comparada as dimensões totais) de uma estrutura (Figura 4).

Figura 4 – Carga Concentrada/Carga Distribuída



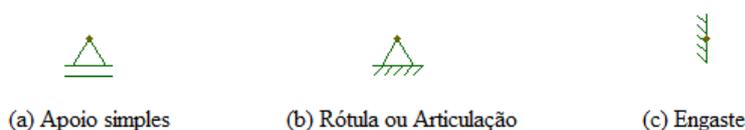
Fonte: <https://engenheiraco.blogspot.com>

Definição 2.1.5. Apoio simples é aquele que impede a translação em uma das direções da estrutura e que permite a translação na direção perpendicular à impedida e a rotação em torno do eixo perpendicular ao plano da estrutura considerada (Figura 5(a)).

Definição 2.1.6. Rótula ou articulação é aquela que impede a translação segundo as duas direções, e permite o deslocamento por rotação em torno do eixo perpendicular ao plano da estrutura (Figura 5(b)).

Definição 2.1.7. Engaste é o tipo de apoio que impede tanto deslocamentos por rotação nos eixos da viga, quanto por translação no eixo perpendicular no plano da viga (Figura 5(c)).

Figura 5 – Convenção de apoios



Fonte: Universidade Federal do Semiárido (UFERSA)

Definição 2.1.8. Uma estrutura é uma composição de uma ou mais peças, ligadas entre si e ao meio exterior formando um sistema em equilíbrio, podendo ser estático ou dinâmico.

Uma estrutura é capaz de receber solicitações externas, denominadas ativas, absorvê-las internamente e transmiti-las até seus apoios ou vínculos, onde elas encontram um sistema de forças externas equilibrantes, designadas forças reativas.

Na Engenharia Civil, são exemplos que compõem uma estrutura: vigas, lajes, paredes, pilares, sapatas e blocos. Este trabalho tem como foco o estudo das lajes, também chamadas de placas.

Definição 2.1.9. As lajes, ou placas, são os elementos estruturais que têm a função básica de receber as cargas de utilização das edificações, aplicadas nos pisos, e transmiti-las às vigas (ARAÚJO, 2003).

As lajes são elementos bidimensionais planos, cuja espessura h é bem inferior às outras duas dimensões (l_x, l_y) , e que são solicitadas, predominantemente, por cargas perpendiculares ao seu plano médio. Podem ser classificadas conforme suas dimensões ou propriedades físicas/geométricas (como a rigidez por exemplo) (ARAÚJO, 2003).

Definição 2.1.10. A Primeira Lei de Newton diz que os corpos tendem em permanecer em seu estado natural de repouso ou em movimento retilíneo e uniforme.

Definição 2.1.11. A Terceira Lei de Newton diz que para toda ação (força) sobre um objeto, em resposta à interação com outro objeto, existirá uma reação (força) de mesmo valor e direção, mas com sentido oposto.

A Primeira Lei de Newton, Lei da Inércia, permite determinar que se a força resultante atuante em um corpo é nula, é possível achar um conjunto de sistemas de referência, designado sistema inercial, em que este corpo não abrange aceleração. E a Terceira Lei de Newton, Ação e Reação, quando um corpo exerce uma força sobre o outro, esta ação reproduzirá em razão da interação mútua entre as partículas, uma reação que o segundo corpo exercerá sobre o primeiro, sendo que estas duas forças sempre serão iguais em intensidade e opostas em sentido.

As condições de equilíbrio das estruturas certificam a estas o equilíbrio estático em qualquer seção isolada da estrutura ou da estrutura como um todo e são baseadas na Primeira Lei e Terceira Lei de Newton conforme as definições (2.1.10) e (2.1.11).

Para que estruturas civis estejam em comportamento de repouso permanente, o somatório de forças deve ser nulo, de tal forma que o equilíbrio não seja comprometido pelo sistema estrutural.

A Lei da Inércia é aplicada a um problema para definir o equilíbrio em qualquer partícula presente, ou em todo o sistema de equilíbrio. Já a Terceira Lei é responsável por garantir este equilíbrio sob as condições de ação e reação.

Estes conceitos são utilizáveis a todas as estruturas que receberem cargas e estejam em equilíbrio, valendo para todas as forças verticais, horizontais e inclinadas.

Portanto, para que uma estrutura esteja sempre em imobilidade, a soma das cargas verticais, horizontais e momentos fletores, devem ser nulas uma a uma, ou seja,

$$\Sigma F_x = 0,$$

$$\Sigma F_y = 0,$$

$$\Sigma M_z = 0.$$

Quando um sistema está em equilíbrio, as condições para os esforços internos ao longo da extensão da estrutura também estão assegurados, ou seja, forças e momentos fletores são nulos.

Os esforços internos correspondem à transmissão do carregamento entre as partes do corpo após sua aplicação, sendo aqueles que surgem em todas seções contínuas de um corpo submetido à ações de esforços externos, a gerar uma interação entre as partes do corpo, mantendo cada segmento deste em equilíbrio (ARAÚJO, 2003).

A distribuição destas forças ocorre através de tensões.

Definição 2.1.12. Tensão é a relação existente entre a intensidade da força interna atuante sobre um determinado plano específico localizado ao longo da extensão de uma estrutura (HIBBELER, 2004).

Definição 2.1.13. Tensão Normal é a intensidade da força ou força por unidade de área, que atua no sentido perpendicular a ΔA . É representado pela letra grega σ (HIBBELER, 2004).

Definição 2.1.14. Tensão Tangencial é a intensidade da força ou força por unidade de área, que atua na tangente a ΔA . Pode ser chamada também de Tensão de Cisalhamento. É representado pela letra grega τ (HIBBELER, 2004).

Um exemplo de ilustração para a Definição 2.1.13 e Definição 2.1.14 é a Figura 7 que mostra as tensões normais e tangenciais agindo sobre um elemento tridimensional.

Definição 2.1.15. Esforço cortante é uma força interna atuante numa seção, sendo igual à soma vetorial das componentes atuantes das forças externas situadas em um dos lados da seção.

O esforço cortante Figura 6(a) faz com que duas seções infinitamente próximas, tendam a promover um deslizamento relativo, gerado pela atuação de esforço interno de uma em relação à outra a manter equilíbrio. Esse deslizamento é chamado de cisalhamento, e o mesmo é conceituado como soma algébrica das forças à esquerda ou à direita de uma seção perpendicular ao eixo do elemento.

Definição 2.1.16. Momento Torsor, de Torção ou Torque é um efeito empregado quando as cargas externas tendem a torcer uma parte de um corpo em relação à outra (HIBBELER, 2004).

Definição 2.1.17. Momento Fletor é uma soma vetorial das componentes, sobre o plano da seção, dos momentos de todas as forças situadas de um dos lados da seção em relação ao seu centro de gravidade (HIBBELER, 2004).

O momento fletor (Figura 6(b)) tem a tendência de ocasionar uma rotação da seção em torno de um eixo localizado no próprio plano da mesma. É determinado a partir da soma algébrica dos momentos de todas as forças à esquerda ou à direita de uma seção transversal (isto é, a mesma referente ao esforço cortante, perpendicular ao eixo do elemento) sendo calculados em torno de um eixo que passa pelo centroide da seção transversal (HIBBELER, 2004).

Figura 6 – Esforço Cortante e Momento Fletor



Fonte: Universidade Federal do Semiárido (UFERSA)

Definição 2.1.18. Coeficiente de Poisson, ν , mede a deformação transversal (lateral) em relação à direção longitudinal de aplicação de uma carga P a um material que seja tanto homogêneo como isotrópico (HIBBELER, 2004).

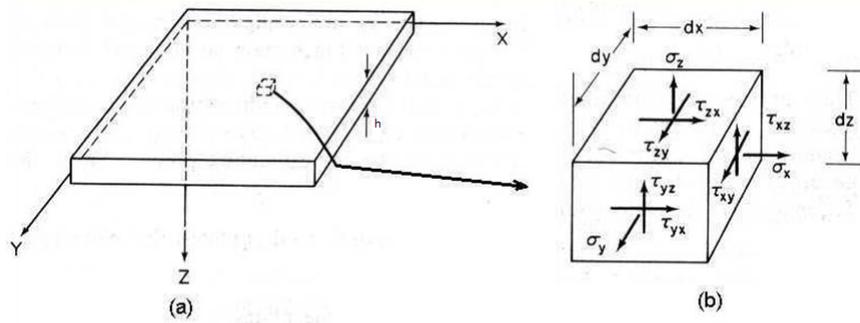
Definição 2.1.19. Módulo de Young é um parâmetro mecânico que proporciona uma medida da rigidez de um material sólido. É um parâmetro fundamental para a engenharia e aplicação de materiais pois está associado com a descrição de várias outras propriedades mecânicas (HIBBELER, 2004).

2.2 Algumas Relações da Teoria da Elasticidade

Para compreender e deduzir a equação de equilíbrio das placas, é necessário apresentar algumas relações da teoria da elasticidade. Essas relações são expostas para um corpo tridimensional submetido às ações externas e, posteriormente, são particularizadas para placas finas. Para descrição do comportamento tridimensional de tensões em corpo, considera-se o elemento infinitesimal em forma de um paralelepípedo ($dx dy dz$), cujas faces são paralelas aos planos de coordenadas, como representado na Figura 7 (ARAÚJO, 2003).

As componentes das tensões normais nas direções x , y e z são denominadas por σ_x , σ_y e σ_z , respectivamente. As tensões tangenciais, τ , podem-se identificar através de dois índices. O primeiro índice refere-se à direção da normal à superfície onde atua a

Figura 7 – Tensões em um Elemento Tridimensional



Fonte: <https://slideplayer.com.br/slide/2318894>

tensão, enquanto o segundo índice indica a direção da tensão. Todas as componentes das tensões consideram-se positivas quando atuarem na direção positiva do sistema de eixos de coordenadas (ARAÚJO, 2003).

O estado das tensões em um ponto do corpo é definido pelas nove componentes do tensor de tensões normais e tangenciais, pode ser representada por uma matrix a partir dos eixos coordenados das tensões, portanto.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

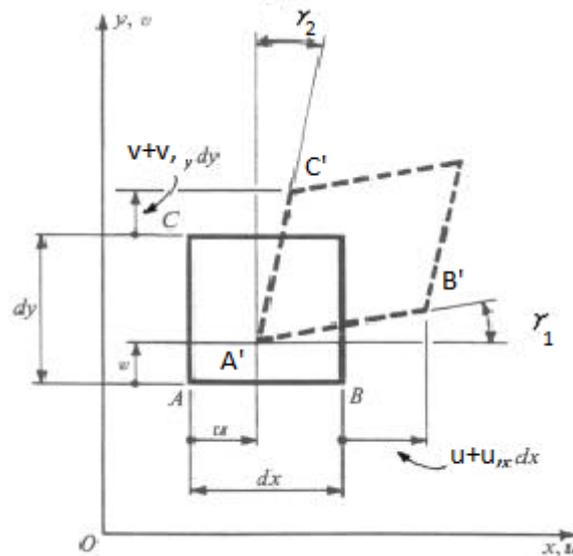
Uma vez que o tensor de tensões é simétrico, resulta

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tag{2.2}$$

denominada lei da reciprocidade das tensões de cisalhamento. Os deslocamentos por suas componentes u , v e w , segundo as direções x , y e z , respectivamente. Para relacionar deslocamentos e deformações, considera-se a Figura 8, onde se apresenta apenas a projeção do elemento tridimensional no plano xy .

Em decorrência das tensões tangenciais, as faces do elemento sofrem rotações. A face AB sobre uma rotação γ_1 , passando para a posição $A'B'$. A face AC sofre uma rotação γ_2 , passando para a posição $A'C'$. Além disso, as dimensões iniciais do elemento, dx e dy ficam alteradas por causa das tensões normais.

Figura 8 – Deformações do elemento no plano xy



Fonte: Figura Adaptada - Curso de Concreto Armado - José Milton de Araújo

O comprimento dx' da projeção $A'B'$ sobre o eixo x é igual a

$$dx' = (1 + u_x)dx, \quad (2.3)$$

onde

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.4)$$

Por definição, a deformação normal na direção x é igual a

$$\epsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.5)$$

já que há uma taxa de variação, pode-se relacionar com derivada.

A deformação por corte γ_{xy} é igual à distorção do elemento, dada por

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = v_x + u_y. \quad (2.6)$$

A equação (2.6) pode ser escrita na forma

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.7)$$

Considerando as três componentes de deslocamentos, obtém-se as seguintes relações deformações-deslocamentos:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.8)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.9)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.10)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{yx}, \quad (2.11)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{zx} \quad (2.12)$$

e

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \gamma_{zy}. \quad (2.13)$$

A lei de Hooke, conforme (ARAÚJO, 2003), é válida para os materiais elásticos lineares, estabelece a relação entre as componentes das deformações e as componentes das tensões na forma

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad (2.14)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad (2.15)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad (2.16)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad (2.17)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad (2.18)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad (2.19)$$

onde

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.20)$$

Nas expressões (2.14) - (2.19), E representa o módulo de elasticidade longitudinal, ν é o coeficiente de Poisson e G é o módulo de elasticidade transversal do material.

No capítulo seguinte, será apresentada a Equação Diferencial de Lagrange, obtida a partir da Teoria de Flexão de Placas e de Kirchoff, que descreve o comportamento de uma estrutura conforme seus deslocamentos.

3 Equação Diferencial de Lagrange

Neste capítulo será obtida a dedução da Equação Diferencial de Lagrange, conhecida como Equação da Placa. E nos capítulos seguintes a sua solução.

A Teoria Clássica, proposta por Gustav R. Kirchhoff (1824 - 1887) no ano de 1850, corresponde à primeira teoria completa sobre flexões de placas. Em seu trabalho baseado nas hipóteses de Bernoulli para vigas, ele derivou as mesmas equações diferenciais para flexões de placas que Navier, no entanto, usando uma aproximação diferente no tocante a energia. Sua contribuição para a Teoria das Placas foi a introdução para forças suplementares de contorno. Estas forças de cisalhamento equivalente substituíam os momentos de torque, ou seja, quando a carga faz torcer os bordos das placas em relação à outra. Consequentemente, todas as condições de contorno poderiam agora ser declaradas em função dos deslocamentos e suas derivadas em relação a x ou y (SZILARD, 2004).

Matematicamente, essas hipóteses significam que pode-se determinar tensões e deformações em placas em um plano cartesiano bidimensional, isto é, em coordenadas x e y já que uma placa é submetida a forças e momentos fletores no plano cartesiano tridimensional (coordenadas x , y e z no plano) onde as tensões normais ao eixo z são consideradas nulas.

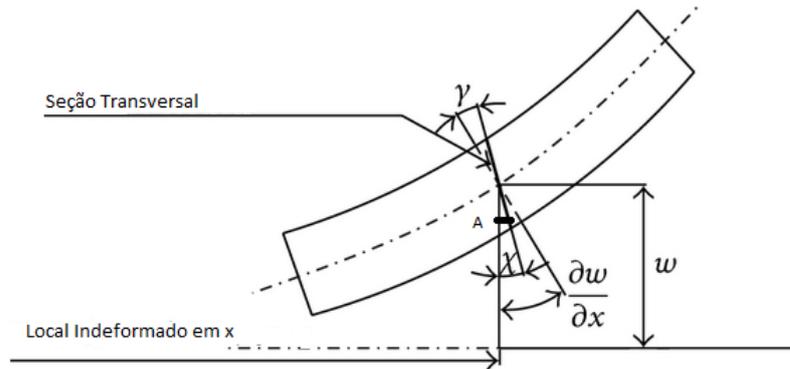
Serão admitidas as seguintes hipóteses, baseadas na Teoria de Kirchhoff (ARAÚJO, 2003), para a dedução da Equação de Lagrange:

- O material da placa é elástico linear, homogêneo e isotrópico.
- A espessura da placa é pequena em relação às outras dimensões.
- As deflexões são pequenas em relação à espessura da placa.
- As rotações da superfície média deformada são pequenas em relação à unidade.
- Linhas retas, inicialmente normais à superfície média, permanecem reta e normais à superfície média após as deformações.
- As deflexões da placa são normais ao plano indeformado inicial.
- As tensões normais à superfície média são desprezíveis ($\sigma_z = 0$).

Indica-se uma placa submetida a uma carga normal ao plano médio, representada genericamente por $p(x, y) = p$. O plano $x - y$ contém a superfície média da placa. Para obter as relações entre as deformações e os deslocamentos, considera-se a deformação

da placa em uma seção paralela ao eixo x . Conforme indicado na Figura 9, há um deslocamento transversal w igual ao deslocamento do plano médio. Em seguida, a linha $x - y$ sofre uma rotação θ_x onde situa-se o ponto A .

Figura 9 – Deformação de uma seção transversal



Fonte: (Figura Adaptada) [http://www.wikiwand.com/pt/Flexão\(física\)](http://www.wikiwand.com/pt/Flexão(física))

De acordo com a Figura 9, os deslocamentos do ponto A são dados por

$$w = w(x, y), \quad (3.1)$$

$$u = -z\theta_x, \quad (3.2)$$

onde

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (3.3)$$

Analogamente, o deslocamento do ponto A na direção y é dado por

$$v = -z\theta_y = -z\frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.4)$$

Empregando-se as relações deformações-deslocamentos dadas pelas equações (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) e (2.12), chega-se:

$$\epsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (3.5)$$

$$\epsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (3.6)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3.7)$$

Considerando-se a hipótese de que as tensões normais à superfície média são desprezíveis, a Lei de Hooke é escrita na forma:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y), \quad (3.8)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x), \quad (3.9)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy}. \quad (3.10)$$

Substituindo as equações que compõem (3.5 - 3.7) em (3.8), (3.9) e (3.10), tem-se

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (3.11)$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (3.12)$$

$$\tau_{xy} = \frac{Ez}{(1 + \nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3.13)$$

Observa-se que as três componentes das tensões variam linearmente ao longo da espessura da placa, sendo nulas no plano médio.

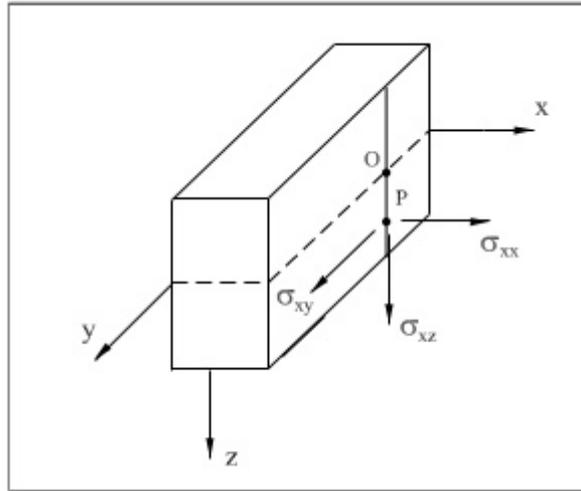
Na Figura 10 representa-se um elemento da placa e as componentes das tensões na fibra situada a uma distância z do plano médio.

As tensões σ_x e σ_y produzem momentos fletores na placa. E as tensões τ_{xy} e τ_{yx} produzem momentos torsores na placa. Integrando as tensões normais ao longo da espessura, obtém-se os momentos fletores denotados por

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz, \quad (3.14)$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz. \quad (3.15)$$

Figura 10 – Tensões em uma fibra genérica



Fonte: <https://pt.slideshare.net/marcelobfo/curso-de-analise-estrutural>

Substituindo-se as expressões de σ_x e σ_y das equações (3.11) e (3.12) em (3.14) e (3.15), e resolvendo as integrais tem-se:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (3.16)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (3.17)$$

onde

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3.18)$$

representa a rigidez à flexão da placa.

Os momentos torsores são dados por,

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} z dz = M_{yx}, \quad (3.19)$$

já que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Calculando as integrais, obtém-se

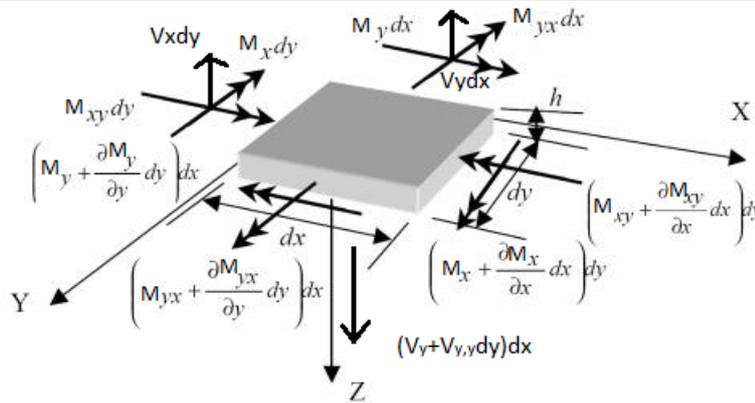
$$M_{xy} = M_{yx} = -(1 - \nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3.20)$$

Os momentos fletores e o momento torsor são momentos por unidade de comprimento.

A Equação Diferencial de Lagrange é obtida considerando-se o equilíbrio de um elemento infinitesimal ($dx dy$) tomado em uma posição genérica no plano da placa. Os esforços solicitantes nas faces do elemento são os momentos fletores M_x e M_y , os momentos torsores $M_{xy} = M_{yx}$ e os esforços cortantes V_x e V_y (decorrentes das tensões de cisalhamento τ_{xz} e τ_{yz}) (ARAÚJO, 2003).

Na Figura 11, indicam-se o plano médio do elemento de placa e os esforços solicitantes, os quais são representados por seus vetores. Além disso, $M_{x,x}$; $M_{y,y}$; $M_{xy,x}$; $M_{yx,y}$; $V_{x,x}$ e $V_{y,y}$ representam as derivadas dos esforços solicitantes em relação à variável que sucede a vírgula, por exemplo, $M_{x,y}$ é a derivada do momento fletor M_x em relação a variável y . O produto do esforço solicitante unitário pelo lado do elemento corresponde ao esforço resultante.

Figura 11 – Equilíbrio do elemento de placa



Fonte: Figura Adaptada (<https://www.slideshare.net/LTLJ/teoria-lajes-macias00>)

Conforme a Figura 11 será feito o equilíbrio de momentos da placa:

- Equilíbrio de momentos em torno do eixo y :

Fazendo-se a soma de todos os momentos em torno do eixo y ser igual a zero e desprezando os infinitésimos de ordem superior resulta em:

$$(M_x + M_{x,x} dx) dy - M_x dy + (M_{yx} + M_{yx,y} dy) dx - M_{yx} dx - (V_x + V_{x,x} dx) dy dx = 0. \quad (3.21)$$

Calculando os termos da equação (3.21), chega-se a

$$M_{x,x} + M_{yx,y} - V_x = 0. \quad (3.22)$$

Isolando V_x na equação (3.22) tem-se

$$V_x = M_{x,x} + M_{yx,y}. \quad (3.23)$$

- Equilíbrio de momentos em torno do eixo x :

Repetindo-se o mesmo procedimento realizado no equilíbrio de momentos do eixo y tem-se,

$$V_y = M_{y,y} + M_{xy,x}. \quad (3.24)$$

- Equilíbrio de forças na direção z :

Estabelecendo a soma de forças na direção z igual a zero, tem-se

$$V_{x,x} + V_{y,y} = -p, \quad (3.25)$$

em que $p = p(x, y)$ é a carga aplicada na placa.

As expressões que correspondem ao equilíbrio de momentos e força podem ser escritas na notação de derivadas parciais, como segue:

$$V_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}, \quad (3.26)$$

$$V_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = -p. \quad (3.28)$$

Diferenciando as equações (3.23) e (3.24) em relação a x e a y , respectivamente, e substituindo-se na equação (3.28), tem-se

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p. \quad (3.29)$$

Inserindo as equações (3.16), (3.17) e (3.20) dos momentos fletores, obtém-se a equação Diferencial da Placa (de Lagrange):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}. \quad (3.30)$$

A equação (3.30) é a Equação Diferencial de Lagrange em coordenadas cartesianas retangulares. Ela define o campo de deslocamento da placa w em função das coordenadas

x e y da carga $p(x, y)$ e da rigidez D da placa. Portanto, os deslocamentos da laje calculados pela Teoria da Elasticidade dependem das dimensões da placa, das condições de contorno, do carregamento, e conforme a equação (3.18), também dependem do módulo de elasticidade E do material, da espessura da placa h e do coeficiente de Poisson.

3.1 Condições de Contorno

Uma vez que a equação diferencial a ser resolvida é de quarta ordem, são necessárias duas condições de contorno, em deslocamentos e/ou esforços internos, para cada parte do contorno da placa. As condições de contorno podem ser geométricas, mecânicas ou mistas (ARAÚJO, 2003).

As condições de contorno geométricas são introduzidas prescrevendo-se valores para os deslocamentos e as rotações no contorno. Por exemplo, em um bordo engastado, a flecha (w) e a rotação são nulas. As condições de contorno mecânicas correspondem a valores prescritos dos esforços solicitantes e as condições mistas incluem os dois tipos (ARAÚJO, 2003).

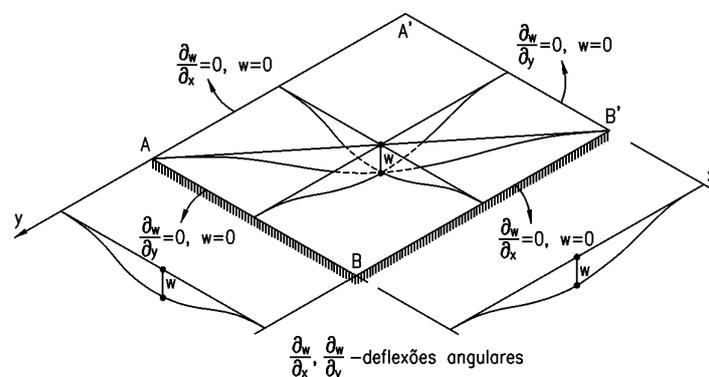
- Bordo engastado

No bordo perfeitamente engastado os deslocamentos e as inclinações têm valor nulo, isto é, as condições de contorno geométricas tem valor 0. Essas condições são escritas na forma

$$w = 0; \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (3.31)$$

Na Figura 12 é representada a placa com os bordos engastados.

Figura 12 – Placa engastada em todos os lados



Fonte: Figura Adaptada (<https://saturno.unifei.edu.br>)

- Bordos simplesmente apoiados

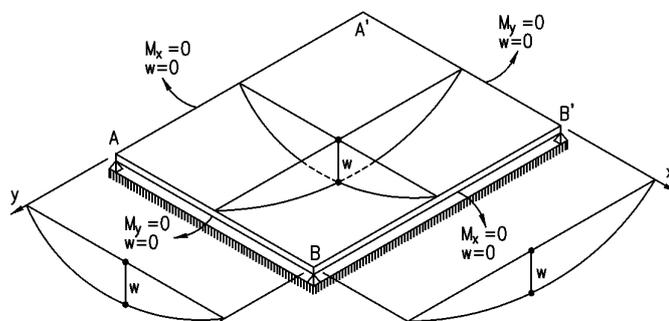
Nesses bordos tem-se uma condição de contorno mista: a flecha (w) e o momento fletor M_y são nulos. As condições de contorno são escritas como

$$w = 0, \tag{3.32}$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0. \tag{3.33}$$

Na Figura 13 é representada a placa com os bordos simplesmente apoiados

Figura 13 – Placa simplesmente apoiada em todos os lados



Fonte: Figura Adaptada (<https://saturno.unifei.edu.br>)

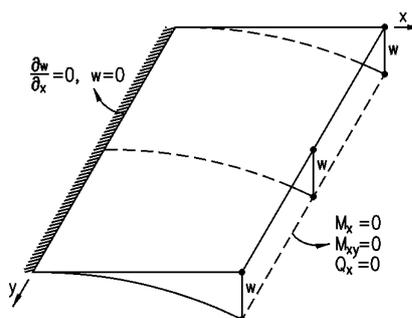
- Bordo livre

Se o bordo livre não estiver carregado, os esforços solicitantes no bordo devem ser nulos, ou seja, deve-se verificar as condições mecânicas

$$M_x = 0; V_x = 0; M_{xy} = 0. \tag{3.34}$$

Na Figura 14 é representada a placa com o bordo livre e engastada

Figura 14 – Placa engastada e livre



Fonte: Figura Adaptada (<https://saturno.unifei.edu.br>)

3.2 Solução da Equação Diferencial de Lagrange

A solução exata da Equação Diferencial de Lagrange pode ser obtida somente para poucos casos particulares. Nos casos mais gerais de carregamento e condições de contorno, as soluções são encontradas adotando-se expansões em Série de Fourier. Duas soluções são apresentadas neste trabalho: a solução de Navier e a solução de Lévy (ARAÚJO, 2003).

3.2.1 Solução ou Método de Navier

Em 1820, Navier apresentou um documento à Academia Francesa de Ciências sobre a solução de flexão de chapas retangulares simplesmente apoiadas por séries trigonométricas duplas. A solução de Navier é, às vezes, chamada de solução forçada das equações diferenciais, uma vez que forçosamente transforma a equação diferencial em uma equação algébrica, facilitando, consideravelmente, as operações matemáticas necessárias (SZILARD, 2004).

As condições de contorno para uma placa simplesmente apoiada são

$$w(0, y) = w(a, y) = w(x, 0) = w(x, b); M_x = M_y = 0. \quad (3.35)$$

Considera-se uma placa retangular simplesmente apoiada ao longo do contorno exterior e submetida à ação de uma carga distribuída, $p(x, y)$, a qual se pode representar através de Séries Trigonômétricas Duplas de Fourier do seguinte modo:

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right), \quad (3.36)$$

onde p_{mn} representa a carga, a e b as dimensões da placa.

Para calcular o coeficiente particular p_{mn} das Séries de Fourier, multiplicam-se ambos os lados da equação (3.36) por $\operatorname{sen} \left(\frac{n'\pi y}{b} \right) dy$ e integra-se de 0 a b .

$$\int_0^b p(x, y) \operatorname{sen} \left(\frac{n'\pi y}{b} \right) dy = \int_0^b \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n'\pi y}{b} \right) dy. \quad (3.37)$$

Empregando-se as relações de ortogonalidade estudadas no Capítulo 1 tem-se que:

$$\begin{cases} \int_0^b \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n'\pi y}{b} \right) dy = 0, & \text{quando } n \neq n' \\ \int_0^b \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n'\pi y}{b} \right) dy = \frac{b}{2}, & \text{quando } n = n'. \end{cases} \quad (3.38)$$

Desta forma,

$$\int_0^b p(x, y) \operatorname{sen} \left(\frac{n'\pi y}{b} \right) dy = \frac{b}{2} \sum_{m=1}^{\infty} p_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right). \quad (3.39)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (3.39) por $\operatorname{sen} \left(\frac{m'\pi x}{a} \right) dx$ e integrando de 0 a a , obtém-se:

$$\int_0^a \int_0^b p(x, y) \operatorname{sen} \left(\frac{m'\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n'\pi y}{b} \right) dy dx = \int_0^a \frac{b}{2} \sum_{m=1}^{\infty} p_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m'\pi x}{a} \right) dx. \quad (3.40)$$

Utilizando-se relações de ortogonalidades,

$$\begin{cases} \int_0^a \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m'\pi x}{a} \right) dx = 0, & \text{quando } m \neq m' \\ \int_0^a \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m'\pi x}{a} \right) dx = \frac{a}{2}, & \text{quando } m = m', \end{cases} \quad (3.41)$$

tem-se

$$\int_0^b \int_0^a p(x, y) \operatorname{sen} \left(\frac{m'\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n'\pi y}{b} \right) dx dy = \frac{ab}{4} p_{mn}, \quad (3.42)$$

onde,

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dx dy. \quad (3.43)$$

Do mesmo modo, que $p(x, y)$ em (3.36) é representada por Séries Trigonométricas Duplas de Fourier, a flexão da placa $w(x, y)$ é dada por

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right). \quad (3.44)$$

Substituindo-se a equação (3.44) na Equação Diferencial de Lagrange, (3.30), tem-se

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(w_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right) \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left(w_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right) \right]$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^4}{\partial y^4} \left(w_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right) \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn}}{D} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right).$$

Calculando as derivadas parciais de 4ª ordem em relação às variáveis x e y tem-se

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[w_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] - \frac{p_{mn}}{D} \right] \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) = 0.$$

Dessa forma, obtém-se que

$$w_{mn} \pi^4 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right] - \frac{p_{mn}}{D} = 0. \quad (3.45)$$

Nesse caso, w_{mn} é obtida a partir da equação

$$w_{mn} \pi^4 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 = \frac{p_{mn}}{D},$$

e portanto,

$$w_{mn} = \frac{p_{mn}}{\pi^4 D \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}. \quad (3.46)$$

Substituindo a equação (3.46) na equação (3.44) tem-se

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right). \quad (3.47)$$

A equação (3.47) é uma solução válida para calcular a flexão de placas associadas a apoios simples sujeita a um p_{mn} específico, no qual é determinado pela função $p(x, y)$.

Para a aplicação da Solução de Navier, que será realizada no próximo capítulo, em que o carregamento na placa será uniformemente distribuído, faz-se uma simplificação no resultado, gerando uma nova solução a partir da equação (3.47), em que basta calcular p_{mn} . Essa nova solução desenvolve-se aqui e será aplicada no próximo capítulo.

Considera-se $p(x, y) = p_0$. Logo, a equação (3.43) pode ser reescrita como

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p_0 \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dx dy. \quad (3.48)$$

Resolvendo-se as integrais em dx e, em seguida, em dy , tem-se

$$\begin{aligned}
p_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^b \left[\frac{a}{m\pi} (1 - \cos(m\pi)) \right] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dy \\
&= \frac{4ap_0}{m\pi ab} [1 - \cos(m\pi)] \int_0^b \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dy \\
&= \frac{4p_0}{m\pi b} [1 - \cos(m\pi)] \left[\frac{b}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \right] \\
&= \frac{4p_0}{\pi^2 mn} [1 - \cos(m\pi)] [1 - \cos(n\pi)].
\end{aligned}$$

Então, p_m tem como resultado

$$p_{mn} = \frac{4p_0}{\pi^2 mn} (1 - \cos(m\pi))(1 - \cos(n\pi)). \quad (3.49)$$

Empregando-se as relações $\cos(m\pi) = (-1)^m$ e $\cos(n\pi) = (-1)^n$ na equação (3.49) obtém-se:

$$p_{mn} = \frac{4p_0}{\pi^2 mn} [1 - (-1)^m][1 - (-1)^n]. \quad (3.50)$$

Note que para valores pares de m e n o resultado anula-se. Logo, tomam-se m e n números ímpares, isto é, $n, m = 1, 3, 5, \dots$. Dessa forma, a expressão para p_{mn} é escrita como

$$p_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn}, \quad (3.51)$$

para m, n ímpar.

Substituindo a equação (3.51) em (3.47) obtém-se

$$w(x, y) = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}, \quad (3.52)$$

para m, n ímpar.

As expressões para os momentos de fletores podem ser obtidas substituindo-se a equação (3.44) nas equações (3.16), (3.17) e (3.20). Desde modo, tem-se

$$M_x = \pi^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{m^2}{a^2} + v \frac{n^2}{b^2} \right] w_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right), \quad (3.53)$$

$$M_y = \pi^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n^2}{b^2} + v \frac{m^2}{a^2} \right] w_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right), \quad (3.54)$$

$$M_{xy} = -\pi^2 D(1 - \nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{mn}{ab} \right] w_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right). \quad (3.55)$$

O resultado obtido para a equação (3.53) será demonstrado a seguir. Para as demais equações (3.54) e (3.55), as demonstrações são análogas. Logo, substituindo a equação (3.44) em (3.16) tem-se

$$M_x = -D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(w_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right) - v \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(w_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right) \right] \quad (3.56)$$

Diferenciando-se a equação (3.56) em relação às variáveis x e y duas vezes obtém-se

$$M_x = -D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{w_{mn} m^2 \pi^2}{a^2} + v \frac{w_{mn} n^2 \pi^2}{b^2} \right] \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (3.57)$$

Reorganizando os termos, escreve-se

$$M_x = \pi^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{m^2}{a^2} + v \frac{n^2}{b^2} \right] w_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right).$$

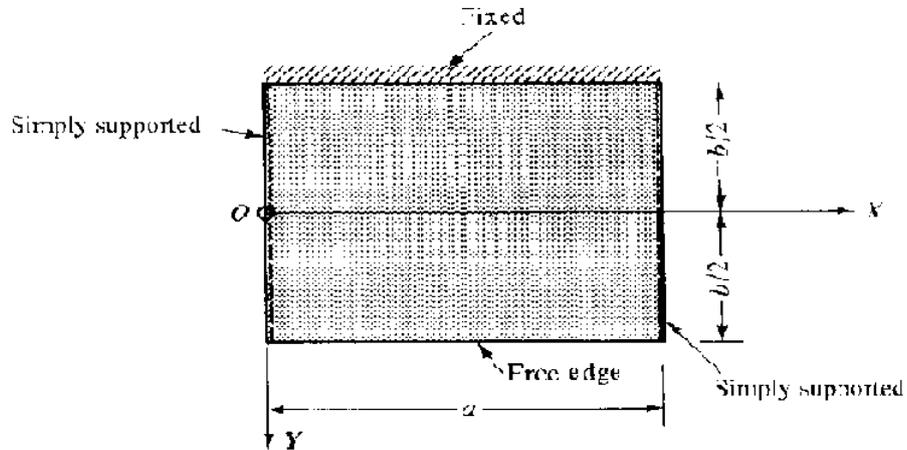
Como os momentos fletores são expressos pelas segundas derivadas da série (3.52), seus valores máximos se mantêm iguais a p_0 e D , que são proporcionais ao quadrado das dimensões lineares. A carga total na placa, igual a $p_0 ab$, também é proporcional ao quadrado das dimensões lineares, logo, conclui-se que, para duas placas de espessura igual e do mesmo valor da relação $\frac{a}{b}$, os momentos de flexão máximos e as tensões máximas são iguais se as cargas totais nas duas placas forem iguais.

3.2.2 Solução ou Método de Lévy

A necessidade de um processo alternativo em relação à resolução de Navier é explicada pelo fato das séries que representam os valores das flexões não convergirem de modo rápido para um resultado de plenitude satisfatória. A solução de Lévy resulta em convergências mais rápidas, chegando com precisão aceitável, às vezes com apenas o uso do 1º termo da série (JOHN, 1982).

Considera-se uma placa retangular com os bordos $x = 0$ e $x = a$ simplesmente apoiados e os demais podem ter condições de contorno distintas, como por exemplo, $y = \pm \frac{b}{2}$. Além disso, admite-se que a carga tem uma distribuição uniforme em todas as seções paralelas ao eixo x , isto é, a carga não depende de y (ARAÚJO, 2003).

Figura 15 – Placa com bordos apoiados e condições distintas



Fonte: (Figura Adaptada) Teoria e Aplicações de Placas - Rudolph Szilard

No método de Lévy, a solução $w(x, y)$ para a equação diferencial de Lagrange (3.30), pelo método descrito na seção 1.6, é dada por

$$w(x, y) = w_h(x, y) + w_p(x, y), \quad (3.58)$$

onde w_h é a solução associada à equação homogênea e w_p é uma solução particular da equação.

A equação homogênea associada tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial^4 w_h}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_h}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_h}{\partial y^4} = 0, \quad (3.59)$$

onde

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(y) \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right). \quad (3.60)$$

Observação 3.2.1. A fim de simplificar a notação, toma-se $w_m(y) = w_m$.

Substituindo-se a equação (3.60) em (3.59) tem-se

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \right] + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \right] + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \right] = 0. \quad (3.61)$$

Calculando-se as respectivas derivadas parciais em relação a variação x , obtém-se

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{d^4 w_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 w_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 w_m \right] \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) = 0. \quad (3.62)$$

Para que esta equação (3.62) seja válida em todos os valores de x é preciso que

$$\frac{d^4 w_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 w_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 w_m = 0. \quad (3.63)$$

A equação (3.63), pelo método da equação homogênea, descrito na seção 1.6, tem sua equação característica dada por

$$r^4 - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 r^2 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 = 0, \quad (3.64)$$

ou seja,

$$\left[r^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \left[r^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] = 0$$

$$r^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 = 0$$

$$r^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 = 0$$

$$r' = \pm \frac{m\pi}{a} \quad r'' = \pm \frac{m\pi}{a}.$$

Dessa forma, a solução homogênea pode ser escrita como

$$w_m = A'_m e^{\frac{m\pi y}{a}} + B'_m e^{-\frac{m\pi y}{a}} + C'_m y e^{\frac{m\pi y}{a}} + D'_m y e^{-\frac{m\pi y}{a}}. \quad (3.65)$$

Pode-se, ainda, escrever a solução w_m de outra maneira, utilizando-se as funções trigonométricas hiperbólicas. Sabendo-se que $\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\operatorname{cosh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, tomando-se

$$A'_m = \frac{A_m + B_m}{2}, \quad (3.66)$$

$$B'_m = \frac{B_m - A_m}{2}, \quad (3.67)$$

$$C'_m = \frac{m\pi}{a} \left(\frac{C_m + D_m}{2} \right), \quad (3.68)$$

$$D'_m = \frac{m\pi}{a} \left(\frac{D_m + C_m}{2} \right) \quad (3.69)$$

e substituindo-se as equações (3.66), (3.67), (3.68) e (3.69) na equação (3.65) tem-se

$$w_m = \left(\frac{A_m + B_m}{2} \right) e^{\frac{m\pi y}{a}} + \left(\frac{B_m - A_m}{2} \right) e^{-\frac{m\pi y}{a}} + \frac{m\pi}{a} \left(\frac{C_m + D_m}{2} \right) y e^{\frac{m\pi y}{a}} + \frac{m\pi}{a} \left(\frac{D_m + C_m}{2} \right) y e^{-\frac{m\pi y}{a}}. \quad (3.70)$$

Manipulando-se algebricamente obtém-se:

$$w_m = A_m \left(\frac{e^{\frac{m\pi}{a}} - e^{-\frac{m\pi}{a}}}{2} \right) + B_m \left(\frac{e^{\frac{m\pi}{a}} + e^{-\frac{m\pi}{a}}}{2} \right) + C_m \frac{m\pi y}{a} \left(\frac{e^{\frac{m\pi}{a}} - e^{-\frac{m\pi}{a}}}{2} \right) + D_m \frac{m\pi y}{a} \left(\frac{e^{\frac{m\pi}{a}} + e^{-\frac{m\pi}{a}}}{2} \right) \quad (3.71)$$

e aplicando-se as definições das funções hiperbólicas tem-se

$$w_m = A_m \sinh \left(\frac{m\pi y}{a} \right) + B_m \cosh \left(\frac{m\pi y}{a} \right) + C_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \left(\frac{m\pi y}{a} \right) + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \left(\frac{m\pi y}{a} \right). \quad (3.72)$$

Portanto, a solução da equação homogênea associada w_h é dada por:

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \sinh \left(\frac{m\pi y}{a} \right) + B_m \cosh \left(\frac{m\pi y}{a} \right) + C_m y \sinh \left(\frac{m\pi y}{a} \right) + D_m y \cosh \left(\frac{m\pi y}{a} \right) \right] \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right). \quad (3.73)$$

A condição que diz que a deflexão da placa tem que ser simétrica em relação ao eixo x (ter os mesmos valores para $-y$ e y) é satisfeita pela equação w_h se os coeficientes A_m e D_m forem nulos, isto é, $A_m = D_m = 0$. Portanto, a solução da equação homogênea associada é dada por

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} \left[B_m \cosh \left(\frac{m\pi y}{a} \right) + C_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \left(\frac{m\pi y}{a} \right) \right] \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right). \quad (3.74)$$

A solução particular, w_p , é obtida resolvendo-se a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^4 w_p}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_p}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_p}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (3.75)$$

para

$$w_p = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \quad (3.76)$$

e w_m funções de y (apenas).

Uma vez que a carga não varia na direção y , sua expansão em Série de Fourier é dada por

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m(y) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right), \quad (3.77)$$

onde $p_m(y)$ são os coeficientes da Série de Fourier definidos por,

$$p_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a p(x, y) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) dx. \quad (3.78)$$

Substituindo as equações (3.76) e (3.77) na equação diferencial (3.75) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[\sum_m^{\infty} w_m \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \right] + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \right] + \\ \frac{\partial^4}{\partial y^4} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \right] = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} p_m \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Desenvolvendo-se as derivadas de quarta ordem em relação a variável x na equação (3.79) obtém-se

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{d^4 w_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 w_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 w_m \right] \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} p_m \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right). \quad (3.80)$$

Ou ainda:

$$\frac{d^4 w_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 w_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 w_m = \frac{p_m}{D}. \quad (3.81)$$

O desenvolvimento da solução particular $w_p(x, y)$, bem como da solução geral, para a aplicação da Solução de Lévy em problemas onde o carregamento na placa retangular com apoios simples é parcialmente distribuído serão apresentados no próximo capítulo. Nesse momento, apresenta-se a Solução de Lévy, simplesmente, como a soma de uma solução particular $w_p(x, y)$ e uma solução homogênea $w_h(x, y)$. Portanto, a flexão, pela Solução de Lévy, é dada por

$$w(x, y) = w_p + \sum_{m=1}^{\infty} \left[B_m \cosh \left(\frac{m\pi y}{a} \right) + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \left(\frac{m\pi y}{a} \right) \right] \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right). \quad (3.82)$$

No capítulo seguinte são apresentados dois problemas de aplicação empregando os métodos de Navier e de Lévy na obtenção da solução da Equação Diferencial de Lagrange conforme as condições de contorno pré-estabelecidas.

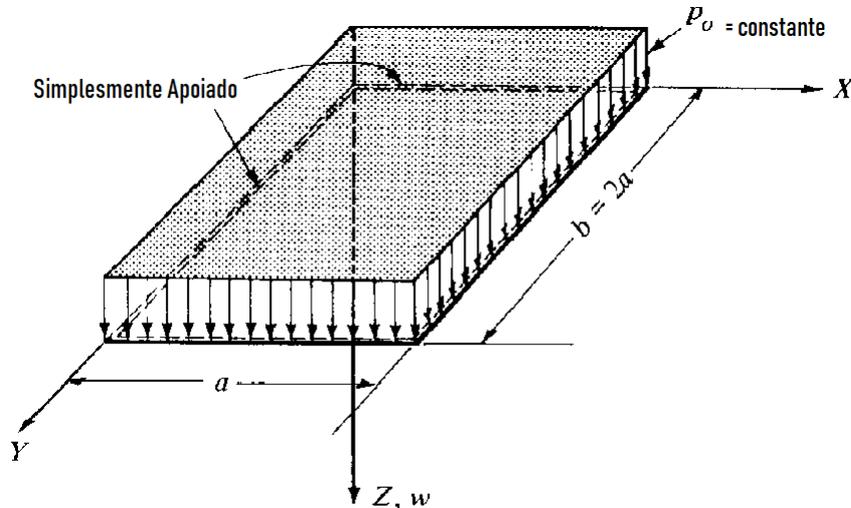
4 Aplicações dos Métodos de Navier e Lévy

Neste capítulo são apresentadas as soluções para dois problemas de aplicação, empregando os métodos de Navier e de Lévy, a fim de obter uma expressão que satisfaça a Equação Diferencial de Lagrange conforme as condições de contorno envolvidas. Os problemas foram retirados de (SZILARD, 2004). Os resultados, bem como sua representação gráfica, foram obtidos a partir da implementação computacional de algoritmos utilizando o software Octave, versão 5.1.0.

4.1 Solução de Navier

Problema 4.1.1. Determine as flexões de uma placa retangular simplesmente apoiada, $a \times 2a$, submetida a uma carga uniformemente distribuída conforme a Figura 16. Calcule a deflexão máxima e os momentos fletores M_x e M_y .

Figura 16 – Placa retangular simplesmente apoiada



Fonte: (Figura Adaptada) Teoria e Aplicações de Placas - Rudolph Szilard

A flexão da placa com dimensões, a e b , com carga uniformemente distribuída, é dada por

$$w(x, y) = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}, \quad m, n \text{ ímpar.} \quad (4.1)$$

Substituindo-se $b = 2a$ em (4.1) tem-se

$$\begin{aligned}
w(x, y) &= \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{2a}\right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{4a^2}\right)^2} \\
&= \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{2a}\right)}{mn \left(\frac{4m^2 + n^2}{4a^2}\right)^2} \\
&= \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{2a}\right)}{mn} \left(\frac{4a^2}{4m^2 + n^2}\right)^2 \\
&= \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{2a}\right)}{mn} \left(\frac{a^2}{m^2 + \frac{n^2}{4}}\right)^2.
\end{aligned}$$

Logo, a equação que determina a flexão da placa pode ser escrita como:

$$w(x, y) = \frac{16p_0 a^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{2a}\right)}{mn \left(m^2 + \frac{n^2}{4}\right)^2}. \quad (4.2)$$

Substituindo $x = \frac{a}{2}$ e $y = a$, calcula-se a flexão máxima w_{max} por:

$$w_{max} = \frac{16p_0 a^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{mn \left(m^2 + \frac{n^2}{4}\right)^2}, \quad m, n \text{ ímpar}. \quad (4.3)$$

Expandindo-se a série dupla em (4.3) para m e n ímpar, obtém-se, para 4 algarismos significativos,

$$w_{max} \approx \frac{0,0101 p_0 a^4}{D}. \quad (4.4)$$

A flexão máxima da placa específica para o carregamento p_0 por meio do desenvolvimento da Série Dupla de Fourier é determinada por (4.4). Este valor é obtido utilizando-se 5 termos da série e está de acordo com a literatura (SZILARD, 2004). O autor considera aceitável para o coeficiente associado o valor de 0,0101. Ao comparar os dois resultados tem-se que os valores coincidem em 4 algarismos significativos. Na Figura 17 uma parte do algoritmo utilizado para obter os resultados.

Figura 17 – Solução de Navier para a flexão máxima da placa

```

1 k = 16/(pi^6)
2 srl=0; i=0;
3 for m=1:2:20
4   for n=1:2:20
5     i=i+1;
6     coef1 = 1/(m*n);
7     coef2 = 1/((m^2) + (n^2/4))^2;
8     term1 = sin(m*pi/2);
9     term2 = sin(n*pi/2);
10    srl = srl + coef1*coef2*term1*term2
11    wm = k*srl
12    y(i) = wm
13  end
14 end
15
16 plot(1:length(y),y,1:length(y),y, '.', 'markersize',10)
17 xlabel('Número de Termos')
18 ylabel('Coeficiente de Flexão')
19 legend('Flexão Máxima')

```

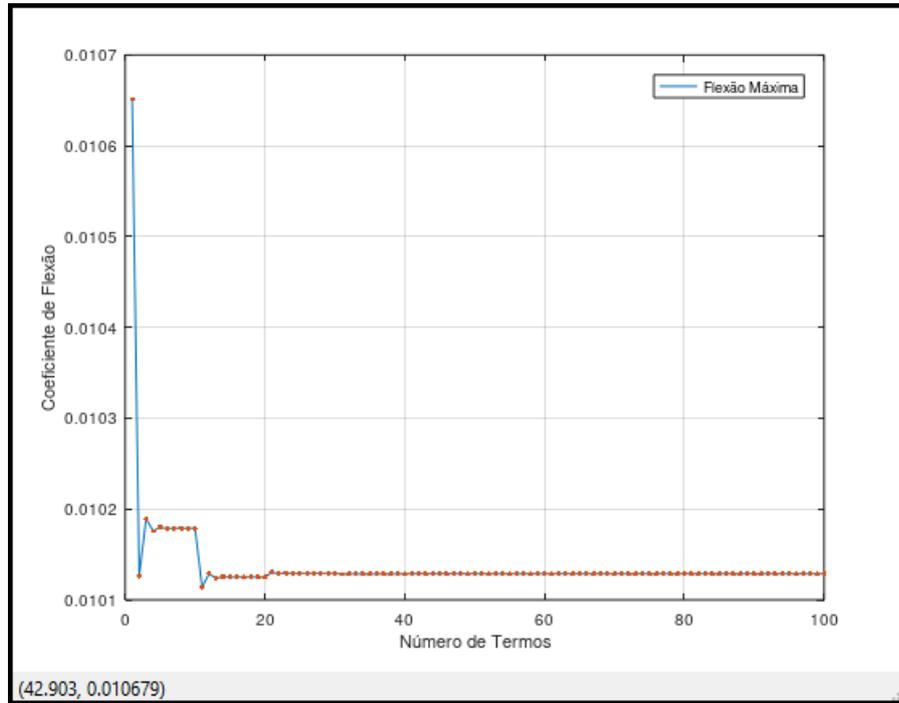
Fonte: Próprio autor.

Analisando-se a Figura 18 e a Tabela 1, percebe-se que são necessários, pelo menos, 41 termos para a convergência da flexão máxima pela solução de Navier para o valor 0.010129 . Neste caso obtém-se uma concordância de 6 algarismos significativos.

Tabela 1 – Flexão Máxima - Solução de Navier

Flexão Máxima	
Número de Termos da Séries	w_{max}
1	0,010651
5	0,010178
10	0,010179
15	0,010125
20	0,010125
25	0,010125
30	0,010128
40	0,010128
41	0,010129
45	0,010129
50	0,010129
55	0,010129
60	0,010129

Fonte: Próprio autor

Figura 18 – Comportamento da solução de Navier para w_{max} 

Fonte: Próprio autor.

Para calcular os momentos fletores M_x e M_y , substitui-se

$$w_m = \frac{16p_0a^4}{\pi^6 D} \left[\frac{1}{mn \left(m^2 + \frac{n^2}{4}\right)^2} \right],$$

parte da equação (4.3), nas equações (3.53) e (3.54). Logo, tem-se para M_x :

$$M_x = \pi^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{m^2}{a^2} + v \frac{n^2}{4a^2} \right] \frac{16p_0a^4}{\pi^6 D} \left[\frac{1}{mn \left(m^2 + \frac{n^2}{4}\right)^2} \right] \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right)$$

ou ainda,

$$M_x = \frac{16p_0a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{m^2 + v \frac{n^2}{4}}{mn \left(m^2 + \frac{n^2}{4}\right)^2} \right] \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right). \quad (4.5)$$

Tomando-se m e n números ímpares, $v = 0, 3$, geralmente constante usual, tem-se

$$M_x \approx 0,1017p_0a^2. \quad (4.6)$$

O momento fletor M_x para carregamento p_0 por meio do desenvolvimento da Série Dupla de Fourier é determinado por (4.6). Este valor é obtido utilizando-se 65 termos

da série e considerando-se 4 algarismos significativos. Na literatura (SZILARD, 2004) o coeficiente associado (e aceitável) corresponde à 0,1017. Portanto, os resultados obtidos neste trabalho estão em concordância com os dados disponíveis na literatura. Na Figura 19 uma parte do algoritmo implementado para a obtenção do momento fletor M_x .

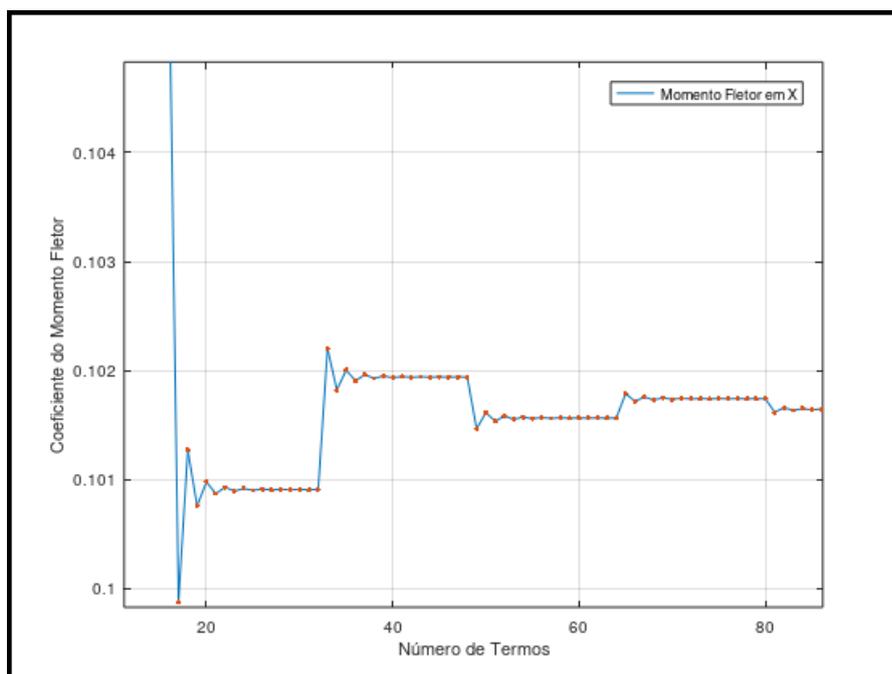
Figura 19 – Sub-rotina para o cálculo de M_x - Solução de Navier

```
1 k = 16/(pi^4)
2 v = 0.3
3 ml=0; i=0;
4 for m=1:2:31
5   for n=1:2:31
6     i=i+1;
7     coef1 = 1/(m*n);
8     coef2 = 1/((m^2) + (n^2/4))^2;
9     coef3 = (m^2+v*(n^2/4))
10    term1 = sin(m*pi/2);
11    term2 = sin(n*pi/2);
12    ml = ml + coef1*coef2*coef3*term1*term2
13    mx = k*ml
14    y(i) = mx
15  end
16 end
17
18 plot(1:length(y),y,1:length(y),y,'.','markersize',10)
19 xlabel('Número de Termos')
20 ylabel('Coeficiente do Momento Fletor')
21 legend('Momento Fletor em X')
```

Fonte: Próprio autor.

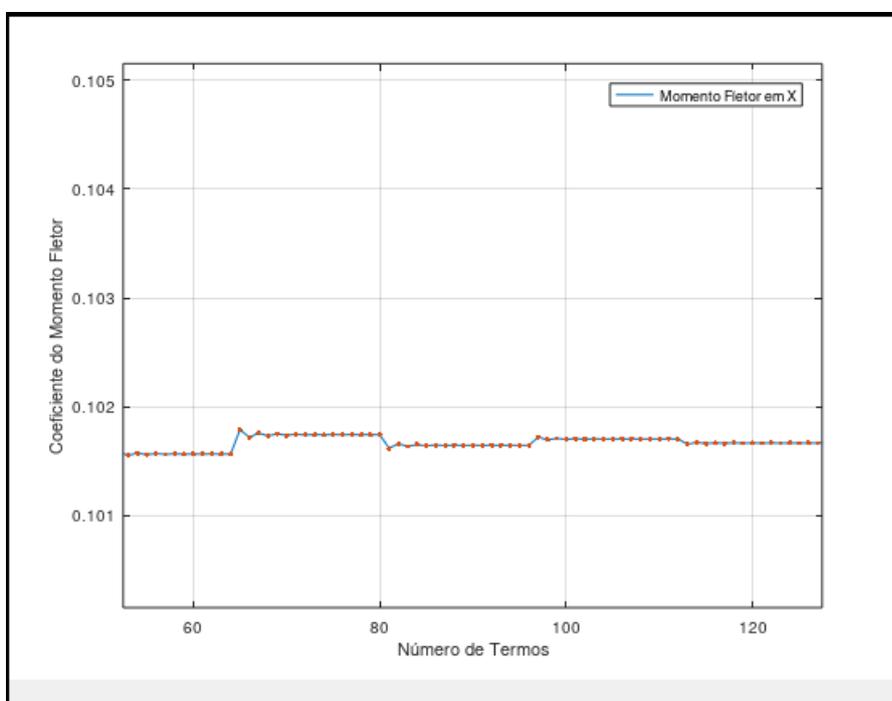
Ao comparar os resultados deste trabalho com os disponíveis na literatura observa-se que os valores coincidem em 4 algarismos significativos, o que pode lembrar a ideia de convergência da solução de Navier no cálculo de M_x . Entretanto, é possível observar na Figura 20 que a solução calculada não converge. Na Figura 21, mesmo utilizando-se mais de 80 termos, observa-se uma oscilação no valor do coeficiente. Aparentemente, a oscilação diminui com o aumento dos termos.

Figura 20 – Momento fletor M_x - Solução de Navier, até 80 termos



Fonte: Próprio autor.

Figura 21 – Momento fletor M_x - Solução de Navier, acima de 80 termos



Fonte: Próprio autor

Tabela 2 – Flexão Máxima - Solução de Navier

Momento Fletor em x	
Número de Termos da Séries	M_x
1	0,113010
5	0,105780
10	0,105670
15	0,105690
20	0,010098
25	0,010090
30	0,010091
40	0,101940
50	0,101610
55	0,101560
60	0,101570
65	0,101790
70	0,101740
81	0,101620
90	0,101650
100	0,101700
130	0,101690

Fonte: Próprio Autor

Fazendo-se o processo análogo para M_y , obtém-se

$$M_y = \frac{16p_0a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{n^2}{4} + vm^2}{mn \left(m^2 + \frac{n^2}{4}\right)^2} \right] \text{sen} \left(\frac{m\pi}{2} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right), \quad (4.7)$$

tal que,

$$M_y \approx 0,0462p_0a^2. \quad (4.8)$$

O momento fletor M_y para carregamento p_0 por meio do desenvolvimento da Série Dupla de Fourier é determinado por (4.8). Este valor é obtido utilizando-se 50 termos da série e 4 algarismos significativos. A literatura (SZILARD, 2004) considera o coeficiente associado (e aceitável) igual à 0,0463. Portanto, os resultados obtidos neste trabalho estão em concordância com os dados disponíveis na literatura. Na Figura 22 uma parte do algoritmo implementado para a obtenção do momento fletor M_y .

Figura 22 – Sub-rotina para o cálculo M_y

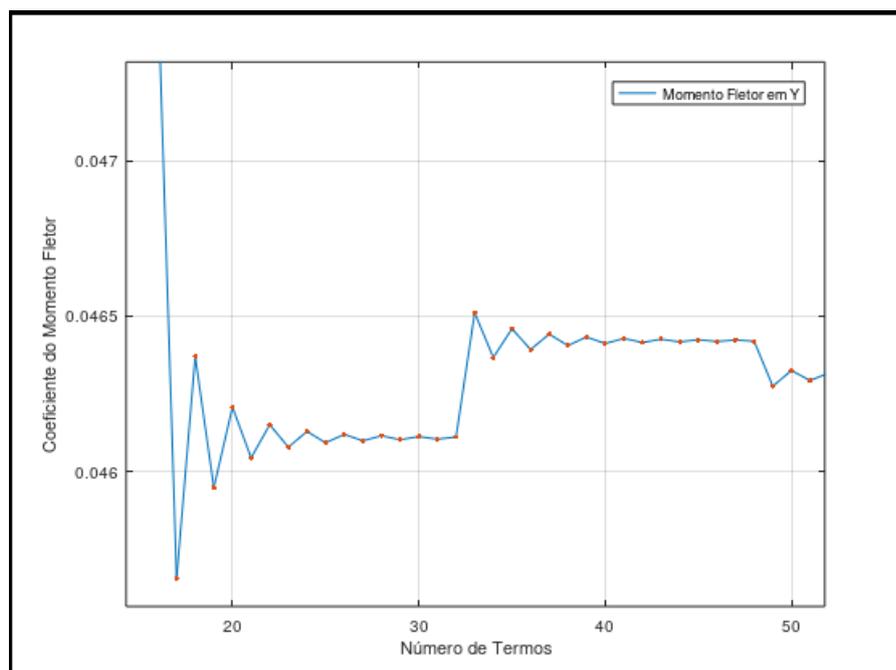
```

1 k = 16/(pi^4)
2 v = 0.3
3 m2=0; i=0;
4 for m=1:2:31
5 for n=1:2:31
6 i=i+1;
7 coef1 = 1/(m*n);
8 coef2 = 1/(((m^2) + (n^2/4)))^2;
9 coef3 = ((n^2/4)+v*m^2)
10 term1 = sin(m*pi/2);
11 term2 = sin(n*pi/2);
12 m2 = m2 + coef1*coef2*coef3*term1*term2
13 my = k*m2
14 y(i) = my
15 end
16 end
17
18 plot(1:length(y),y,1:length(y),y, '.', 'markersize',10)
19 xlabel('Número de Termos')
20 ylabel('Coeficiente do Momento Fletor')
21 legend('Momento Fletor em Y')

```

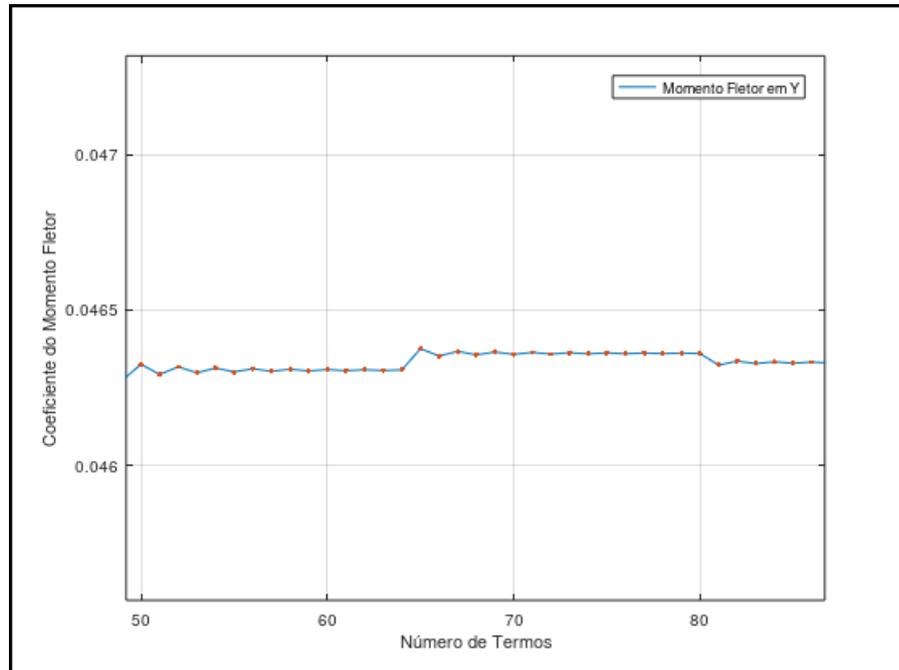
Fonte: Próprio autor.

Percebe-se na Figura 23 que solução obtida para o momento fletor M_y não converge ao utilizarmos menos de 50 termos. Na Figura 24 observam-se melhores resultados, atingindo 4 algarismos significativos e obtendo-se o valor de 0,0463 para o momento fletor M_y e 50 termos da série. Esses valores estão descritos na Tabela 3.

Figura 23 – Comportamento da solução M_y - Solução de Navier - até 50 termos

Fonte: Próprio autor.

Figura 24 – Comportamento da solução M_y - Solução de Navier - número de termos maior que 50



Fonte: Próprio autor.

Tabela 3 – Flexão Máxima - Solução de Navier

Momento Fletor em y	
Número de Termos da Séries	M_y
1	0,057818
5	0,047847
10	0,047515
15	0,047566
20	0,046208
25	0,046093
30	0,046113
35	0,046460
40	0,046412
50	0,046326
60	0,046309
70	0,046358
80	0,046360
90	0,046332
100	0,046348
110	0,046349
120	0,046345

Fonte: Próprio autor.

Os resultados obtidos, para o Problema 4.1.1, também podem ser comparados com os dados disponíveis em (TIMOSHENKO, 1959). A Tabela 4 apresenta os resultados.

Tabela 4 – Comparação dos Coeficientes de Flexão e Momentos Fletores

Coeficientes de Flexão e Momentos			
Dados	$w = \alpha \cdot \frac{p_0 a^4}{D}$	$M_x = \beta p_0 a^2$	$M_y = \gamma p_0 a^2$
	α	β	γ
Timoshenko	0,010130	0,1017	0,0464
Leitão Dias	0,010129	0,1017	0,0463

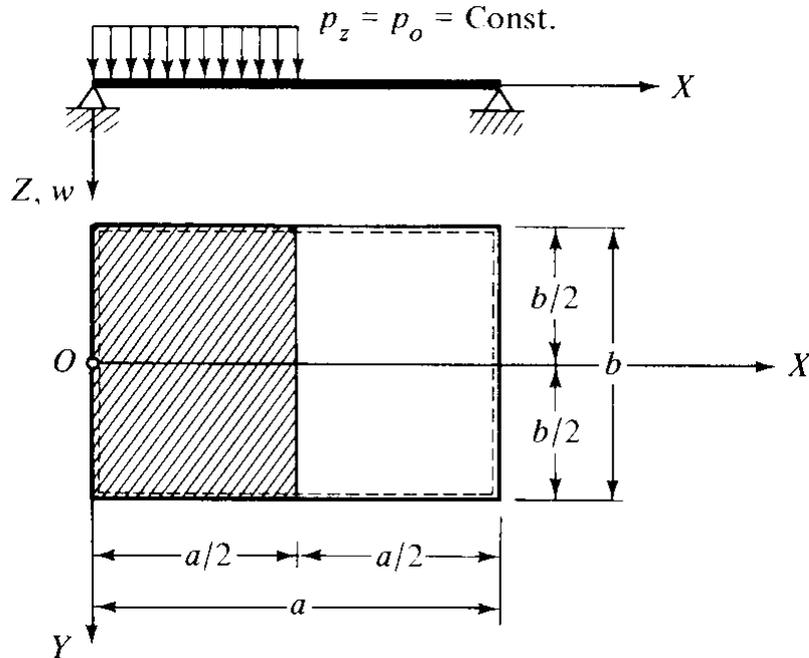
Fonte: Próprio autor.

Observando-se a Tabela 4 conclui-se que os coeficientes de flexão e dos momentos fletores (M_x e M_y) de (TIMOSHENKO, 1959) e os obtidos neste trabalho estão de acordo. Os valores resultantes foram $w_{max} = 0,010129$ para 41 termos, $M_x = 0,1017$ para 65 termos e $M_y = 0,0463$ para 50 termos na série. Observa-se que para a Solução de Navier é necessário, de um modo geral, trabalhar com vários termos da série e, mesmo assim, a convergência da solução não é obtida para alguns casos. O fato das séries que representam os valores dos coeficiente de flexão e dos momentos fletores não convergirem de modo rápido para um resultado satisfatório implica na necessidade de um processo alternativo em relação à resolução de Navier (JOHN, 1982). Dessa forma, na seção seguinte é apresentada a Solução de Lévy.

4.2 Problema pela Solução de Lévy

Problema 4.2.1. Determine a flexão de uma placa retangular parcialmente carregada, mostrada na Figura 25, utilizando a Solução de Lévy.

Figura 25 – Placa retangular parcialmente carregada



Fonte: (Figura Adaptada) Teoria e Aplicações de Placas - Rudolph Szilard

Para determinar a flexão da placa retangular, conforme a Figura 25, utiliza-se a Solução de Lévy que é dada por uma solução particular (w_p) mais uma solução homogênea (w_h) conforme a descrição da equação (3.58).

Inicia-se o problema determinando-se a solução particular, w_p , que é obtida resolvendo a equação (3.75) em que w_p é expandida em Série de Fourier Simples como segue

$$w_p = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right), \tag{4.9}$$

onde w_m é apenas função de y .

Porém, antes, necessita-se determinar $p(x, y)$, função que aparece em (3.75). Esta função representa o comportamento da carga que agirá sobre a placa. Como foi dito no Capítulo 3, uma vez que a carga não varia na direção de y , a carga, função $p(x, y)$, também é expandida em Série de Fourier. Então, escreve-se

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right)$$

onde

$$p_m = \frac{2}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} p(x, y) \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) dx. \tag{4.10}$$

Nesse caso específico para o problema, pode-se considerar a carga $p(x, y)$ como uniforme durante o percurso da placa retangular na Figura 25. Isto é, $p(x, y) = p_0$. Portanto, a equação (4.10) é reescrita como

$$p_m = \frac{2}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} p_0 \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) dx. \quad (4.11)$$

Resolvendo-se a integral

$$p_m = \frac{2p_0}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) dx$$

pelo método da substituição, tomando $u = \frac{m\pi x}{a}$, chega-se a

$$p_m = \frac{2q_0}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{a}{m\pi} \operatorname{sen}(u) du = \frac{2q_0}{m\pi} \int_0^{\frac{a}{2}} \operatorname{sen}(u) du = \frac{2q_0}{m\pi} \left[-\cos(u) \right]_0^{\frac{a}{2}}.$$

Retornando-se ao valor de u , $u = \frac{m\pi x}{a}$, e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se

$$p_m = \frac{2p_0}{m\pi} \left[-\cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{2p_0}{m\pi} \left[-\cos \left(\frac{m\pi}{2} \right) + \cos(0) \right] = \frac{2p_0}{m\pi} \left[1 - \cos \left(\frac{m\pi}{2} \right) \right].$$

Portanto,

$$p_m = \frac{2p_0}{m\pi} \left[1 - \cos \left(\frac{m\pi}{2} \right) \right]. \quad (4.12)$$

Analisando-se os valores para $m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ em p_m tem-se

$$p_m = \begin{cases} \frac{2p_0}{m\pi}, & \text{para } m = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{4p_0}{m\pi}, & \text{para } m = 2, 6, 10, \dots \\ 0, & \text{para } m = 4, 8, 12, \dots \end{cases}$$

Sendo assim, a expressão que representa $p(x, y)$ é uma função definida por:

$$p(x, y) = \begin{cases} \sum_m^{\infty} \frac{2p_0}{m\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right), & \text{para } m = 1, 3, 5, \dots \\ \sum_m^{\infty} \frac{4p_0}{m\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right), & \text{para } m = 2, 6, 10, \dots \\ 0, & \text{para } m = 4, 8, 12, \dots \end{cases} \quad (4.13)$$

Substituindo-se a equação (4.9) em (3.75), e calculando as respectivas derivadas, conforme abordado no Capítulo 3, tem-se

$$\frac{d^4 w_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 w_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 w_m = \sum_m \frac{p(x, y)}{D} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right), \quad (4.14)$$

onde $p(x, y)$ é dado por (4.13).

Logo, a solução w_m é dada por

$$w_m = \frac{a^4}{\pi^4 D} \sum_m \frac{p(x, y)}{m^4} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \quad (4.15)$$

e $p(x, y)$ depende dos valores de m como mostrado em (4.13).

A solução particular é

$$w_p = \begin{cases} \frac{2p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_m \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right), & \text{para } m = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{4p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_m \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right), & \text{para } m = 2, 6, 10, \dots \end{cases} \quad (4.16)$$

Dessa forma, a equação que representa a flexão da placa pelo Método de Lévy é

$$w(x, y) = w_p + \sum_{m=1}^{\infty} \left[B_m \cosh \left(\frac{m\pi y}{a} \right) + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \left(\frac{m\pi y}{a} \right) \right] \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right), \quad (4.17)$$

para w_p definido por (4.16).

As constantes B_m e C_m são determinadas de acordo com as condições de contorno em $y = \pm \frac{b}{2}$, $w(x, y) = 0$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ aplicadas na equação (4.17).

A fim de simplificar a notação para o cálculo das constantes B_m e C_m , define-se f_m como

$$f_m = \begin{cases} \frac{2p_0 a^4}{m^5 \pi^5 D}, & \text{para } m = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{4p_0 a^4}{m^5 \pi^5 D}, & \text{para } m = 2, 6, 10, \dots \end{cases} \quad (4.18)$$

logo, aplicando-se as condições de contorno $w(x, y) = 0$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ na equação (4.17), tem-se:

$$w(x, y) = 0 \longrightarrow f_m + B_m \cosh \left(\frac{m\pi y}{a} \right) + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \left(\frac{m\pi y}{a} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[f_m + B_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + C_m \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] = 0.$$

Desenvolvendo-se a derivada de 2ª ordem e aplicando-se as condições de contorno em $y = \pm \frac{b}{2}$ tem-se

$$\begin{cases} f_m + B_m \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) + C_m \frac{m\pi b}{2a} \sinh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) = 0 \\ (B_m + 2C_m) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) + C_m \frac{m^3 \pi^3 b}{2a^3} \sinh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) = 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Calculam-se as constantes B_m e C_m pelo software wxMaxima, conforme a Figura 26.

Figura 26 – Cálculo das Constantes

```
(%i1) f + B*cosh((m*pi*b)/(2*a))+C*((m*pi*b)/(2*a))*sinh((m*pi*b)/(2*a))=0;
(%o1) B*cosh\left(\frac{\pi b m}{2 a}\right)+\frac{\pi C b m \sinh\left(\frac{\pi b m}{2 a}\right)}{2 a}+f=0
.
(%i3) (B+2*C)*((m^2*pi^2)/(a^2))*cosh((m*pi*b)/(2*a))+C*((m^3*pi^3*b)/(2*a^3))*sinh((m*pi*b)/(2*a))=0;
(%o3) \frac{\pi^2 (2 C+B) m^2 \cosh\left(\frac{\pi b m}{2 a}\right)}{a^2}+\frac{\pi^3 C b m^3 \sinh\left(\frac{\pi b m}{2 a}\right)}{2 a^3}=0
(%i4) algsys([%o1,%o3],[B,C]);
(%o4) [[B=-\frac{4 a f \cosh\left(\frac{\pi b m}{2 a}\right)+\pi b f m \sinh\left(\frac{\pi b m}{2 a}\right)}{4 a \cosh\left(\frac{\pi b m}{2 a}\right)^2},C=\frac{f}{2 \cosh\left(\frac{\pi b m}{2 a}\right)}]]
```

Fonte: Próprio autor.

Observação 4.2.1. As constantes B_m e C_m na Figura 26 são representadas pelas variáveis B e C .

Verifica-se na Figura 26 que o cálculo de B_m ainda pode ser simplificado. Logo, tem-se

$$B_m = - \left[\frac{4a f_m \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)}{4a \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)^2} + \frac{f_m m \pi b \sinh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)}{4a \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)^2} \right]. \quad (4.20)$$

Dividindo-se a equação (4.20) por $2a$ e fazendo-se as demais manipulações algébricas tem-se

$$B_m = - \left[\frac{2f_m}{2 \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} + \frac{f_m \frac{m\pi b}{2a} \sinh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)}{2 \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)^2} \right] = - \left[\frac{2f_m}{2 \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} + \frac{f_m \frac{m\pi b}{2a} \sinh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)}{2 \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} \right],$$

em que

$$B_m = - \left[\frac{2f_m}{2 \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} + \frac{f_m \frac{m\pi b}{2a} \tanh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)}{2 \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} \right] = - \frac{f_m}{2 \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} \left[2 + \left(\frac{m\pi b}{2a}\right) \tanh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) \right].$$

Desde modo, as constantes B_m e C_m são definidas por

$$B_m = - \frac{f_m}{2 \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} \left[2 + \left(\frac{m\pi b}{2a}\right) \tanh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) \right], \quad C_m = \frac{f_m}{2 \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)}. \quad (4.21)$$

Atribuindo-se $\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$ na equação (4.21) obtém-se

$$B_m = - \frac{f_m}{2 \cosh(\alpha_m)} [2 + \alpha_m \tanh(\alpha_m)], \quad C_m = \frac{f_m}{2 \cosh(\alpha_m)} \quad (4.22)$$

e substituindo-se as constantes de (4.22) em (3.74) tem-se

$$w_h = \left[- \frac{f_m}{2 \cosh(\alpha_m)} (2 + \alpha_m \tanh(\alpha_m)) \cosh(\eta_m) + \frac{f_m}{2 \cosh(\alpha_m)} \eta_m \sinh(\eta_m) \right]$$

$$w_h = - f_m \left[\frac{\cosh(\eta_m)}{2 \cosh(\alpha_m)} (2 + \alpha_m \tanh(\alpha_m)) - \frac{\eta_m \sinh(\eta_m)}{2 \cosh(\alpha_m)} \right],$$

onde $\eta_m = \frac{m\pi y}{a}$.

A função f_m é uma função definida por partes representada por (4.18) de acordo com os valores de m . Pretende-se estabelecer uma expressão geral para a solução homogênea w_h , em que a condição para m na série, esteja de acordo com todas as funções envolvidas. Então, define-se uma função k_m , como segue

$$k_m = \begin{cases} 2, & \text{para } m = 1, 3, 5, \dots, \\ 4, & \text{para } m = 2, 6, 10, \dots, \\ 0, & \text{para } m = 4, 8, 12, \dots \end{cases} \quad (4.23)$$

Nesse caso, w_h é escrita como

$$w_h = -\frac{p_0 a^4}{D \pi^5} \sum_m \frac{k_m}{m^5} \left[\frac{\cosh \eta_m}{2 \cosh \alpha_m} (2 + \alpha_m \tanh(\alpha_m)) - \frac{\eta_m}{2 \cosh(\alpha_m)} \sinh(\eta_m) \right] \operatorname{sen} \left(\frac{m \pi x}{a} \right).$$

Portanto,

$$w_h = -\frac{p_0 a^4}{D \pi^5} \sum_m \frac{k_m}{m^5} \left[\frac{\cosh \left(\frac{m \pi y}{a} \right)}{2 \cosh \left(\frac{m \pi b}{2a} \right)} \left(2 + \frac{m \pi b}{2a} \tanh \left(\frac{m \pi b}{2a} \right) \right) - \frac{\left(\frac{m \pi y}{a} \right)}{2 \cosh \left(\frac{m \pi b}{2a} \right)} \sinh \left(\frac{m \pi y}{a} \right) \right] \times \operatorname{sen} \left(\frac{m \pi x}{a} \right)$$

Se $a = b$, $x = \frac{a}{2}$ e $y = 0$, a flexão no centro da placa torna-se

$$w_h = -\frac{p_0 a^4}{D \pi^5} \sum_m \frac{k_m}{m^5} \left[\frac{\cosh \left(\frac{m \pi 0}{a} \right)}{2 \cosh \left(\frac{m \pi a}{2a} \right)} \left(2 + \frac{m \pi a}{2a} \tanh \left(\frac{m \pi a}{2a} \right) \right) - \frac{\left(\frac{m \pi 0}{a} \right)}{2 \cosh \left(\frac{m \pi a}{2a} \right)} \sinh \left(\frac{m \pi 0}{2} \right) \right] \operatorname{sen} \left(\frac{m \pi a}{2a} \right).$$

Logo,

$$w_h = -\frac{p_0 a^4}{D \pi^5} \sum_m \frac{k_m}{m^5} \left[\frac{1}{2 \cosh \left(\frac{m \pi}{2} \right)} \left(2 + \frac{m \pi}{2} \tanh \left(\frac{m \pi}{2} \right) \right) \right] \operatorname{sen} \left(\frac{m \pi}{2} \right). \quad (4.24)$$

Portanto, a flexão da Placa é dada por

$$w(x, y) = w_p - \frac{p_0 a^4}{D \pi^5} \sum_m \frac{k_m}{m^5} \left[\frac{1}{2 \cosh \left(\frac{m \pi}{2} \right)} \left(2 + \frac{m \pi}{2} \tanh \left(\frac{m \pi}{2} \right) \right) \right] \operatorname{sen} \left(\frac{m \pi}{2} \right), \quad (4.25)$$

sendo

$$w_p = \begin{cases} \frac{2 p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_m \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \left(\frac{m \pi x}{a} \right), & \text{para } m = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{4 p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_m \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \left(\frac{m \pi x}{a} \right), & \text{para } m = 2, 6, 10, \dots \end{cases} \quad (4.26)$$

Uma sub-rotina para calcular a solução da equação (4.25) foi implementada computacionalmente no software Octave. A implementação foi dividida em duas etapas: na primeira etapa é mostrado o desenvolvimento para obtenção da solução particular w_p . E na segunda, é apresentada a solução homogênea w_h .

4.2.1 Obtenção da Solução Particular w_p

Nas Figuras 27 e 28 são apresentadas a implementação computacional do algoritmo para a solução particular w_p , dada por

$$w_p = \frac{2p_0a^4}{\pi^5D} \sum_m \frac{1}{m^5} \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right), \text{ para } m = 1, 3, 5, \dots \quad (4.27)$$

e a representação gráfica desta solução.

Figura 27 – Sub-rotina para cálculo de w_p equação (4.27)

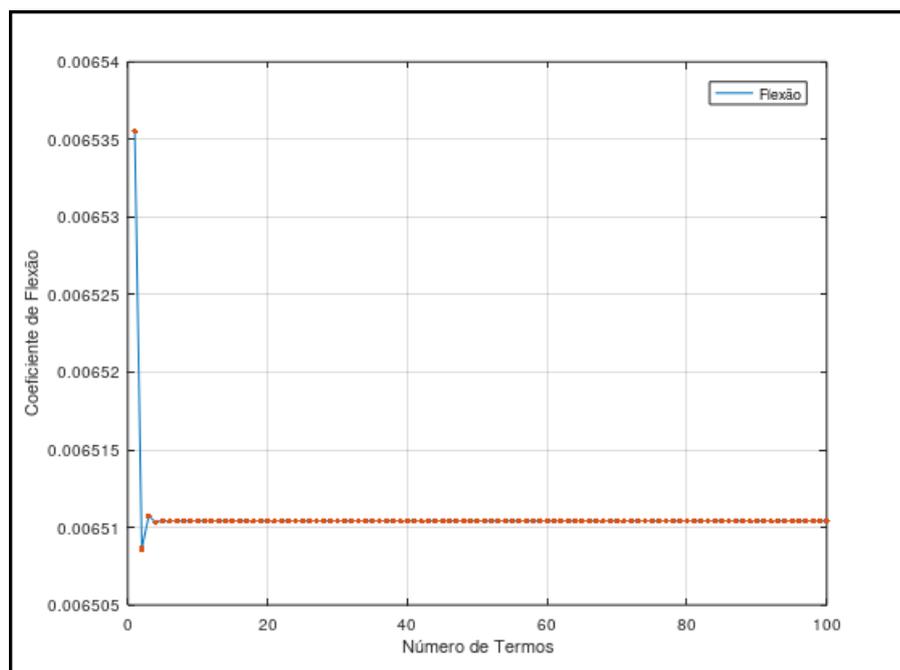
```

1  p = 2/(pi^5);
2  i = 0; sr4=0
3
4  for n=1:2:200
5      i = i+1
6      c2 = 1/n^5;
7      t2 = sin((n*pi)/2);
8      sr4 = sr4 + c2*t2
9      wp = p*sr4
10     y(i) = wp
11 endfor
12
13 plot(1:length(y),y,1:length(y),y,'.','markersize',12)
14 xlabel('Número de Termos')
15 ylabel('Coeficiente de Flexão')
16 legend('Flexão')

```

Fonte: Próprio autor.

Figura 28 – Gráfico da solução w_p equação (4.27)



Fonte: Próprio autor.

Tabela 5 – Flexão Máxima - Solução de Lévy

w_p equação (4.27)	
Número de Termos da Séries	w_p
1	0,0065355
2	0,0065086
3	0,0065107
4	0,0065103
5	0,0065104
10	0,0065104
15	0,0065104

Fonte: Próprio autor.

Observa-se, na Figura 28, que a solução precisa de poucos termos para convergir. De fato, analisando-se a Tabela 5, construída conforme o gráfico, nota-se que a série converge para 0,0065104, já a partir do quinto termo. Portanto, o coeficiente numérico resultante para a solução particular w_p é 0,0065104.

Agora, para a função particular w_p , representada por

$$w_p = \frac{4p_0a^4}{\pi^5 D} \sum_m \frac{1}{m^5} \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right), \text{ para } m = 2, 6, 10, \dots, \quad (4.28)$$

tem-se a implementação computacional do algoritmo na Figura 29 e sua representação gráfica na Figura 30.

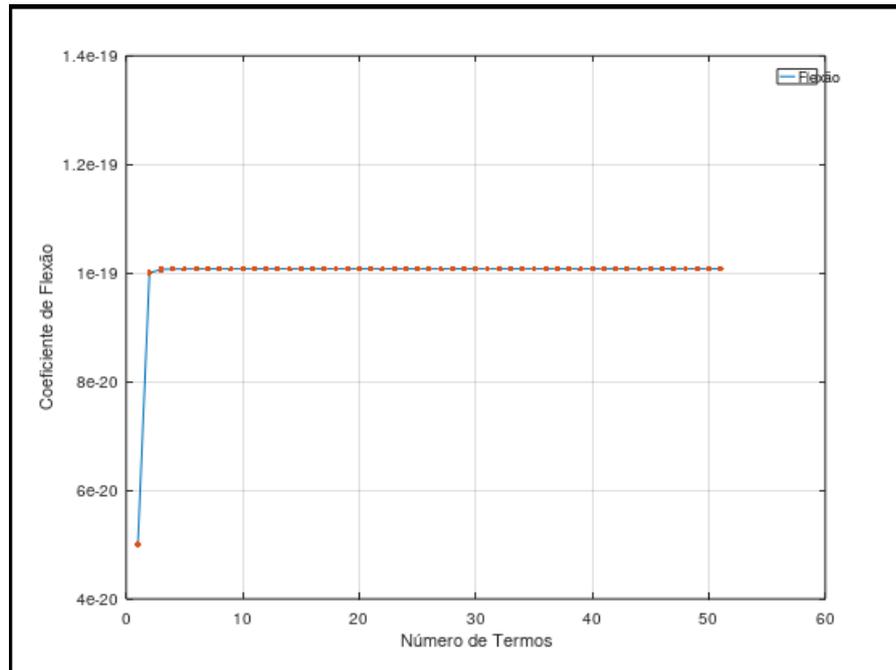
Figura 29 – Sub-rotina para o cálculo de w_p equação (4.28)

```

1  p = 4/(pi^5);
2  i = 0; sr4=0
3
4  for n=-2:4:400
5      i = i+1;
6      c2 = 1/n^5;
7      t2 = sin((n*pi)/2);
8      sr4 = sr4 + c2*t2
9      wp = p*sr4
10     y(i) = wp
11     endfor
12
13     plot(1:length(y),y,1:length(y),y, '.', 'markersize',12)
14     xlabel('Número de Termos')
15     ylabel('Coeficiente de Flexão')
16     legend('Flexão')

```

Fonte: Próprio autor.

Figura 30 – Gráfico da solução w_p equação (4.28)

Fonte: Próprio autor.

Observa-se pela Figura 30 que a solução w_p , equação (4.28), converge para 1.0078×10^{-19} a partir do quinto termo. Assume-se, neste momento, que a solução w_p , equação (4.28) converge para zero.

Dessa forma, a solução particular da placa é dada por

$$w_p = 0,0065104 \frac{p_0 a^4}{D}. \quad (4.29)$$

4.2.2 Obtenção da Solução Homogênea w_h

O cálculo para obtenção da solução homogênea w_h foi realizado seguindo as mesmas etapas descritas na subseção 4.2.1: o algoritmo foi implementado computacionalmente no software Octave e dividido em duas etapas, uma vez que a solução homogênea depende dos valores de k_m , equação (4.23), dependendo do valor de m . Tomando-se a equação (4.24),

$$w_h = -\frac{p_0 a^4}{D \pi^5} \sum_m \frac{k_m}{m^5} \left[\frac{1}{2 \cosh\left(\frac{m\pi}{2}\right)} \left(2 + \frac{m\pi}{2} \tanh\left(\frac{m\pi}{2}\right) \right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right), \quad (4.30)$$

primeiramente, considera-se o caso em que $k_m = 2$ para $m = 1, 3, 5, \dots$. A Figura 31 apresenta a sub-rotina implementada computacionalmente no software Octave.

Figura 31 – Sub-rotina para calcular w_h para $k_m = 2, m$ ímpar

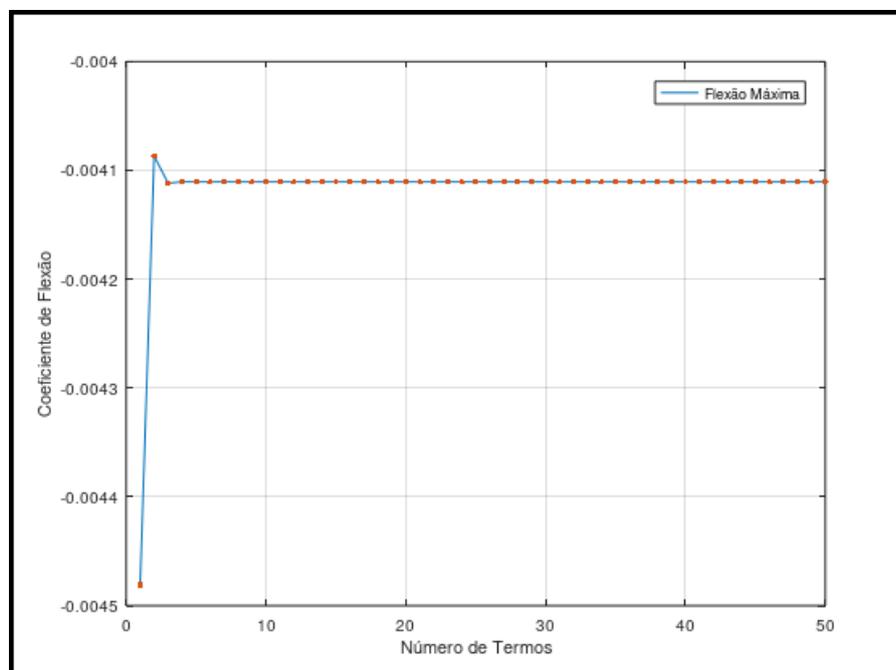
```

1 k = -(2/(pi^5))
2 s1=0; i=0;
3 for m=1:2:100
4     i=i+1;
5     c1 = 1/(2*cosh((m*pi)/2));
6     c2 = (2+((m*pi)/2)*tanh((m*pi)/2));
7     c3 = 1/m^(5);
8     t1 = sin((m*pi)/2);
9     s1 = s1 + c1*c2*t1;
10    wm = k*s1
11    y(i) = wm
12
13 end
14
15 plot(1:length(y),y,1:length(y),y,'.','markersize',12)
16 xlabel('Número de Termos')
17 ylabel('Coeficiente de Flexão')
18 legend('Flexão Máxima')

```

Fonte: Próprio autor.

A Figura 32 apresenta a representação gráfica da solução w_h para $k_m = 2, m$ ímpar.

Figura 32 – Gráfico da solução w_h para $k_m = 2, m$ ímpar

Fonte: Próprio autor.

Observa-se pelo gráfico (Figura 32) que a solução converge rapidamente. Na verdade, analisando-se a Tabela 6 conclui-se que a convergência, em 7 algarismos significativos, é obtida com 5 termos da série. O resultado obtido para w_h , considerando $k_m = 2, m$ ímpar, é igual a $-0,0041105$.

Tabela 6 – Flexão Máxima - Solução de Lévy

Solução w_h para $k_m = 2, m$ ímpar	
Número de Termos da Séries	w_h
1	-0,0044809
2	-0,0040868
3	-0,0041118
4	-0,0041104
5	-0,0041105
10	-0,0041105
15	-0,0041105

Fonte: Próprio autor.

Agora, considerando-se $k_m = 4$ para $m = 2, 6, 10, \dots$, as Figuras 33 e 34 mostram os resultados obtidos. Avaliando-se o gráfico (Figura 34) chega-se a conclusão que a solução converge utilizando-se, também, de poucos termos. Na verdade, obtém-se o resultado utilizando-se 3 termos da série. O resultado obtido para w_h , considerando-se $k_m = 4$ para $m = 2, 6, 10, \dots$, é igual à $-3,6 \times 10^{-19}$. Assume-se, neste momento, que a solução w_h , considerando-se $k_m = 4$ para $m = 2, 6, 10, \dots$ converge para zero.

Figura 33 – Sub-rotina para calcular w_h para $k_m = 4, m = 2, 6, 10, \dots$

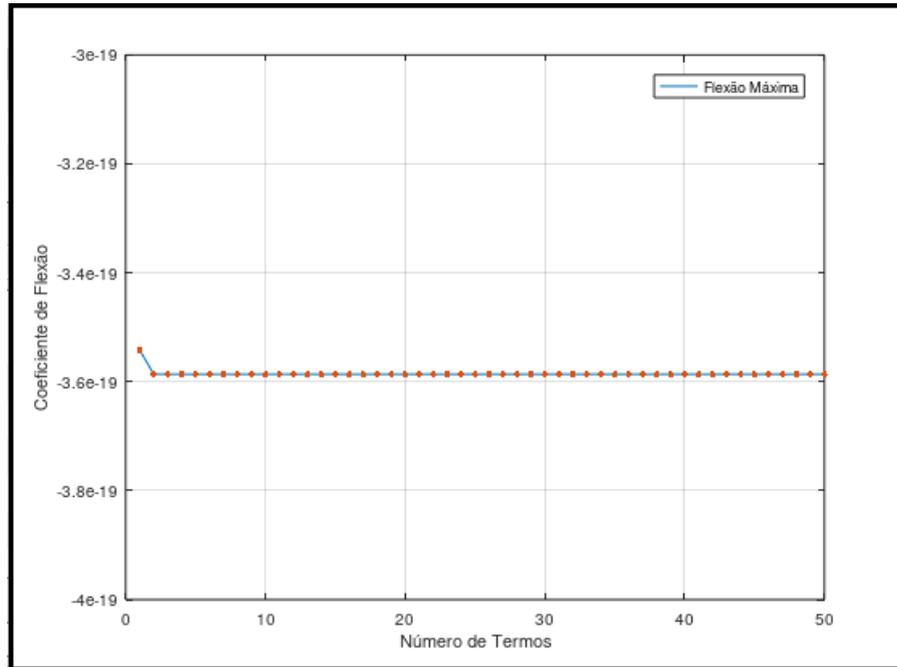
```

1 k = -(4/(pi^5))
2 s1=0; i=0;
3 for m=2:4:100
4     i=i+1;
5     c1 = 1/(2*cosh((m*pi)/2));
6     c2 = (2+((m*pi)/2)*tanh((m*pi)/2));
7     c3 = 1/m^(5);
8     t1 = sin((m*pi)/2);
9     s1 = s1 + c1*c2*t1;
10    wm = k*s1
11    y(i) = wm
12
13 end
14
15 plot(1:length(y), y, 1:length(y), y, '.', 'markersize', 12)
16 xlabel('Número de Termos')
17 ylabel('Coeficiente de Flexão')
18 legend('Flexão Máxima')

```

Fonte: Próprio autor.

Figura 34 – Solução w_h para $k_m = 4$, $m = 2, 6, 10, \dots$



Fonte: Próprio autor.

Portanto, a solução homogênea w_h é dada por:

$$w_h = -0,0041105 \frac{p_0 a^4}{D}. \tag{4.31}$$

Somando-se as soluções w_p , equação (4.29) e w_h , equação (4.31), obtém-se a flexão da placa pelo Método de Lévy:

$$w = [0,0065104 - 0,0041105] \frac{p_0 a^4}{D} \approx 0,00239 \frac{p_0 a^4}{D}. \tag{4.32}$$

Os resultados obtidos para o Problema 4.2.1 são comparados com os dados disponíveis em (TIMOSHENKO, 1959), que serviram de base para este trabalho. A Tabela 7 apresenta a comparação entre os resultados, considerando-se 3 algarismos significativos.

Tabela 7 – Comparação dos Coeficientes de Flexão

Coeficientes de Flexão w	
Dados	$w = \alpha \cdot \frac{p_0 a^4}{D}$
	α
Timoshenko	0,00203
Leitão Dias	0,00239

Fonte: Próprio autor.

Pode-se avaliar na Tabela 7 que a solução para a flexão w proposta por (TIMOSHENKO, 1959) e a descrita neste trabalho apresentam a concordância de 3 algaris-

mos significativos.

Os problemas apresentados neste trabalho foram resolvidos pela Solução de Navier e pela Solução de Lévy. Tais soluções analíticas são ditas exatas, pois, em ambos os casos, foi possível, por meio das Séries de Fourier, transformar um conjunto infinito de equações algébricas não-lineares em soluções de precisão que resolvem os problemas aplicados pela Equação Diferencial da Placa. Constatou-se fazendo a comparação entre os dois problemas que cada um só é resolvido por um tipo de solução apenas, ou seja, o Problema 4.1.1 só soluciona-se pela Solução de Navier e o Problema 4.2.1 só soluciona-se pela Solução de Lévy. Isso depende-se das condições de contorno associadas a cada problema. E também que o Método de Lévy mostrou-se mais eficaz do que do o Método de Navier pelo fato que a convergência em Lévy é muito mais rápida do que em Navier.

5 Conclusão

O conhecimento do comportamento estrutural de placas é essencial para um dimensionamento que garanta a integridade estrutural dos elementos e, conseqüentemente, da estrutura como um todo.

Neste trabalho estudou-se a Equação Diferencial de Lagrange, que descreve o comportamento de uma placa por meio da função deslocamento $w(x, y)$ nas direções x e y quando nesta é colocada uma carga genérica p_0 . A solução desta equação foi obtida, de acordo com condições de contorno pré-estabelecidas, através de dois métodos: a Solução de Navier, empregando Séries Duplas de Fourier e a Solução de Lévy, utilizando Série de Fourier em uma variável.

Os algoritmos para o cálculo das soluções e obtenção de sua representação gráfica foram implementados computacionalmente para os dois métodos propostos no presente trabalho, tendo em vista uma maior eficácia em relação a convergência desses resultados. A implementação foi feita em linguagem Octave, versão 5.1.0.

Verificou-se que para a Solução de Navier é necessário, de um modo geral, trabalhar com vários termos da série e, mesmo assim, a convergência da solução não é obtida para alguns casos. O fato das séries que representam os valores dos coeficientes de flexão e dos momentos fletores não convergirem de modo rápido para um resultado satisfatório implicou na necessidade de um processo alternativo em relação à resolução de Navier: a Solução de Lévy, que resulta em convergências mais rápidas e satisfatórias.

Os resultados obtidos, a partir da aplicação da metodologia proposta nesse trabalho, comportaram-se de maneira satisfatória e demonstram que as soluções analíticas constituem uma importante ferramenta de análise, além dos modelos computacionais, que podem auxiliar engenheiros e matemáticos aplicados no estudo do cálculo estrutural das placas.

Conclui-se, dessa forma, que as soluções analíticas propostas pelos Métodos de Navier e Lévy são suficientes para determinar as equações de deslocamentos e dos momentos fletores para certos casos, conforme condições de contorno adequadas. Além disso, a elaboração deste trabalho foi fundamental para uma melhor compreensão de como a Matemática é aplicada na área da Engenharia Civil e da importância de um conhecimento matemático profundo para o estudo de modelos que representam fenômenos presentes na natureza através de equações diferenciais.

Como propostas de continuidade, propõe-se estudar a convergência para as Séries de Fourier para cada um dos métodos de solução. Além disso, investigar a eficácia de

outros métodos para solucionar a Equação Diferencial da Placa, tais como os métodos numéricos computacionais, como por exemplo, os Método das Diferenças Finitas e Método de Elementos Finitos.

Referências

- ABUNAHMAN, S. A. *Equações Diferenciais*. Rio de Janeiro: EDC, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 23, 25 e 26.
- ANTON, H. *Cálculo, volume 1*. Porto Alegre: ABDR, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 13, 20 e 21.
- ARAÚJO, J. M. de. *Curso de Concreto Armado V.2*. Rua Tiradentes, 105 - Cidade Nova - Rio Grande: FURG, 2003. Citado 12 vezes nas páginas 11, 24, 38, 39, 40, 41, 43, 45, 49, 51, 53 e 57.
- BIEZUNER, R. J. Introdução às equações diferenciais parciais. In: _____. Minas Gerais: [s.n.], 2007. Citado 3 vezes nas páginas 31, 33 e 35.
- COSTA, R. de S. *Uma Estudo de Equações Diferenciais Aplicado à Deflexão de Vigas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, outubro 2010. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306111/1/Costa_RicharddeSouza_M.pdf>. Citado na página 10.
- FILHO, J. de M. *Estudo das Lajes*. 2004. Disponível em: <<http://www.feis.unesp.br/Home/departamentos/engenhariacivil/nepae/estudo-das-lajes.pdf>>. Citado na página 11.
- GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. *Cálculo B: Funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais Curvilíneas e de superfície*. São Paulo: [s.n.], 1999. Citado na página 20.
- GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. *Cálculo A: Funções, limites, derivação e integração*. São Paulo: [s.n.], 2006. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 16.
- HIBBELER, R. C. *Resistência dos Materiais*. São Paulo: Pearson, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 11, 39 e 40.
- HSU, H. P. *Análisis de Fourier*. México: Fondo Educativo Interamericano, 1970. Citado 5 vezes nas páginas 13, 14, 15, 27 e 28.
- JOHN, F. *Partial differential equations*. Nova York: Springer, 1982. Citado 4 vezes nas páginas 23, 26, 57 e 72.
- JR, F. A. *Trigonometria Plana e Esférica*. São Paulo: McGraw-Hill Book, 1954. Citado na página 27.
- KREIDER, e. D. L. *An Introduction to Linear Analysis Volume 2*. Massachus: Addison-Wesley Publishing Company Inc, 1966. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.
- LIMA, E. L. *Análise no Espaço \mathbf{R}^n* . Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- LIMA, E. L. *Análise Real volume 2*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2009. Citado na página 22.

- LUCA, G. de. *Versatilidade: a marca da engenharia civil hoje*. 2018. Disponível em: <<https://www.vagas.com.br/profissoes/carreiras/engenharia-civil/versatilidade-a-marca-da-engenharia-civil-hoje/>>. Citado na página 10.
- LÓRIO, V. *EDP Um Curso de Graduação*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 26.
- RODRIGUEZ, B.; MENEGHETTI, C.; POFFAL, C. Limites de funções reais de uma variável. In: _____. RIO GRANDE: [s.n.], 2016. Disponível em: <<http://lemas.furg.br>>. Citado na página 17.
- RODRIGUEZ, B.; POFFAL, C.; MENEGHETTI, C. Notas de aula de equações diferenciais - séries de fourier. In: _____. RIO GRANDE: [s.n.], 2016. Disponível em: <<http://lemas.furg.br>>. Citado na página 18.
- SOUSA, C. M. P. de. *Uma Aplicação Das Equações Diferenciais à Deflexão de Vigas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Semiárido - UFRSA, Mossoró - RN, fevereiro 2013. Disponível em: <<http://www2.ufrsa.edu.br/portal/view/uploads/setores/270/TCC>>. Citado na página 36.
- STEINBRUCH, P. W. A. *Álgebra Linear*. São Paulo: Pearson, 1987. Citado na página 17.
- SZILARD, R. *Theories and Applications of Plate Analysis*. New Jersey: [s.n.], 2004. Citado 7 vezes nas páginas 11, 45, 53, 63, 64, 67 e 69.
- TAGUTI, Y. *Método dos elementos de contorno na resolução do problema de segunda ordem em placas delgadas*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2010. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/105339/taguti_y_dr_guara.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Citado na página 11.
- THOMAS, G. *Cálculo - Volume 1*. São Paulo: Pearson, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 18.
- THOMAS, G. *Cálculo - Volume 2*. São Paulo: Pearson, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 13, 29 e 30.
- TIMOSHENKO, S. *Theory of Plates and Shells*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1959. Disponível em: <http://www.cap-recifal.com/ccs_files/articles/cuveaqua1_denisio/Timoshenko_-_Theory_of_plates_and_shells.pdf>. Citado 4 vezes nas páginas 11, 71, 72 e 84.
- ZILL, D. G. *Equações Diferenciais com aplicações em modelagem*. São Paulo: Cengage Learning, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 22, 25 e 26.