Maicon Mesquita Martins

Cálculo Diferencial e suas aplicações na Teoria da Análise Marginal

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Maio, 2021

Maicon Mesquita Martins

Cálculo Diferencial e suas aplicações na Teoria da Análise Marginal

Trabalho de Conclusão de Curso, Matemática Aplicada Bacharelado, submetido por Maicon Mesquita Martins junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Matemática Aplicada Bacharelado

Orientador: Dr. Ricardo Leite dos Santos

Coorientador: Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Maio, 2021

Universidade Federal do Rio Grande
Instituto de Matemática, Estatística e Física
Curso de Matemática Aplicada Bacharelado

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova o Trabalho de Conclusão de Curso

Cálculo Diferencial e suas aplicações na Teoria da Análise Marginal

elaborado por
Maicon Mesquita Martins

como requisito parcial para a obtenção do grau de
Bacharel em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Ricardo Leite dos Santos

Ricardo Leite dos Santos, Dr.
(Presidente/Orientador)

Cinthya M. S. Meneghetti

Cinthya Maria Schneider Meneghetti, Dra.
(Coorientadora)

Grasiela Martini

Grasiela Martini, Dra. (FURG)

Adilson da Silva Nunes

Adilson Nunes, Dr. (FURG)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
18 de maio de 2021.

Dedico este Trabalho à minha filha Maria Cecília.

Agradecimentos

Agradeço especialmente a Deus por ter saúde e pela oportunidade de poder estar estudando em uma Universidade Federal.

A FURG, especialmente ao IMEF, pela oportunidade de cursar o curso Matemática Aplicada, e por me dar o suporte necessário para a minha formação.

Aos meus professores, por me proporcionar os conhecimentos necessários para a escrita do meu trabalho.

Agradeço os professores da banca, Adilson e Grasiela pelos elogios e sugestões referentes ao trabalho.

Um agradecimento especial aos meus orientadores Ricardo e Cinthya por toda ajuda, paciência e ensinamentos. Pois, sem a dedicação deles, certamente não teria concluido esta etapa da minha formação.

Aos meus colegas, por toda ajuda nos momentos em sala de aula.

E por último, agradeço aos meus familiares por todo o carinho e as palavras de incentivo, que foram fundamentais para que eu não desistisse desta importante etapa da minha formação.

Faça o teu melhor, na condição que você tem,
enquanto você não tem condições melhores,
para fazer melhor ainda!
(Mário Sérgio Cortella)

Resumo

O presente Trabalho de Conclusão de Curso do curso de Matemática Aplicada, com ênfase em Matemática Aplicada à Economia buscou, por meio de conceitos do Cálculo Diferencial, estudar aplicações em Economia. Mais precisamente, apresentaremos a Teoria da Análise Marginal que resolve a questão sobre o aumento de produção ou o preço de um determinado produto em uma empresa. Também ajuda a decidir as melhores escolhas para obter o maior lucro. Para auxiliar a visualização e aplicação dos conceitos estudados, foram utilizados os softwares livres Python e GeoGebra.

Palavras-chaves: Cálculo Diferencial, Teoria da Análise Marginal, Python e GeoGebra.

Abstract

The present Course Conclusion Paper for the Applied Mathematics course, with an emphasis on Mathematics Applied to Economics, sought, through the concepts of Differential Calculus, to study applications in Economics. More precisely, we will present the Theory of Marginal Analysis that solves the question about the increase in production or the price of a certain product in a company. It also helps you decide the best choices to get the biggest profit. To assist the visualization and application of the studied concepts, the free software Python and GeoGebra were used.

Key-words: Differential Calculus, Theory of Marginal Analysis, Python and GeoGebra.

Sumário

Introdução

A atual situação econômica do Brasil tem causado grandes incertezas para as empresas em geral, que não se sentem seguras ao investir em novas tecnologias, produtos e serviços, recuando na hora de aplicar o seu capital. Sendo assim, o profissional de matemática aplicada, com ênfase em economia, está assumindo um papel de destaque no mercado de trabalho, uma vez que seus conhecimentos podem ajudar na tomada de decisão, sobre possíveis investimentos em cenários macro e microeconômicos.

O objetivo geral deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) é mostrar para os leitores a importância de alguns conceitos do Cálculo Diferencial aplicados na Economia. Serão abordados alguns tópicos do Cálculo Diferencial, por exemplo, limites e derivadas. Pretende-se ilustrar conceitos da Teoria da Análise Marginal, como o custo, a receita e o lucro utilizando os softwares livres Python e GeoGebra.

Ao fazer um levantamento sobre o uso dos softwares em relação as aplicações da matemática na economia, encontra-se uma matéria no site da Universidade de São Paulo (USP) que deixa evidente algumas possibilidades da contribuição da matemática nesta área, conforme fica explícito no seguinte trecho:

> As novas possibilidades fizeram crescer a demanda por novos modelos matemáticos capazes de seguir a flexibilidade dos dados e gerar resultados mais confiáveis. Luis Hernando Vanegas Penagos, doutor pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP, utilizou modelos já existentes para desenvolver um software de código livre que pode ser hoje utilizado por diversos campos da ciência (JASMINE, 2019).

O autor Vilches (2018), aborda como o Cálculo Diferencial pode ser aplicado na economia, possibilitando a uma determinada empresa fazer uma melhor análise entre seus custos, buscando uma maior lucratividade. Segundo o autor:

> Em Economia, as funções diferenciáveis são chamadas marginais. O conceito de derivada na Economia é aplicado na chamada Análise Marginal. A Análise Marginal, essencialmente, estuda o aporte de cada produto e/ou serviço no lucro das empresas. Ela tenta dar respostas a perguntas do tipo: é conveniente deixar de produzir um determinado produto já existente? Que quantidade de um produto, uma empresa deve vender para continuar produzindo? Quais são os efeitos nos lucros da empresa quando ocorrem perturbações na demanda de um produto? É conveniente terceirizar? (VILCHES, 2018, p. 291).

No decorrer desse trabalho serão discutidos os seguintes tópicos: objetivos da pesquisa, revisão bibliográfica, metodologia, fundamentação matemática, fundamentação econômica, resultados, considerações finais e referências.

No Capítulo 2 de revisão bibliográfica, apresentaremos uma breve introdução dos conceitos que serão abordados no trabalho, e uma pesquisa no site da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), na busca por trabalhos acadêmicos que contribuíssem de forma significativa para a elaboração desta pesquisa.

No Capítulo 3 metodologia, estão descritos os caminhos da pesquisa, mostrando os conceitos que serão utilizados, além de um exemplo nos moldes que serão abordados no trabalho.

Na fundamentação matemática, serão abordados conceitos e definições sobre as Funções e o Cálculo Diferencial.

Na fundamentação econômica, serão apresentados alguns conceitos da área da economia e será feita a articulação entre os conceitos matemáticos e econômicos.

Nos resultados, foram apresentados as articulações entre conceitos do Cálculo Diferencial e da Economia.

Nas considerações finais, são desenvolvidas as contribuições da matemática na economia para o desenvolvimento da saúde financeira das empresas.

1 Objetivos

Neste capítulo estão descritos o objetivo geral e os objetivos específicos desse trabalho.

1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é estudar aplicações do Cálculo Diferencial na Economia.

1.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos do Trabalho de Conclusão do Curso são:

- Estudar os conceitos do Cálculo Diferencial;
- Abordar a teoria da análise marginal;
- Resolver problemas de matemática aplicados à economia utilizando conceitos do Cálculo Diferencial;
- Utilizar os softwares Python e GeoGebra para auxiliar a visualização e aplicação dos conceitos estudados;
- Mostrar a importância da Teoria de Análise Marginal na saúde financeira das empresas.

2 Revisão Bibliográfica

O Cálculo Diferencial é utilizado na resolução de diversos problemas que envolvem taxas de variação, além de ser uma das principais ferramentas presente em áreas como economia, engenharia, biologia, entre outras. Conforme Thomas, Weir e Hass (2012, p. 144):

> Engenheiros usam os termos velocidade e aceleração para se referir às derivadas das funções que descrevem o movimento. Os economistas também possuem um vocabulário específico para taxas de variação e derivadas. Eles as chamam de *marginais*.

Este Trabalho de Conclusão de Curso consiste em estudar os conceitos e definições do Cálculo Diferencial, destacando algumas de suas aplicações na Economia, mais precisamente a Teoria da Análise Marginal, onde será estudada a receita marginal, que é a derivada da função receita, o custo marginal, que significa a derivada da função custo e o lucro marginal, sendo a derivada da função lucro. Como diferencial, serão utlizados os softwares livres Python e GeoGebra, que irão auxiliar a visualização e aplicação dos conceitos estudados. Os autores Pinho, Vasconcellos e Toneto JR (2017, p. 77) destacam que a "Análise marginal: representou um instrumento, rapidamente difundido, para explicar a alocação de determinados recursos escassos entre os usos correntes, com o objetivo de se chegar a resultados ótimos."

Buscando fazer uma pesquisa sobre a temática, foi feita uma busca no portal de periódicos da Capes e em sites. Dentre diversos trabalhos destacam-se três envolvendo o Cálculo Diferencial com aplicações na Economia.

O artigo científico de Abizai Campos Lima, intitulado "As derivadas e a sua aplicação na Análise Marginal de Custos na Economia" (LIMA, 2016), tem por objetivo mostrar aos leitores o importante papel do Cálculo Diferencial ao determinar o custo marginal dentro das empresas, sendo o custo de se produzir unidades a mais do que foi pretendido. Sendo assim, o Cálculo Diferencial se referencia como uma ferramenta importante no plano empresarial.

O artigo científico de Jhonatha Vieira Santos, intitulado "Derivada: Uma Ferramenta importante nas resoluções de problemas em economia" (SANTOS, 2013), tem por finalidade trazer para os seus leitores a aplicação do Cálculo Diferencial em problemas de economia, mais precisamente na apresentação da função custo marginal, constatando o importante papel da derivada na área econômica.

A monografia de Wesklemir Lacerda Pereira, intitulada "Aplicação do Cálculo Diferencial, em especial as derivadas na economia e administração" (PEREIRA, 2012), tem como principal objetivo estudar os conceitos e definições das derivadas e suas aplicações na matemática financeira, visando levar aos economistas e administradores as ferramentas do Cálculo que irão os auxiliar na resolução dos problemas financeiros da empresa, chegando ao seu principal objetivo, o lucro.

Estas pesquisas aproximam-se da temática que será abordada neste trabalho, pois apresentam as ferramentas do Cálculo Diferencial utilizadas na resolução dos problemas em economia, com ênfase nos problemas de análise marginal.

3 Metodologia

Neste capítulo será apresentada a metodologia do trabalho. Inicialmente, serão retomados os conceitos matemáticos necessários para a compreensão dos exemplos de aplicação discutidos no trabalho. Em seguida, ocorrerá a apresentação da fundamentação econômica que é essencial para o entendimento desses exemplos. Ao longo do trabalho também está inserida uma breve discussão sobre a escolha dos softwares Python e GeoGebra utilizados para ilustrar os conceitos apresentados.

No decorrer da pesquisa serão apresentados os seguintes conceitos que serão utilizados no trabalho: Funções; Limite de uma função; Cálculo Diferencial; Aplicações do Cálculo Diferencial; Teoria da análise marginal (função custo, função receita e a função lucro).

Segundo os autores, o custo marginal da produção é a taxa de variação do custo total em relação ao nível de produção, isto é, a derivada da função custo $c(x)$ em relação a quantidade a ser produzida x. A receita total ou rendimento da venda é o faturamento obtido com a venda de um certo produto ou serviço.

Os economistas algumas vezes representam uma função de custo total com um polinômio. Por exemplo, no caso de um polinômio cúbico

$$c(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

com $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, onde δ representa os custos fixos, como aluguel, aquecimento central, capitalização de equipamentos e gestão de custos. Os outros termos representam custos variáveis, como aqueles com matéria-prima, impostos e mão de obra. Os custos fixos são independentes do número de unidades produzidas, enquanto os custos variáveis dependem da quantidade produzida. Em geral, um polinômio é indicado para captar o comportamento de custos em um intervalo de valores realistas.

Vejamos um exemplo retirado do livro: Cálculo, Volume 1 dos autores Thomas, Weir e Hass (2012, p. 145). O exemplo auxilia a compreensão dos conceitos da área da economia que são necessários para o desenvolvimento de sua resolução e interpretação dos resultados obtidos.

Exemplo 1. *Suponha que o custo seja*

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

dólares para produzir x aquecedores quando são produzidas de 8 a 30 unidades e que

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

represente a receita da venda de x aquecedores. Sua loja produz 10 aquecedores por dia. Qual será o custo adicional aproximado para produzir um aquecedor a mais por dia e qual será o aumento estimado no rendimento da venda de 11 aquecedores por dia?

A partir de conceitos do cálculo diferencial é possível estimar o custo adicional. Ele será de 195 dólares. A função rendimento marginal estima o aumento no rendimento como resultado da venda de uma unidade adicional. Se você vende atualmente 10 aquecedores por dia, pode esperar que seu rendimento aumente para em torno de 252 dólares, se a venda aumentar para 11 aquecedores por dia. Para obter essa estimativa, novamente são usados conceitos do cálculo diferencial.

O cálculo das derivadas efetuado no Exemplo 1 pode ser feito por meio do aplicativo de linguagem de programação Python online (https://live.sympy.org/), conforme a Figura 1:

Figura 1 – Cálculo de derivadas

```
>>> x = symbols('x')
>>> diff(x**3-6*x**2+15*x,x)
```

$$3x^2 - 12x + 15$$

```
>>> diff(x**3-3*x**2+12*x,x)
```

$$3x^2 - 6x + 12$$

Fonte: Acervo pessoal

Com o passar dos anos, os softwares vem sendo cada vez mais utilizados pelos estudantes e profissionais de diversas áreas, como matemática e economia, pois facilita na resolução dos cálculos, apresentação dos gráficos, entre outras utilidades. Nesse sentido, o softwares livres Python e GeoGebra contribuem na visualização e aplicação dos conceitos.

No próximo capítulo está a fundamentação matemática necessária para que seja possível desenvolver com detalhes a resolução de situações problema como a que foi enunciada no Exemplo 1.

4 Fundamentação Matemática

Neste capítulo serão abordados conceitos e definições sobre as funções, os limites e o Cálculo Diferencial. Para fundamentar a discussão desta seção, trago como referência os seguintes autores: Thomas, Weir e Hass (2012), Murolo e Bonetto (2011) e Leite (2015).

4.1 Funções

Por Thomas, Weir e Hass (2012), funções são ferramentas que descrevem o mundo real em termos matemáticos. Uma função pode ser representada por uma equação, um gráfico, uma tabela numérica ou uma descrição verbal.

Definição 1. *Uma função f de um conjunto D para um conjunto Y é uma regra que associa um único elemento $f(x) \in Y$ a cada elemento $x \in D$.*

O conjunto D é chamado de domínio da função f e esse conjunto possui todos os valores de entradas possíveis. Se x varia ao longo do conjunto D, então chamamos de imagem de uma função o conjunto de todos os valores de $f(x)$. Para algumas funções, a imagem pode não incluir todos os elementos do conjunto Y. Cabe ressaltar que, neste trabalho, serão usadas em geral as funções polinomiais.

Definição 2. *Seja f uma função definida em um intervalo I e x_1 e x_2 sejam dois pontos em I.*

1. *Se $f(x_2) > f(x_1)$ sempre que $x_1 < x_2$, então diz-se que f é crescente em I.*

2. *Se $f(x_2) < f(x_1)$ sempre que $x_1 < x_2$, então diz-se que f é decrescente em I.*

Da Definição 2, podemos concluir que, se o gráfico de uma função sobe ou aumenta enquanto você segue da esquerda para a direita, dizemos que a função é crescente. Se o gráfico desce ou diminui enquanto você segue da esquerda para a direita, a função é decrescente no intervalo considerado.

De acordo com Murolo e Bonetto (2011), na análise de fenômenos econômicos, muitas vezes usamos as funções matemáticas para descrevê-los e interpretá-los. Nesse sentido, as funções matemáticas são usadas como ferramentas que auxiliam na resolução de problemas ligados a administração de empresas.

Com o objetivo de exemplificar os diferentes tipos de funções, elas serão divididas em seções específicas, para um melhor entendimento do leitor.

4.1.1 Função do Primeiro Grau

A função polinomial do primeiro grau, também conhecida por função afim, tem suas aplicações voltadas para diversas áreas de conhecimento, especialmente no estudo dos conceitos de taxa de variação. A função afim é uma ferramenta muito utilizada por economistas no estudo das funções receita, custo e lucro, e também pelos estatísticos no estudo dos Métodos dos Mínimos Quadrados.

Definição 3. *A função do primeiro grau, também chamada de função afim, é dada por*

$$f(x) = ax + b$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$. *O domínio e a imagem dessa função é todo o conjunto dos números reais.*

O coeficiente angular a é simplesmente a taxa de variação da variável dependente y, em relação à variável independente x, e pode ser calculado pela razão

$$a = \frac{\text{variação em } y}{\text{variação em } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Sabemos que a é a taxa de variação da função, que representa a taxa de crescimento ou decrescimento da função, já b, representa o coeficiente linear, o que graficamente nos mostra o ponto $(0, b)$ em que o gráfico da função intercepta o eixo y.

De fato, fazendo $x = 0$ e substituindo na função do primeiro grau obtemos,

$$y = f(0) = a.0 + b$$

isto implica que $y = b$.

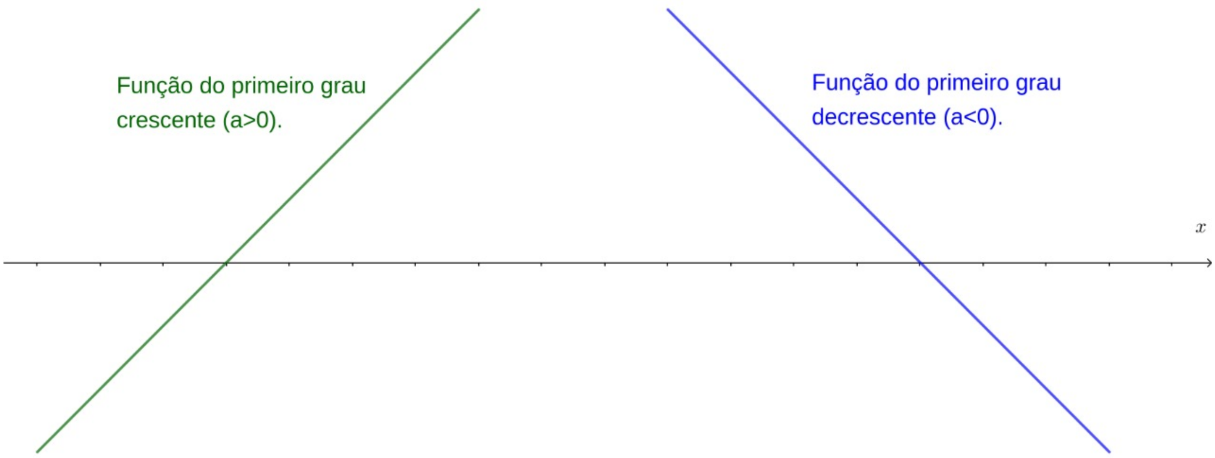
Como a nos dá basicamente a inclinação da reta, estudamos de duas maneiras o comportamento desta reta, sendo $a > 0$ e $a < 0$.

Se $a > 0$, temos uma taxa de variação positiva, logo a função é *crescente*, pois quanto maior for o valor de a, maior será a inclinação desta reta.

Se $a < 0$, temos uma taxa de variação negativa, logo a função é *decrescente.*

O gráfico da função do primeiro grau, no caso crescente e também decrescente, pode ser visto na Figura 2.

Figura 2 – Gráficos de funções do primeiro grau



Fonte: Elaborado pelo autor

4.1.2 Função do Segundo Grau

O estudo do gráfico de uma função do segundo grau é muito importante para determinar o vértice de uma parábola, pois com ele conseguimos determinar os valores de máximo, mínimo, intervalos de crescimento e decrescimento dessa função.

Definição 4. *Uma função do segundo grau é dada por*

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$*. O domínio e o contradomínio dessa função é o conjunto dos números reais.*

O gráfico da função do segundo grau é representado por uma parábola de concavidade voltada para cima ou para baixo, isto depende do valor do coeficiente a.

Se $a > 0$, então temos uma concavidade voltada para cima e se $a < 0$, temos a concavidade voltada para baixo, já o termo independente c, mostra o ponto $(0, c)$ em que a parábola corta o eixo y, pois fazendo $x = 0$ e substuindo na função do segundo grau obtemos,

$$y = f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c,$$

ou seja, $y = c$.

Para encontrar os pontos em que a parábola corta o eixo x precisamos encontrar as raízes da função do segundo grau, ou seja, resolver a equação $y = 0$. Para isso, usamos a conhecida fórmula para determinar as raízes de uma equação do segundo grau, também chamada de fórmula de Bhaskara. Logo, se temos

$$y = ax^2 + bx + c,$$

as raízes são dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Na fórmula de Bhaskara, temos o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, ao calcularmos o valor dele conseguimos determinar o número de raízes ou pontos em que a parábola corta o eixo x, assim temos três possibilidades, quando $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ e $\Delta = 0$.

Se $\Delta > 0$, temos duas raízes reais distintas, ou seja, temos dois pontos em que a parábola corta o eixo x.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \; x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Se $\Delta = 0$, temos duas raízes reais iguais,

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Se $\Delta < 0$, não existem raízes reais, ou seja, a parábola não corta o eixo x.

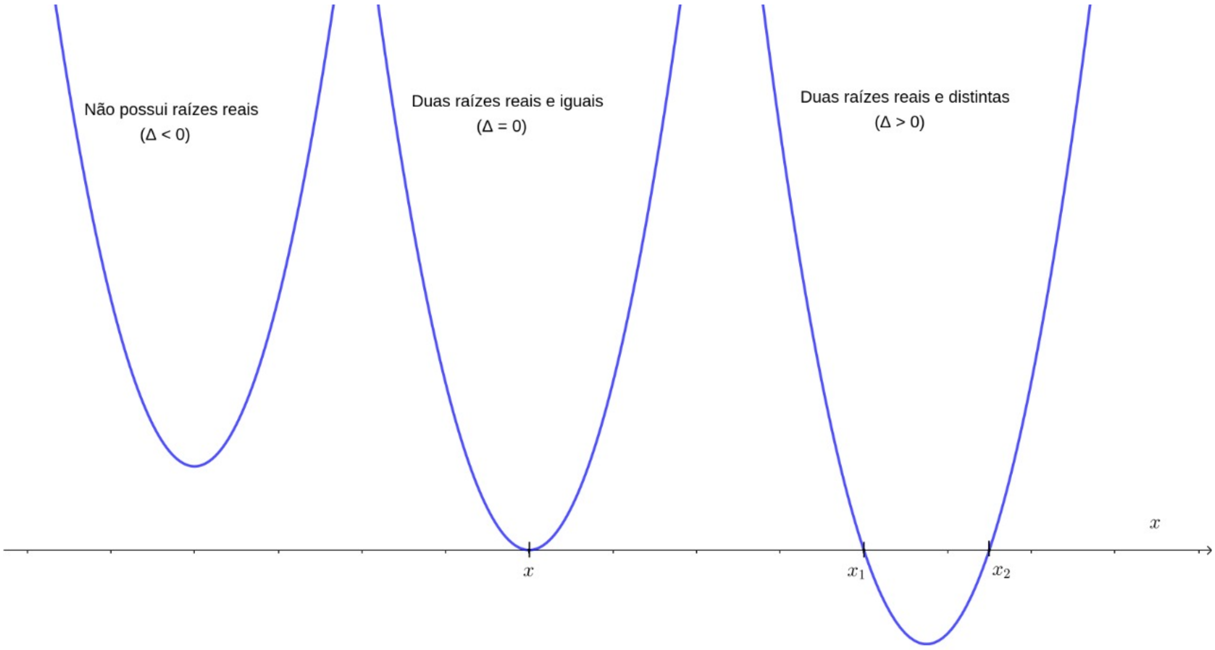
Para calcular o vértice da parábola utilizamos a seguinte expressão:

$$V = (x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Observe que o vértice é o ponto de maior (ou menor) altura da parábola. Com isso, podemos concluir que se $a > 0$, então a imagem da parábola é $[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$ e se $a < 0$, então a imagem é $(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$.

Na Figura 3 é possível visualizar geometricamente cada uma das três possibilidades para Δ, quando $a > 0$.

Figura 3 – Gráficos de funções do segundo grau ($a > 0$).



Fonte: Elaborado pelo autor

4.1.3 Função Potência

Conforme Murolo e Bonetto (2011), uma das aplicações das funções potências é a análise de situações em que se vinculam quantidades produzidas de insumos utilizadas no processo de produção.

Definição 5. *Uma função potência é dada por*

$$f(x) = k \cdot x^n$$

com k, n constantes e $k \neq 0$.

Neste momento vamos estudar o comportamento da função potência de duas maneiras, as com expoente inteiro, positivo e par ($n = 2t, t \in \mathbb{N}$) e as com expoente inteiro, positivo e ímpar ($n = 2t - 1, t \in \mathbb{N}$).

Observe que, as potências ímpares, quando $k > 0$, são funções crescentes para todos os valores do domínio e seus gráficos são simétricos em relação à origem. Notamos ainda que, para $x < 0$, os gráficos tem concavidade voltada para baixo para $y = x^{2t-1}$. Já, quando $x > 0$, a concavidade é voltada para cima.

Já as potências pares, quando $k > 0$, são funções crescentes para $x > 0$, funções decrescentes para $x < 0$, seus gráficos tem o formato de $\cup$ e são simétricos em relação ao eixo y. Nesse caso, notamos que a concavidade do gráfico é voltada para cima em todo $x \in \mathbb{R}$.

Existem mais exemplos de funções potências que neste momento não serão abordadas no trabalho. As funções potências fracionárias e positivas ($y = 10x^{\frac{1}{2}}$), e potências inteiras negativas ($y = 25x^{-1}$), por exemplo, não serão abordadas no trabalho.

4.1.4 Função Polinomial

A função polinomial é basicamente o que vimos até o momento nas funções de primeiro e segundo grau e também na função potência, o que muda agora é em relação ao grau da função, pois diferente das demais, a função polinomial é de grau n ($n \in \mathbb{N}$).

Para Murolo e Bonetto (2011), a função polinomial é muito utilizada em problemas que envolvem o estudo da produção em relação a utilização de insumos. Situações como o estudo da receita, custo e lucro, agora com o estudo da função polinomial poderão ser estudadas de maneira mais ampla, pois serão utilizadas funções de grau superior a 2.

Definição 6. *Uma função polinomial de grau n é dada por*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

em que n é um número natural e $a_n \neq 0$.

O domínio e o contradomínio de uma função polinomial de grau n é o conjunto dos números reais.

Alguns exemplos são:

$y = x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 12x + 1$ (grau 4)

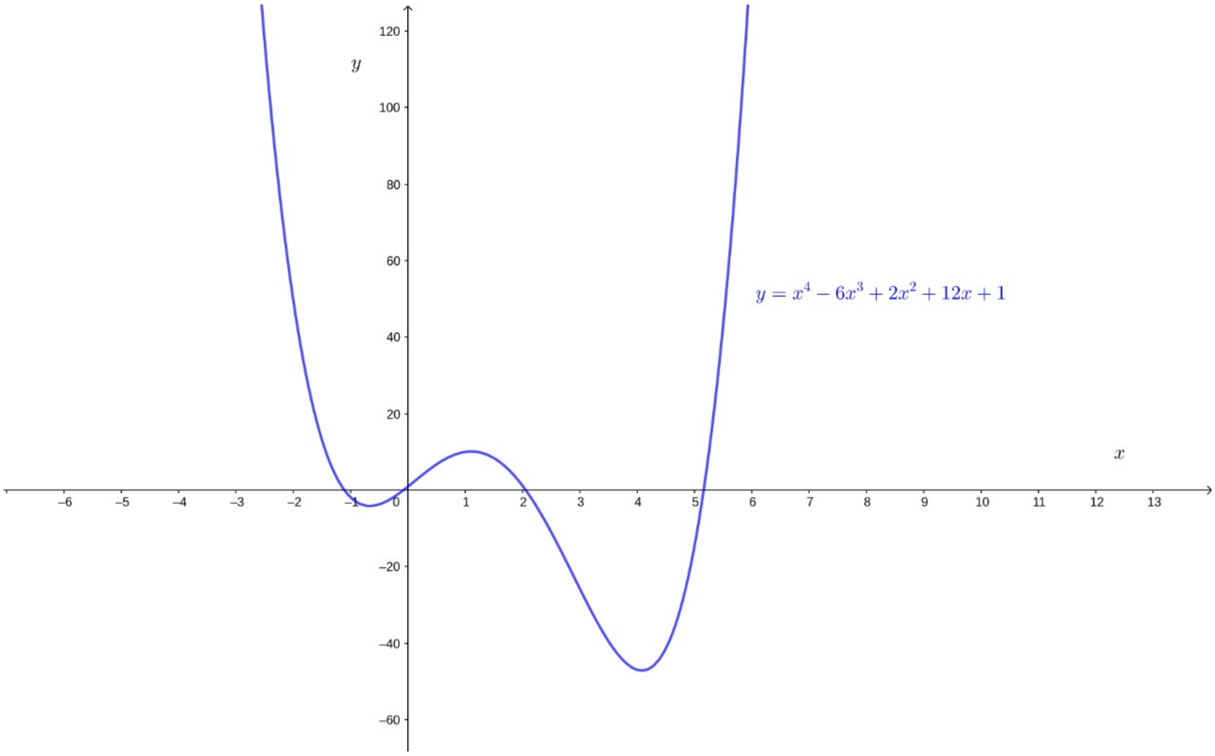
$y = 2x^3 - x^2 + x - 12$ (grau 3)

$y = -x^2 + x - 12$ (grau 2)

$y = x - 12$ (grau 1)

Na Figura 4 encontra-se um exemplo de gráfico de função polinomial de grau 4.

Figura 4 – Gráfico de $y = x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 12x + 1$



Fonte: Elaborado pelo autor

4.1.5 Função Racional

A função racional é determinada através da divisão de duas funções polinomiais, esta função também aparece muito em modelos nas áreas administrativas e econômicas.

Definição 7. *Uma função racional é um quociente ou razão $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde p e q são polinômios. O domínio de uma função racional é o conjunto de todos os números reais x para os quais $q(x) \neq 0$.*

Um exemplo de função racional é:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Qualquer função construída a partir de polinômios por meio de operações algébricas (adição, subtração, multiplicação, divisão ou extração de raízes) é enquadrada na classe das funções algébricas.

4.2 Limites

Nesta seção serão ilustrados o conceito Limite, algumas definições e exemplos que serão necessários para um melhor entendimento do Cálculo Diferencial que será abordado na próxima seção deste trabalho.

Para Thomas, Weir e Hass (2012), o conceito de um limite é fundamental para determinar a velocidade de um objeto em movimento e a tangente de uma curva. Os limites surgem quando encontramos a taxa de variação instantânea de uma função ou a tangente de uma curva.

Nos limites procuramos estudar o comportamento da função próximo a um determinado ponto, em alguns casos ao avaliar uma função no determinado ponto podemos chegar em uma indeterminação, uma divisão por zero.

Segue um exemplo de como avaliamos o comportamento de uma função próximo a um ponto, só que não podemos avaliar diretamente a função nesse ponto.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

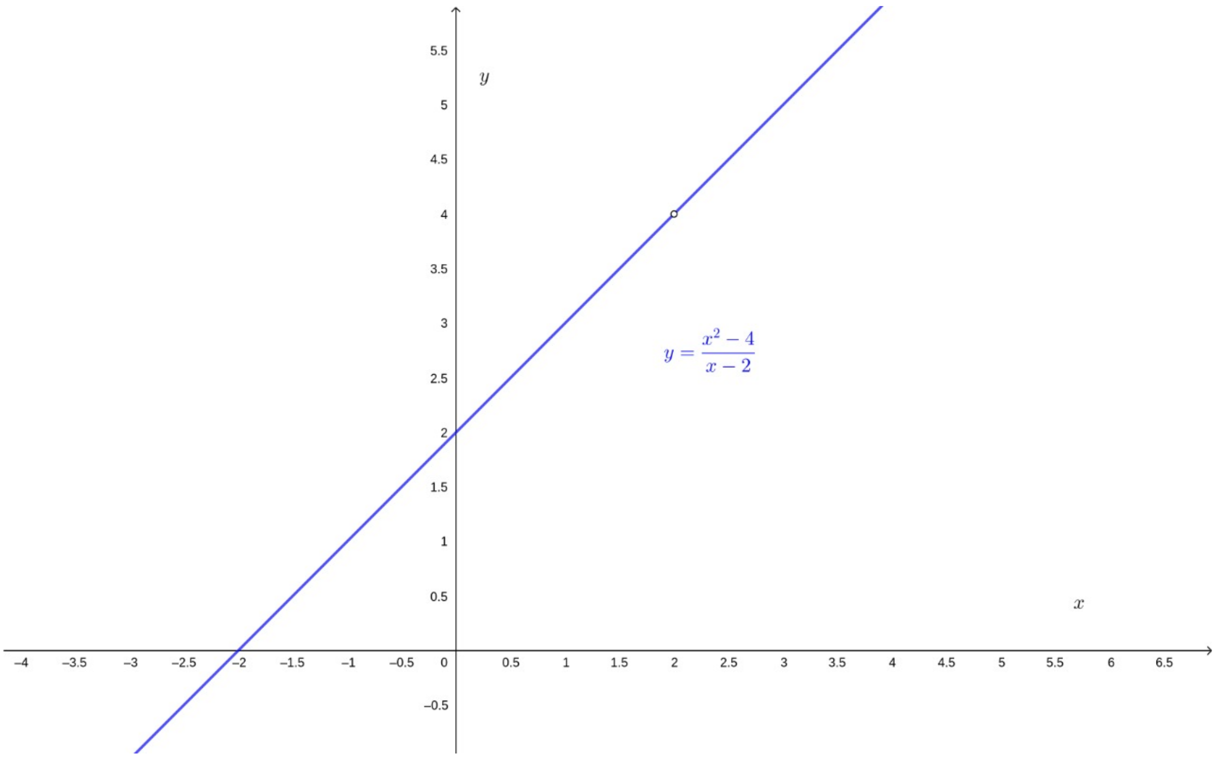
Definimos f para qualquer número real x, exceto $x = 2$, pois para qualquer $x \neq 2$ podemos simplificar a função fatorando o numerador e posteriormente cancelando os fatores comuns:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = x + 2,$$

para $x \neq 2$.

O gráfico da função f é a reta $y = x + 2$, com exceção do ponto $(2, 4)$, pois $f(2)$ não está definida. No entanto, note que podemos deixar o valor de $f(x)$ tão próximo quanto quisermos de 4 ao escolher x próximo o suficiente de 2, como podemos observar na Figura 5. Por isso, dizemos que o limite da função f, quando x tende a 2, é 4.

Figura 5 – Gráfico de $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$.



Fonte: Elaborado pelo autor

Informalmente, Thomas, Weir e Hass (2012, p. 62) definem o limite de uma função da seguinte forma:

> Suponha que f seja definida em um intervalo aberto em torno de x_0, exceto, possivelmente, no próprio x_0. Se f está arbitrariamente próxima a L (tão próxima de L quanto queiramos) para todo x próximo o suficiente de x_0, dizemos que f se aproxima do limite L quando x se aproxima de x_0, e escrevemos
>
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$
>
> que lemos como "o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 é L".

Exemplo 2. ***(a)*** *Se f é a função constante, ou seja, $f(x) = c$, para todo número x real, então $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c$, qualquer que seja o número real x_0;*
(b) *Se f é a função identidade, ou seja, $f(x) = x$, para todo número x real, então $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0$, qualquer que seja o número real x_0.*

Para calcular limites de funções que são combinações aritméticas de funções que possuem limites conhecidos, podemos utilizar diversas regras simples, as quais vamos enunciar abaixo. A demonstração de algumas dessas regras pode ser vista na Seção 2.3 de Thomas, Weir e Hass (2012).

Sejam f, g funções reais e L, M, c e k números reais tais que:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to c} g(x) = M.$$

Então,

1. Regra da Adição/Subtração: $\lim_{x\to c}(f(x) \pm g(x)) = L \pm M$;
2. Regra da multiplicação por uma constante: $\lim_{x\to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot L$;
3. Regra do Produto: $\lim_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$;
4. Regra do Quociente: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M},\ M \neq 0$;
5. Regra da Potenciação: $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = L^n$, n é um inteiro positivo;
6. Regra da Raiz: $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$, n é um inteiro positivo.
   (Se n for um número par, suporemos que $L > 0$.)

Utilizando os resultados do Exemplo 2 e as regras supracitadas, podemos calcular os seguintes limites.

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to c} x^3 - 2x^2 + 6 \begin{array}{l} = \lim_{x\to c} x^3 - \lim_{x\to c} 2x^2 + \lim_{x\to c} 6 \text{ (regra da adição/subtração)} \\ = (\lim_{x\to c} x)^3 - 2(\lim_{x\to c} x)^2 + \lim_{x\to c} 6 \text{ (produto e mult. por constante)} \\ = c^3 - 2c^2 + 6 \text{ (Exemplo 2)} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \textbf{(b)} \lim_{x\to c} \frac{x^4 + 2x^3 - 3x}{x^2 + 1} &= \frac{\lim_{x\to c} x^4 + 2x^3 - 3x}{\lim_{x\to c} x^2 + 1} \text{ (regra do quociente)} \\ &= \frac{\lim_{x\to c} x^4 + \lim_{x\to c} 2x^3 - \lim_{x\to c} 3x}{\lim_{x\to c} x^2 + \lim_{x\to c} 1} \text{ (regra da adição/subtração)} \\ &= \frac{(\lim_{x\to c} x)^4 + 2(\lim_{x\to c} x)^3 - 3\lim_{x\to c} x}{(\lim_{x\to c} x)^2 + \lim_{x\to c} 1} \text{ (produto e mult. por constante)} \\ &= \frac{c^4 + 2c^3 - 3c}{c^2 + 1} \text{ (Exemplo 2)} \end{aligned}$$

Um outro conceito importante e que será necessário para o entendimento de alguns resultados que serão enunciados a frente, é o de continuidade de uma função. Segundo Thomas, “Intuitivamente, qualquer função $y = f(x)$ cujo gráfico possa ser esboçado sobre seu domínio em um movimento contínuo, sem levantar o lápis, é um exemplo de função contínua.” (THOMAS; WEIR; HASS, 2012, p. 87).

De forma sucinta, uma função $y = f(x)$ é contínua em um ponto $x = c$ de seu domínio se satisfaz a seguinte condição:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Note que devem ocorrer dois fatos: existir o $\lim_{x\to c} f(x)$ e o valor desse limite for $f(c)$. Dizemos que uma função é contínua em um intervalo, se for contínua em todos os pontos desse intervalo. A definição precisa de continuidade pode ser vista em Thomas, Weir e Hass (2012).

Exemplo 3. *A função racional* $y = \frac{x^2-x-6}{x-3}$ *é contínua em todos os pontos do seu domínio, ou seja, em* $\mathbb{R} - \{3\}$*. Vale observar que alguns autores, como Leithold (1994), consideram a função como descontínua em* $x = 3$*.*

Observe ainda que, as funções polinomiais $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, que são os objetos de estudo deste trabalho, são contínuas em todo o seu domínio, pois claramente satisfazem as duas condições listadas acima.

4.3 Cálculo Diferencial

Nesta seção, vamos abordar mais conceitos do Cálculo Diferencial que serão importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

De acordo com Thomas, Weir e Hass (2012), a derivada é uma das ideias fundamentais em cálculo e é utilizada para resolver uma ampla gama de problemas que envolvem tangentes e taxas de variação.

4.3.1 Tangentes e Derivada no ponto

Nesta seção, vamos definir a derivada de uma função em um ponto, mas primeiro precisamos definir o coeficiente angular e a tangente em uma curva em um ponto. Mais adiante vamos estudar a interpretação da derivada como taxa instantânea de variação de uma função.

Para determinar uma tangente em uma curva arbitrária $y = f(x)$ em um ponto $P(x_0, f(x_0))$, precisamos calcular o coeficiente angular da reta secante que passa por este ponto P e por um ponto próximo $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ com h diferente de zero. Em seguida, verificamos a existência do limite (coeficiente angular) quando h tende a zero. Caso exista, o chamamos de coeficiente angular da curva em P e definimos a tangente em P como a reta que passa por P e que tem esse coeficiente angular.

Definição 8. *O coeficiente angular da curva* $y = f(x)$ *no ponto* $P(x_0, f(x_0))$ *é o número*

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

desde que o limite exista. A reta tangente à curva em P *é a que passa por* P *com esse coeficiente angular.*

Agora através da seguinte expressão podemos definir taxa de variação como a derivada em um ponto:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \text{ com } h \neq 0,$$

expressão essa chamada de quociente da diferença de f em x_0 com incremento h.

Definição 9. *A derivada de uma função f em um ponto x_0, denotada por $f'(x_0)$, é*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

desde que o limite exista.

Assim, vimos que ao analisar a derivada da função linear $f(x) = mx + b$ em qualquer ponto x_0, será simplesmente o coeficiente angular da reta, de modo que $f'(x_0) = m$, sendo esse um caso particular da Definição 8.

4.3.2 A Derivada como função

Na seção anterior definimos a derivada no ponto, agora vamos a analisar a derivada como uma função deduzida de f, considerando o limite em cada ponto x no domínio de f.

Definição 10. *A derivada de uma função $f(x)$ em relação a variável x é a função f', cujo valor em x é*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

desde que o limite exista.

De acordo com Thomas, Weir e Hass (2012), usamos a notação $f(x)$ na definição para enfatizar a variável independente x em relação a qual a função derivada $f'(x)$ que está sendo definida. O domínio de f' é o conjunto de todos os pontos do domínio de f para qual o limite existe, o que significa que o domínio pode ser o mesmo ou menor que o domínio de f. Se f' existe em um determinado x dizemos que f é derivável em x. Se f' existe em cada ponto do domínio de f, chamamos f derivável.

Uma notação muito utilizada no processo de derivação (calcular derivada) da função $y = f(x)$ é a seguinte:

$$\frac{d}{dx} f(x).$$

Existem mais algumas notações utilizadas para a derivada da função $y = f(x)$, em que a variável independente é x e a variável dependente é y, são elas

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = D(f)(x) = D_x f(x).$$

Agora na próxima seção onde vamos estudar as regras de derivação, veremos alguns exemplos de como derivar uma função.

4.3.3 Regras de derivação

Nesta seção vamos definir cada regra de derivação e mostrar com exemplos a melhor maneira de encontrar a derivada de uma função $y = f(x)$. Sabemos que existem diversos métodos de derivação, mas vamos citar apenas aqueles que serão utilizadas neste trabalho. Sendo estes, a regra da derivada de uma função constante, a regra da potência, a regra da multiplicação da derivada por uma constante e a regra da derivada da soma.

4.3.3.1 Regra da derivada de uma função constante

A derivada da função constante é a função nula.

Se f tem o valor constante $f(x) = c$, então

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

Exemplo 4. *Se $f(x) = 10$, então*

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(10) = 0.$$

4.3.3.2 Regra da potência

Se n for qualquer número real, então:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

para todo x em que as potências x^n e x^{n-1} forem definidas.

Exemplo 5. *Se $f(x) = x^2$, então*

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x^{2-1} = 2x.$$

4.3.3.3 Regra da multiplicação da derivada por uma constante

Se u for uma função derivável de x, e c for uma constante, então:

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}.$$

Em particular, se n for qualquer número real, então:

$$\frac{d}{dx}(cx^n) = cnx^{n-1}.$$

Exemplo 6. *Se $f(x) = 5x^3$, então*

$$\frac{d}{dx}(5x^3) = 5.3x^{3-1} = 15x^2.$$

4.3.3.4 Regra da derivada da soma

A derivada da soma de duas funções deriváveis é a soma de suas derivadas. Lembrando que a derivada do negativo de uma função derivável é o negativo da derivada da função.

Definição 11. *Se u e v são funções deriváveis de x, então a soma de $u+v$ é derivável em qualquer ponto em que u e v sejam deriváveis. Em tais pontos,*

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Exemplo 7. *Seja $f(x) = x^2 + 2x$. Temos $u = x^2$ e $v = 2x$, logo*

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(2x) = 2x^{2-1} + 2x^{1-1} = 2x + 2x^0 = 2x + 2.$$

Exemplo 8. *Seja $f(x) = x^2 - 2x$. Temos $u = x^2$ e $v = -2x$, logo*

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(-2x) = 2x^{2-1} - 2x^{1-1} = 2x - 2x^0 = 2x - 2.$$

4.4 Derivada Segunda e Derivada de Ordem Superior

De acordo com Thomas, Weir e Hass (2012), e pela Definição 10, se $y = f(x)$ é uma função derivável, então a sua derivada $f'(x)$ também é uma função. Se $f'(x)$ também for derivável, pode-se derivar f' para obter uma nova função de x denotada por f''. Logo, $f'' = (f')'$. A função f'' é chamada de segunda derivada de f.

Segue algumas notações,

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = y'' = D^2(f)(x) = D_x^2 f(x).$$

O mesmo acontece ao calcular as próximas derivadas, a Terceira Derivada y''', a Quarta Derivada $y^{(4)}$ e assim sucessivamente, até chegarmos a n-ésima derivada.

Exemplo 9. *Se $y = f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 2$, então temos:*

- Primeira Derivada: $y' = 4x^3 + 6x^2 + 2x + 3$
- Segunda Derivada: $y'' = 12x^2 + 12x + 2$
- Terceira Derivada: $y''' = 24x + 12$
- Quarta Derivada: $y^{(4)} = 24$
- Quinta Derivada: $y^{(5)} = 0.$

Note que a partir da quinta derivada no Exemplo 9 os resultados serão sempre zero. Podemos observar que, se $y = f(x)$ é uma função polinomial de grau n, então as derivadas de ordem maior que n são nulas.

4.5 Derivada como Taxa de Variação

Podemos interpretar a derivada como taxa de variação de uma função $y = f(x)$ em cada ponto.

4.5.1 Taxa de Variação Instantânea

Para Thomas, Weir e Hass (2012), se interpretarmos a razão incremental

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

como a taxa de variação média em f durante o intervalo de x a $x+h$, podemos interpretar seu limite quando h tende a zero como a taxa de variação de f no ponto x.

Definição 12. *A taxa de variação instantânea de f em relação a x, em $x = x_0$, é a derivada*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

desde que o limite exista.

Sendo assim, as taxas intantâneas são limites das taxas médias. Usa-se o adjetivo instantâneo mesmo quando x não apresenta tempo. Logo, quando dizemos taxa de variação, consequentemente diremos taxa de variação instantânea.

4.6 Aplicações das Derivadas

Nesta seção, vamos mostrar algumas aplicações do Cálculo Diferencial, lembrando que algumas demonstrações dos teoremas que serão abordados nesta seção podemos encontrar no livro do Thomas, Weir e Hass (2012).

4.6.1 Valores extremos das funções

Nesta seção vamos estudar os valores extremos de uma função (máximos e mínimos), a partir de sua derivada. Esta aplicação é muito importante para as derivadas, pois ajuda a resolver diversos problemas de otimização.

Definição 13. *Seja f uma função de domínio D. Então, f tem um valor máximo absoluto em D no ponto c se*

$$f(x) \leq f(c), \ \textit{para qualquer } x \in D,$$

e um valor mínimo absoluto em D no ponto c se

$$f(x) \geq f(c), \text{ para qualquer } x \in D.$$

Os valores máximos e mínimos de uma função são chamados de extremos da função f. Funções definidas pela mesma regra ou fórmula podem ter extremos diferentes, isto depende do domínio. Vejamos um exemplo, considere

$$f(x) = x^2.$$

No intervalo fechado $[0,3]$, esta função possui valor mínimo absoluto 0 para $x = 0$ e valor máximo absoluto 9 para $x = 3$. Já no intervalo aberto $(0,3)$ não possui extremos absolutos.

O teorema do valor extremo afirma que uma função que seja contínua em todo ponto de um intervalo fechado $[a,b]$ tem um valor máximo absoluto e um mínimo absoluto no intervalo. Mais precisamente,

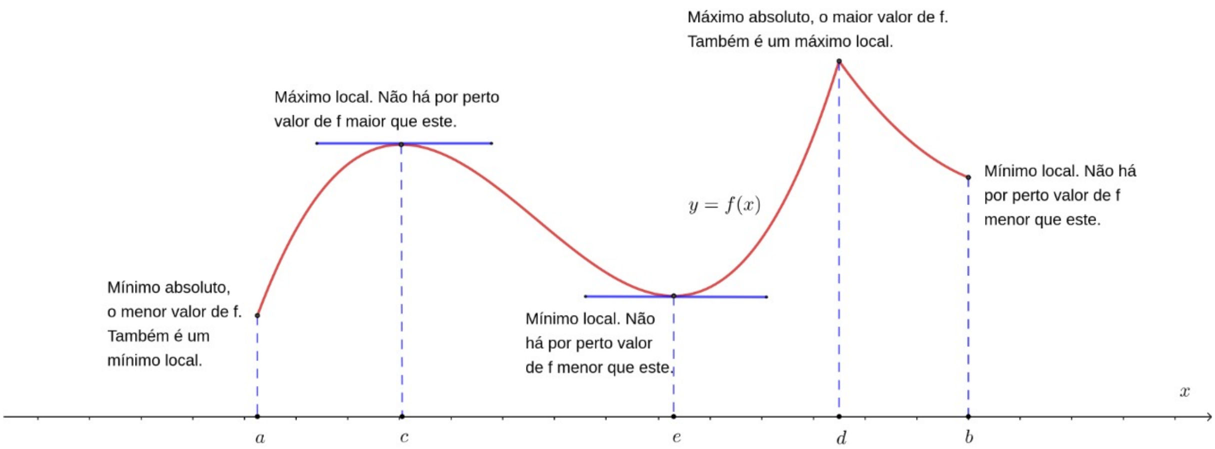
Teorema 1 (Teorema do valor extremo)**.** *Se f é contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, então f atinge tanto um valor máximo M como um valor mínimo m em $[a,b]$. Isto é, há números x_1 e x_2 em $[a,b]$ tais que $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ e $m \leq f(x) \leq M$ para qualquer valor de x em $[a,b]$.*

Agora vamos trazer as definições de mínimo local e máximo local.

Definição 14. *Uma função f tem um valor máximo local em um ponto c em seu domínio D se $f(x) \leq f(c)$ para qualquer x que pertence a D em um intervalo aberto que contenha c; Uma função f tem um valor mínimo local em um ponto c em seu domínio D se $f(x) \geq f(c)$ para qualquer x que pertence a D em um intervalo aberto que contenha c.*

A Figura 6 ilustra a Definição 14 para uma função f com $D = [a,b]$.

Figura 6 – Exemplos de valores extremos de uma função f no intervalo $[a, b]$.



Fonte: Elaborado pelo autor

Em certos momentos precisamos investigar apenas alguns valores para determinar o extremo de uma função, para isso vamos definir o teorema da derivada primeira.

Teorema 2 (Teorema da derivada primeira para valores extremos locais)**.** *Se f possui um valor máximo ou mínimo local em um ponto c interior de seu domínio e se f' é definida em c, então*

$$f'(c) = 0.$$

O teorema da derivada primeira para valores extremos locais diz que, a primeira derivada de uma função é sempre zero, em um ponto interior do seu domínio em que a função tenha um valor extremo local e a derivada seja definida. A seguir, vamos definir ponto crítico, isto nos ajudará a entender melhor estas informações.

Definição 15. *Um ponto interior do domínio de uma função f em que f' é zero ou não existe é um ponto crítico de f.*

Assim, os únicos pontos do domínio em que uma função pode assumir valores extremos são os pontos críticos e as extremidades. Agora vamos para um exemplo.

Exemplo 10. *Determine os valores de máximo e mínimo absolutos de $f(x) = x^2$ no intervalo* $[-1, 2]$.

A função é derivável em seu domínio, então para encontrarmos o ponto crítico basta apenas calcular $f'(x) = 0$ e depois verificar os valores da função nesses pontos e nos extremos do intervalo $[-1, 2]$. Temos que $f'(x) = 2x$ e $f'(x) = 2x = 0$ implica que $x = 0$. Logo, o único ponto crítico é $x = 0$, em que $f(0) = 0$. Agora vamos verificar os valores nas extrermidades $x = -1$ e $x = 2$.

$$f(-1) = (-1)^2 = 1 \text{ e } f(2) = (2)^2 = 4$$

Logo, a função apresenta um valor de mínimo absoluto 0 em $x = 0$ e um valor de máximo absoluto 4 em $x = 2$.

4.6.2 Teorema do valor médio

De acordo com Thomas, Weir e Hass (2012), o Teorema do Valor Médio, estabelecido por Joseph-Louis Lagrange, é uma versão inclinada do Teorema de Rolle. O Teorema do Valor Médio, cujo enunciado está a seguir, garante a existência de um ponto onde a reta tangente é paralela a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Teorema 3 (Teorema do valor médio)**.** *Suponha que $y = f(x)$ seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b). Então, há pelo menos um ponto c em (a, b) em que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Agora vamos para um exemplo, temos $f(x) = x^2$ que é contínua no intervalo fechado [0,3] e derivável no intervalo aberto (0,3).

De fato, temos $f(0) = 0$ e $f(3) = 9$. Pelo Teorema do Valor Médio temos,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{9 - 0}{3 - 0} = 3$$

logo $f'(c) = 3$.

O Teorema do Valor Médio nos diz que, em um ponto c no intervalo, a derivada $f'(x) = 2x$ deverá ter como valor 3. Nesse caso, podemos encontrar o valor de c resolvendo a seguinte equação:

$$2c = 3, \text{ o que implica em } c = \frac{3}{2}.$$

4.6.3 Funções monotônicas e o teste da primeira derivada

Nesta seção vamos analisar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função derivável, além disso, vamos testar os pontos críticos de uma função e encontrar os valores de seus extremos locais.

Uma função monotônica no intervalo é aquela que cresce ou decresce em um intervalo.

Definição 16. *Suponha que f seja contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Então,*

- *Se $f'(x) > 0$ em cada ponto $x \in (a,b)$, então f é crescente em $[a,b]$;*
- *Se $f'(x) < 0$ em cada ponto $x \in (a,b)$, então f é decrescente em $[a,b]$.*

Vamos analisar o teste da primeira derivada para os extremos locais de uma função, faremos três análises diferentes para encontrar estes extremos.

De acordo com Thomas, Weir e Hass (2012):
Suponha que c seja um ponto crítico de uma função contínua f, e que f seja derivável em qualquer ponto de um intervalo que contenha c, exceto, possivelmente, no próprio ponto c. Deslocando-se ao longo desse intervalo da esquerda para a direita,

- se f' passa de negativa a positiva em c, então f possui um mínimo local em c;
- se f' passa de positiva a negativa em c, então f possui um máximo local em c;
- se f' não muda de sinal em c, isto é, f' é positiva ou negativa em ambos os lados de c, então f não tem extremo local em c.

4.6.4 Concavidade

Nesta seção vamos ilustrar o conceito de concavidade, que procura estudar o comportamento de inclinação e mudança de direção de uma curva.

Definição 17. *O gráfico de uma função derivável $y = f(x)$ é*

- *côncavo para cima em um intervalo aberto I, se f' é crescente em I;*
- *côncavo para baixo em um intervalo aberto I, se f' é decrescente em I.*

Se $y = f(x)$ possui uma segunda derivada, aplicando o Teorema do Valor Médio para a função da primeira derivada, podemos concluir que f' é crescente se $f'' > 0$ em I e decrescente se $f'' < 0$ em I.

Agora vamos enunciar o teste da segunda derivada para determinar a concavidade do gráfico de uma função $y = f(x)$.

- Se $f'' > 0$ em I, o gráfico de f ao longo de I é côncavo para cima;
- Se $f'' < 0$ em I, o gráfico de f ao longo de I é côncavo para baixo.

Como exemplo, vamos determinar a concavidade de uma função do segundo grau:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Temos que $f'(x) = 2ax + b$ e $f''(x) = 2a$. Portanto,

- se $a > 0$, então $f'' > 0$ e o gráfico de f é côncavo para cima;
- se $a < 0$, então $f'' < 0$ e o gráfico de f é côncavo para baixo.

Observe que esse resultado está de acordo com os obtidos na Seção 4.1.2.

Definição 18. *Um ponto em que o gráfico de uma função possui uma reta tangente e onde há mudança de concavidade é chamado de ponto de inflexão.*

Observe que, se a segunda derivada existe em um ponto de inflexão $(x, f(x))$, então $f''(x) = 0$.

Agora vamos estudar o teste da segunda derivada para extremos locais, ele é muito importante para determinar a presença e a natureza destes extremos. Vejamos no Teorema à seguir.

Teorema 4. *Suponha que f'' seja contínua em um intervalo aberto que contenha $x = c$.*

- *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em $x = c$;*
- *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em $x = c$;*
- *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$, então o teste falha. A função f pode ter um máximo local, um mínimo local ou nenhum dos dois.*

Exemplo 11. *Determinar os valores extremos, monotocidade e concavidade da seguinte função:*

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 5.$$

Temos que f é uma função polinomial, então seu domínio é $\mathbb{R}$ e é derivável com $f'(x) = 4x^3 - 24x^2$. Como o domínio de f' também é $\mathbb{R}$, temos que os pontos críticos de f ocorrem apenas nas raízes de f'. Logo, resolvendo a equação $f'(x) = 0$, obtemos que as raízes de f' são $x = 0$ e $x = 6$. Agora, analisando o sinal de f' temos que f é decrescente em $(-\infty, 0]$ e $[0, 6]$, e crescente em $[6, +\infty)$.

Usando o teste da primeira derivada para extremos locais, vimos que não há extremo quando $x = 0$ e que há um mínimo local quando $x = 6$.

Temos $f''(x) = 12x^2 - 48x$. Logo, a segunda derivada é zero quando $x = 0$ e $x = 4$, assim temos que f é côncava para cima nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(4, +\infty)$ e côncava para baixo de $(0, 4)$.

4.7 Sobre os softwares GeoGebra e Python

O uso de tecnologias para o auxílio do entendimento dos conceitos matemáticos está sendo cada vez mais comum nas instituições de ensino devido a sua importância. Outro ponto interessante é que cada vez mais, esses recursos estão sendo disponibilizados de forma on-line, o que facilita o seu acesso, pois não se tem a necessidade de instalar um programa ou aplicativo para serem utilizados. Neste trabalho foram utilizados dois desses recursos, softwares livres on-line, um para o cálculo de derivadas e outro para o esboço do gráfico de funções.

Um deles foi o GeoGebra (<https://www.geogebra.org/classic>) que já é bastante conhecido, de fácil manipulação e a sua utilização não necessita de cadastro ou login. O GeoGebra é um software de matemática que abrange todos os níveis de ensino e praticamente todas as áreas da matemática. Neste trabalho o uso foi para esboçar os gráficos de algumas funções. Com isso foi possível elucidar conceitos e aplicações do cálculo diferencial.

Outro recurso utilizado foi o software de programação Python. O Python é uma linguagem de programação acessível e muito popular, tanto nas academias quanto na industria da tecnologia. Neste trabalho o Python foi utilizado através interface online SymPy, diretamente no site (<https://live.sympy.org/>), sem a necessidade da realização de cadastro ou login. O principal recurso utilizado foi o cálculo de derivadas que é feito a partir da sintaxe $\texttt{diff}(\texttt{funcao}, \texttt{variavel})$ e a declaração de variáveis que é feita a partir da sintaxe $\texttt{x}, \texttt{y} = \texttt{symbols}('\texttt{x y}')$. Para o leitor interessado, em SYMPY (2021) encontra-se um tutorial on-line detalhado e com muitos exemplos para quem não é familiarizado com a linguagem de programação.

Exemplo 12 (Exemplo 9)**.** *Calcular a derivada de* $y = x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 2$ *utilizando o SymPy.*

Começamos declarando a váriavel x:

$$\texttt{x} = \texttt{symbols}('\texttt{x}').$$

Agora basta aplicar a função derivação na expressão com a escrita em linguagem de programação Python para obter a primeira derivada:

$$\texttt{diff}(\texttt{x} * *4 + 2 * \texttt{x} * *3 + \texttt{x} * *2 + 3 * \texttt{x} + 2, \texttt{x})$$

A Figura 7 mostra o resultado.

Figura 7 – Exemplo de cálculo da primeira derivada

```
>>> x =symbols('x')
>>> diff(x**4+2*x**3+x**2+3*x+2,x)
```

$$4x^3 + 6x^2 + 2x + 3$$

Fonte: Elaborado pelo autor

No Exemplo 9 calculou-se derivadas de ordens maiores, o que podemos fazer aqui simplesmente adicionando mais uma vez a variável a qual se refere a derivada, que nesse caso é o x. Por exemplo, para calcular a derivada de ordem 3, o comando será:

$$\texttt{diff}(\texttt{x} * *4 + 2 * \texttt{x} * *3 + \texttt{x} * *2 + 3 * \texttt{x} + 2, \texttt{x}, \texttt{x}, \texttt{x}),$$

como podemos ver na Figura 8.

Figura 8 – Exemplo de cálculo de uma derivada de terceira ordem

```
>>> x =symbols('x')
>>> diff(x**4+2*x**3+x**2+3*x+2,x,x,x)
```

$$12\,(2x + 1)$$

Fonte: Elaborado pelo autor

Este software oferce muitas funções matemáticas relacionadas ao cálculo, como por exemplo, uma função para o cálculo de limites. Para calcular o limite:

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

a sintaxe é:

$$\texttt{limit}(\texttt{f}(\texttt{x}), \texttt{x}, \texttt{a}).$$

A Figura 9 mostra como realizar o cálculo do limite $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$, exemplo abordado na introdução da Seção 4.2.

Figura 9 – Exemplo de cálculo de um limite

```
>>> x = symbols('x')
>>> limit((x**2-4)/(x-2),x,2)
```

$$4$$

Fonte: Elaborado pelo autor

5 Fundamentação Econômica

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos da área da economia, conforme Murolo e Bonetto (2011), Vilches (2018) e Leite (2015). Além disso, será feita a articulação entre conceitos matemáticos e econômicos, buscando mostrar a importância da Teoria de Análise Marginal na saúde financeira das empresas.

5.1 Conceituação

A análise marginal é um estudo custo-benefício de uma atividade empresarial, este estudo procura levar em consideração as variáveis custo e produção, como unidades produzidas. Se há mudança nessas variáveis, certamente haverá mudança na rentabilidade, sendo assim, a análise marginal é uma ferramenta muito utilizada na maximização dos lucros, pois sua mudança marginal na produção poderá afetar o lucro da empresa.

A quantidade demandada de um certo produto depende de uma série de fatores, tais como: o preço, a quantidade ofertada, a renda do consumidor, a qualidade do mesmo, etc. Se por ventura o preço unitário aumentar, certamente haverá uma queda na demanda deste produto, também podemos dizer que se o preço unitário cair certamente haverá um aumento na quantidade demandada deste produto.

O modelo mais simples para caracterizar a função demanda, será a função do primeiro grau polinomial.

5.1.1 Função Demanda e Oferta

Vejamos à seguir a definição das funções Demanda e Oferta de acorco com Vilches (2018).

Definição 19. *Se denotamos por p o preço unitário de um produto e por x a quantidade demandada deste produto oferecido no mercado por uma empresa, então a função $x = f(p)$ que os relaciona é chamada função de damanda.*

$$x = f(p) = ap + b, a < 0.$$

Assim, temos o coeficiente angular negativo, pois quanto maior o preço do produto, menor a quantidade demandada.

O gráfico da função demanda é conhecido por curva de demanda, curva essa que está na forma descendente, devido as diversas alterações que a função demanda sofre, ocasionadas pelos preços de bens, gostos dos consumidores, etc.

A quantidade ofertada de um certo produto depende basicamente de uma série de fatores, tais como: preço unitário, tecnologias, custos, quantidade demandada, etc.

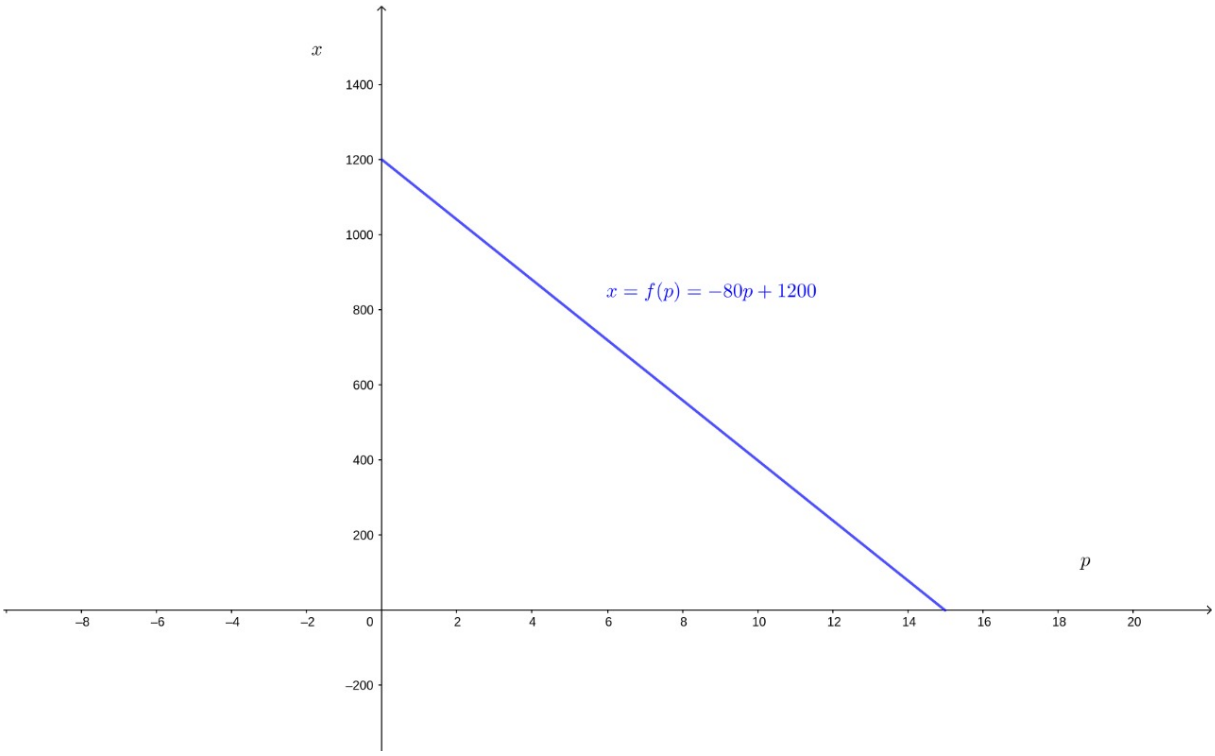
Exemplo 13. *Uma companhia ferroviária verificou que quando cobra 6 reais pela passagem, a média de passagens vendidas é de 720 e quando o preço é de 11 reais, a média de passagens vendidas é de 320. Determine a função de demanda.*

Supondo que a função demanda é da forma $f(p) = ap + b$, temos as seguintes informações $f(6) = 720$ e $f(11) = 320$. Logo, temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} 720 = 6a + b \\ 320 = 11a + b \end{cases},$$

das quais obtemos que $a = -80$ e $b = 1200$. Logo, $x = f(p) = -80p + 1200$ é a função demanda. Um esboço do gráfico dessa função é mostrado na Figura 10.

Figura 10 – Gráfico da função demanda



Fonte: Elaborado pelo autor

Definição 20. *Se denotamos por p o preço unitário de um produto e por x a quantidade do produto oferecido no mercado, então a função $p = f(x)$ que os relaciona é chamada* *função de oferta.*

$$p = f(x) = ax + b, a \geq 0.$$

Logo, o coeficiente angular é não-negativo, pois quanto maior a quantidade do produto oferecido, maior é o seu preço.

O gráfico da função de oferta é conhecida por curva de oferta, é uma curva de forma ascendente porque o aumento do preço unitário faz com que os empresários tenham um maior interesse na fabricação de novos produtos.

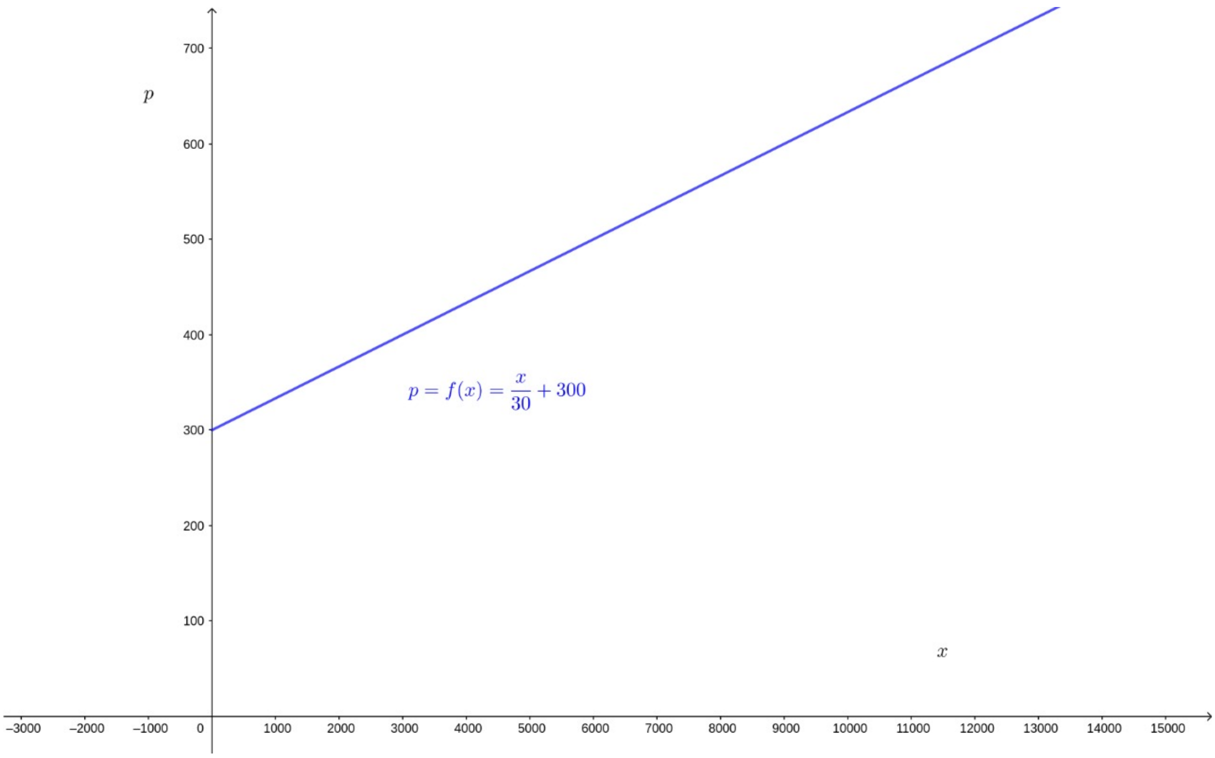
Exemplo 14. *Quando o preço de mercado de certo produto atinge R$ 300,00 por unidade, a fábrica não produz este produto; quando o preço do produto aumenta R$ 20,00 a fábrica disponibiliza 600 unidades do produto no mercado. Determine a função de oferta.*

Denotando por $f(x) = ax+b$ a função oferta, temos que $f(0) = 300$ e $f(600) = 320$. Isto nos fornece as seguintes equações:

$$\begin{cases} b = 300 \\ 600a + b = 320 \end{cases},$$

das quais obtemos que $a = \frac{1}{30}$ e $b = 300$. Logo, a função oferta é dada por $p = f(x) = \frac{x}{30} + 300$. Um esboço do gráfico dessa função é mostrado na Figura 11.

Figura 11 – Gráfico da função oferta



Fonte: Elaborado pelo autor

5.2 Função Receita

A Função Receita (R) é basicamente o faturamento obtido por um certo produto ou serviço, ela possui apenas duas variáveis, a variável independente x que representa a quantidade produzida e a variável dependente y que representa o preço unitário de venda de um produto. Com isso, chegamos na seguinte expressão:

$$R(x, y) = yx.$$

Como a Função Receita depende de duas variáveis, se por acaso a quantidade vendida alterar e o preço unitário de um certo produto variar, certamente haverá modificações no faturamento da empresa.

Definição 21. *A Receita é uma curva, e reflete o fato de que a empresa só consegue vender um nível maior de um produto reduzindo o preço. A inclinação dessa curva é a Receita Marginal ($R_{Mg}(x)$) que mostra em quanto varia a receita quando o nível de produção aumenta em uma unidade, supondo que o preço unitário permanece constante.*

Em economia, a variação de uma quantidade em relação a outra pode ser descrita pelo conceito marginal, por exemplo, a Função Custo Marginal que corresponde a taxa de variação do Custo para a produção de x unidades de um certo produto. Logo, a Função Marginal é a derivada da função correspondente, função esta que pode ser a Função Custo, a Função Receita e a Função Lucro.

A Receita Marginal é a derivada da Função Receita em relação a x, e nos permite encontrar o valor obtido com a venda de uma próxima peça. Assim temos,

$$R_x(x, y) \approx R(x + 1, y) - R(x, y)$$

$$R_{Mg}(x) = R'(x) \approx R(x + 1) - R(x)$$

É usual omitir a variável y, pois o valor unitário do produto costuma não mudar.

Agora vamos ilustrar com um exemplo para melhor entendermos a aplicação do cálculo das derivadas na Função Receita.

Exemplo 15. *Considerando o preço como $f(x) = -4x + 100$, é possível determinar a Receita, Receita Marginal e qual será o faturamento obtido com a venda de mais uma peça quando $x = 10$. Vale relembrar que a Receita de um produto é dada por $R(x) = yx$, na qual y é o preço em função da quantidade demandada x. Como o valor da Receita é*

$R(x) = yx$, *temos:*

$$\begin{aligned} R(x) &= (-4x + 100)x \\ &= -4x^2 + 100x \end{aligned}$$

Agora podemos encontrar o valor da Receita Marginal, para isso precisamos calcular a derivada da Função Receita.

$$R_{Mg}(x) = R'(x) = -8x + 100.$$

Figura 12 – Derivada da função receita no SymPy

```
>>> x = symbols('x')
>>> diff(-4*x**2+100*x,x)
```

$$100 - 8x$$

Fonte: Elaborado pelo autor

Agora que já calculamos a Receita Marginal vamos aplicar os valores de $x = 10$ *no resultado encontrado. Como* $R'(10) = -8(10) + 100 = 20$, *estima-se que a* 11^a *peça irá gerar para a empresa um faturamento de aproximadamente R\$ 20,00 a mais.*

Para determinarmos o valor exato do faturamento obtido com a venda da 11^a *peça precisamos calcular os valores da Receita de* $x = 10$ *e* $x = 11$. *Para isso só precisamos substituir os valores de* x *na Função Receita depois faremos a diferença entre os resultados. Temos que:*

$$R(10) = -4(10)^2 + 100(10) = 600,$$

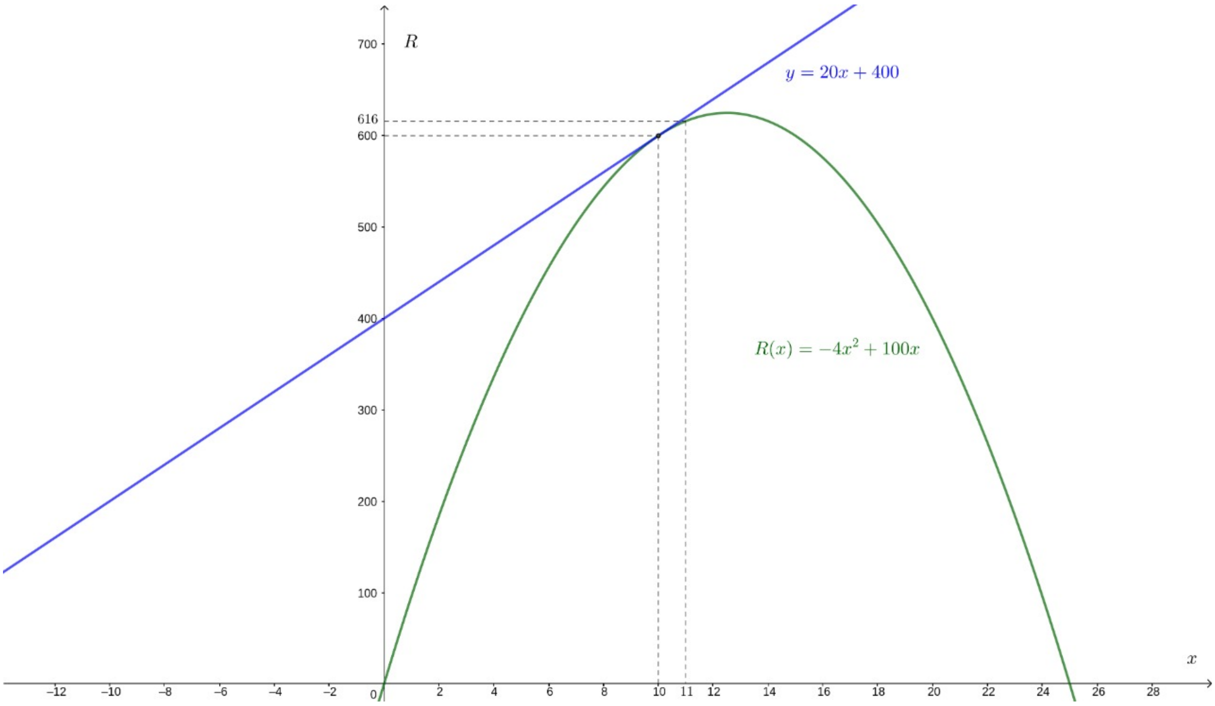
$$R(11) = -4(11)^2 + 100(11) = 616.$$

Agora vamos determinar o valor do faturamento exato com o valor de venda da 11^a *peça:*

$$R(11) - R(10) = 616 - 600 = 16.$$

Desse modo, como a derivada é positiva em $x = 10$, *conclui-se que ainda valerá a pena reduzir o preço para vender mais uma unidade, pois o faturamento da empresa está* *crescendo. Com a venda de todas as 11 unidades, a empresa terá o faturamento estimado de:* $R(10) + R'(10) = 600 + 20 = 620$ *e um faturamento real de:* $R(11) = 616$*. Temos que,* $R'(10)$ *é aproximadamente* $R(11) - R(10) = 16$*. Na Figura 13, temos o gráfico da Função Receita e da Reta tangente.*

Figura 13 – Gráfico da função receita e reta tangente no ponto $(10, 600)$



Fonte: Elaborado pelo autor

Considerando a Função Receita do exemplo anterior, é possível fazer uma previsão de quanto será o faturamento obtido com a venda de mais uma peça quando $x = 20$, depois determinar o faturamento exato que irá obter na venda da 21ª peça e, por fim, comparar os resultados obtidos.

Vamos encontrar o valor da Receita Marginal, para isso precisamos calcular a derivada da Função Receita.

$$R_{Mg}(x) = R'(x) = -8x + 100.$$

Agora que já calculamos a Receita Marginal vamos aplicar os valores de $x = 20$ no resultado encontrado. Como $R'(20) = -8(20) + 100 = -60$, estima-se que 21ª peça irá gerar para a empresa uma redução no faturamento de aproximadamente R$ 60,00.

Para determinarmos o valor exato do faturamento obtido com a venda da 21ª peça precisamos calcular os valores da Receita de $x = 20$ e $x = 21$, para isso só precisamos substituir os valores de x na Função Receita e depois faremos a diferença entre os resultados.

$$R(20) = -4(20)^2 + 100(20) = 400$$

$$R(21) = -4(21)^2 + 100(21) = 336$$

Agora vamos determinar o valor do faturamento exato com o valor de venda da 21ª peça:

$$R(21) - R(20) = 336 - 400 = -64$$

Desse modo, como a derivada é negativa $R'(20) = -60$, vimos que ainda não valerá a pena reduzir o preço para vender mais uma unidade, pois o faturamento da empresa está decrescendo.

Com a venda de todas as 21 unidades, a empresa terá o faturamento estimado de: $R(20) + R'(20) = 400 + (-60) = 340$ e um faturamento real de: $R(21) = 336$. Temos que, $R'(20) = -60$ é aproximadamente $R(21) - R(20) = -64$.

5.3 Função Custo

A Função Custo (C) representa o custo para produção de um certo produto ou serviço, e é composta de duas parcelas, os custos fixos e os custos variáveis. Os custos fixos são aqueles custos que independem do número de unidades produzidas, por exemplo, o aluguel, material de limpeza, etc. Já os custos variáveis são aqueles custos que dependem da quantidade produzida, estes custos sofrem alterações em curto prazo, por exemplo, custos com mão de obra, comissão de vendas para o funcionário, matéria-prima, insúmos produtivos, etc. De modo geral, podemos dizer que a Função Custo é obtida pela soma de uma parte variável, o Custo Variável (C_v), com uma parte fixa, o Custo Fixo (C_f), como podemos ver no seguinte exmplo:

Exemplo 16. *A Tabela 1 traz o custo para a produção de calçados.*

Quantidade (x)	0	5	10	20
Custo (C)	100	110	120	140

Tabela 1 – Custo para a produção de calçados

Notamos que há uma variação na variável independente x gerando uma variação proporcional na variável dependente C, o que caracteriza uma função do primeiro grau. Logo, podemos calcular a taxa de variação na variável dependente C, em relação a variável independente x, pela razão

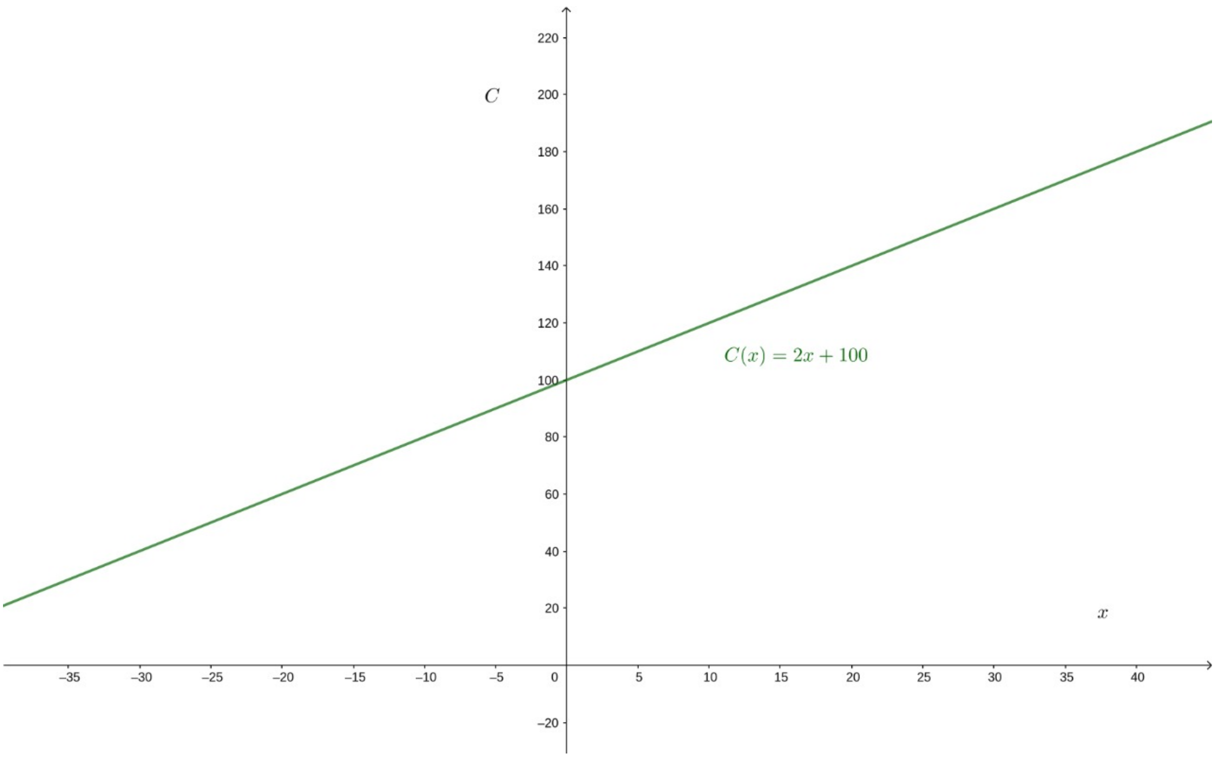
$$m = \frac{\textit{variação em } C}{\textit{variação em } x} = \frac{10}{5} = \frac{10}{5} = \frac{20}{10} = 2$$

Assim temos $m = 2$ que nos dá um acréscimo no custo que corresponde ao acréscimo em uma unidade na quantidade produzida, ou seja, o custo variável será $C_v(x) = 2x$, onde x é o número de unidades produzidas. Também podemos ressaltar que se por acaso não occorra a produção de ao menos um calçado, mesmo assim haverá um custo fixo de R$ 100,00 ($C_f = 100$), que corresponde a despesas com salário de funcionários, limpeza, aluguel, etc. Assim obtemos a seguinte relação para a Função Custo:

$$C(x) = C_v(x) + C_f = 2x + 100.$$

O gráfico, esboçado na Figura 14, representa uma função do primeiro grau com o coeficiente angular $m = 2$.

Figura 14 – Gráfico da função custo



Fonte: Elaborado pelo autor

Definição 22. *A Função Custo representa o custo final para produzir x unidades de um certo produto. A inclinação da curva do Custo, que mede o custo adicional da produção de uma unidade a mais de um produto, representa o Custo Marginal (C_{Mg}) da empresa.*

O seguinte exemplo é inspirado no apresentado no livro: Cálculo, Volume 1 dos autores Thomas, Weir e Hass (2012, p. 145).

Segundo esses autores, os economistas muitas vezes representam uma função de custo total com um polinômio cúbico:

$$C(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

com $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, onde δ representa os custos fixos, como aluguel, aquecimento central, capitalização de equipamentos e gestão de custos. Os outros termos representam custos variáveis, como aqueles com matéria-prima, impostos e mão de obra. Os custos fixos são independentes do número de unidades produzidas, enquanto os custos variáveis dependem da quantidade produzida. Em geral, um polinômio cúbico é indicado para captar o comportamento de custos em um intervalo de valores realistas.

Ainda, segundo eles, o custo marginal da produção é a taxa de variação do custo em relação ao nível de produção, isto é, a derivada da Função Custo C em relação a quantidade a ser produzida x.

Exemplo 17. *Suponha que o custo seja:*

$$C(x) = \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 + 15x$$

reais para produzir x aquecedores quando são produzidas algumas unidades de aquecedores. Sua loja produz 20 aquecedores por dia. Qual será o custo adicional aproximado para produzir um aquecedor a mais por dia?

Nesse caso, para determinar o custo quando são produzidos 20 aquecedores, basta substituir o valor de x por 20 na função custo:

$$C(20) = \frac{1}{2}(20)^3 - 6(20)^2 + 15(20) = 1900.$$

Então, para produzir 20 aquecedores o custo será de R$ 1.900,00.

Agora vamos calcular o custo para produzir 21 aquecedores, basta substituir o valor de x por 21:

$$C(21) = \frac{1}{2}(21)^3 - 6(21)^2 + 15(21) = 2.299,50.$$

Então, para produzir 21 aquecedores o custo será de R$ 2.299,50.

Para encontrar o custo de fabricação de uma unidade a mais do aquecedor basta calcularmos a diferença entre $C(21) - C(20) = 399,50$.

Assim, podemos interpretar que no nível de produção de 20 aquecedores, o custo adicional para a produção de mais uma unidade é de R$ 399,50.

Outra maneira de verificarmos o custo para produzir um aquecedor a mais por dia é efetuando o cálculo da derivada da função custo e depois substituir o valor de x por 20. A derivada é a taxa de variação do custo de produção, ou seja,

$$C'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^3 - 6x^2 + 15x\right) = \frac{3}{2}x^2 - 12x + 15.$$

Figura 15 – Derivada da função custo no SymPy

```
>>> x = symbols('x')
>>> diff(0.5*x**3-6*x**2+15*x,x)
```

$$1.5x^2 - 12x + 15$$

Fonte: Elaborado pelo autor

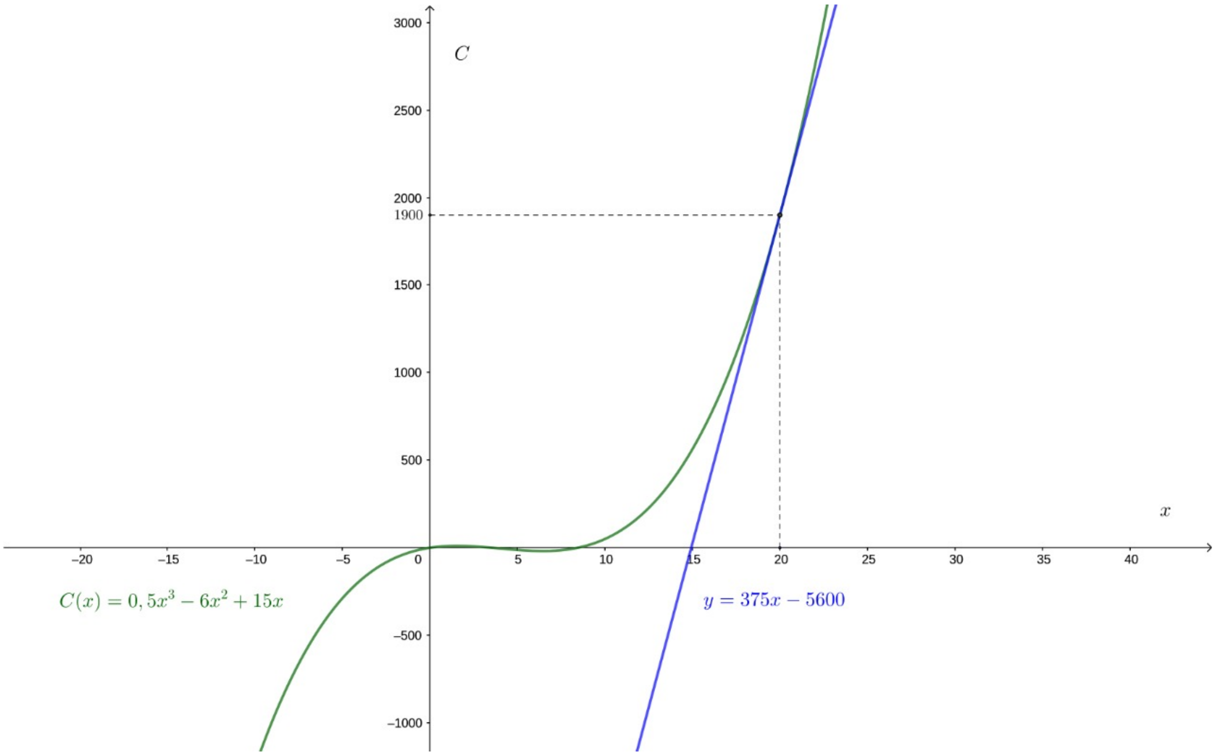
O custo para produzir um aquecedor a mais por dia, quando são produzidos 20 nesse período, é obtido substituindo o valor de x por 20 na derivada, assim temos que o valor aproximado será de:

$$C'(20) = 1,5(400) - 12(20) + 15 = 375.$$

O custo adicional será de aproximadamente R$ 375,00.

Nesse exemplo, mais uma vez, podemos observar como os valores encontrados nas duas formas (R$ 399,50 e R$ 375,00) são bem próximos. A Figura 16 mostra o gráfico da função custo e a reta tangente correspondente a produção de 20 unidades.

Figura 16 – Gráfico da função custo e reta tangente no ponto $(20, 1900)$.



Fonte: Elaborado pelo autor

5.4 Função Lucro

Agora vamos definir a função Lucro. Seguindo a nossa intuição, podemos definir o lucro como sendo a diferença entre o custo de produção de um determinado produto pela receita obtida após a sua venda. De fato, a definição é dada dessa forma. Dadas as funções Custo (C), Receita (R) a função Lucro (L) é definida por:

$$L(x) = R(x) - C(x).$$

Por exemplo, dadas a função receita $R(x) = 6x$, onde x é o número de camisetas vendidas. Suponhamos a função custo $C(x) = 2x + 80$, onde x é o número de camisetas produzidas. Assim, conseguimos determinar a Função Lucro.

$$\begin{aligned} L(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 6x - (2x + 80) \\ &= 6x - 2x - 80 \\ &= 4x - 80 \end{aligned}$$

Nesse caso, notamos que função Lucro é uma função de 1° grau, cujo o gráfico é uma reta de inclinação $m = 4$ e que corta o eixo vertical em -80.

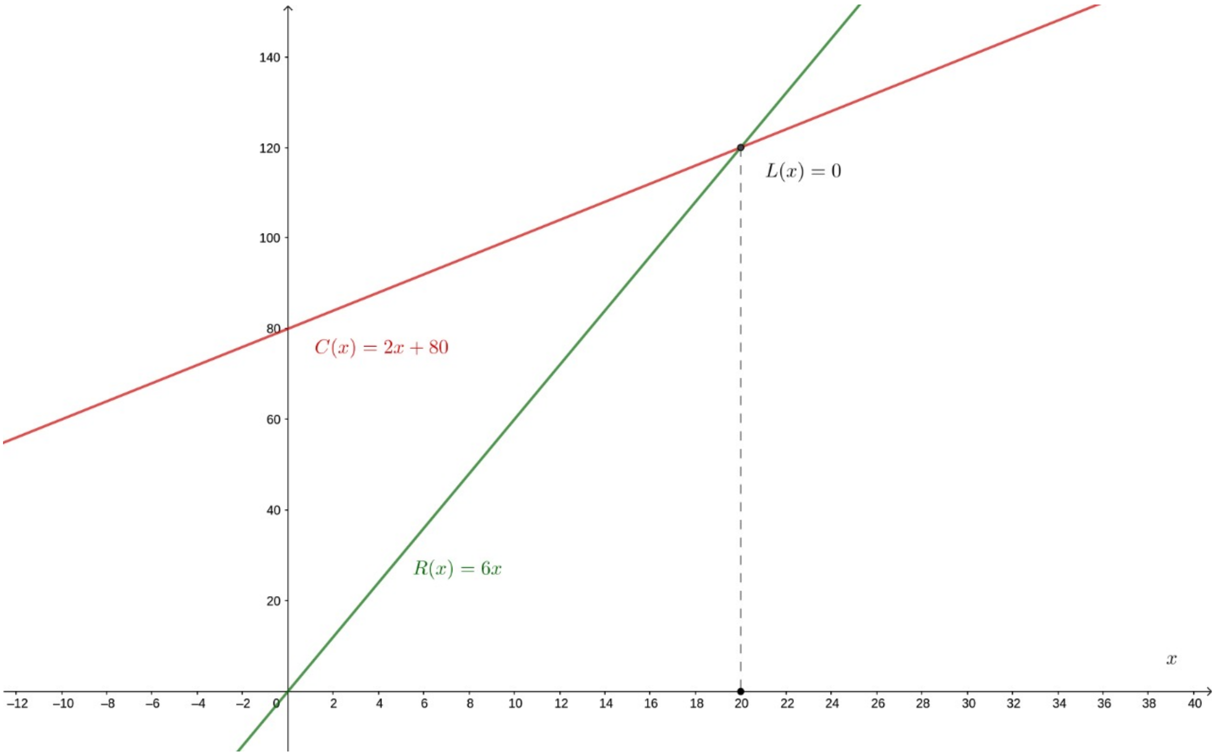
Observe que o lucro será zero quando $L(x) = 0$, ou seja,

$$L(x) = 0 \Leftrightarrow R(x) = C(x) \Leftrightarrow 6x = 2x + 80 \Leftrightarrow 4x - 80 = 0 \Leftrightarrow x = 20.$$

Assim, se x é menor do que 20, então o Lucro é negativo e, se x é maior do que 20, então temos um Lucro positivo.

Graficamente, o ponto em que a Receita é igual ao Custo é dado pelo encontro das curvas que representam a Receita e o Custo, como mostra a Figura 17 e significa o ponto em que o Lucro é zero.

Figura 17 – Gráfico da função custo, função receita e ponto de interseção (lucro zero).



Fonte: Elaborado pelo autor

De forma análoga ao feito para as funções Receita e Custo, o Lucro Marginal é obtido a partir da derivada (taxa de variação) da Função Lucro.

Agora vamos ilustrar isto através de um problema:

Uma empresa de produção de aquecedores tem uma receita $R(x) = -0,2x^2+200x$, com x correspondendo a venda por unidade de aquecedores. Suponhamos que o custo desta produção de aquecedores seja $C(x) = 40x+14000$, com x correspondendo a produção por unidade de aquecedores.

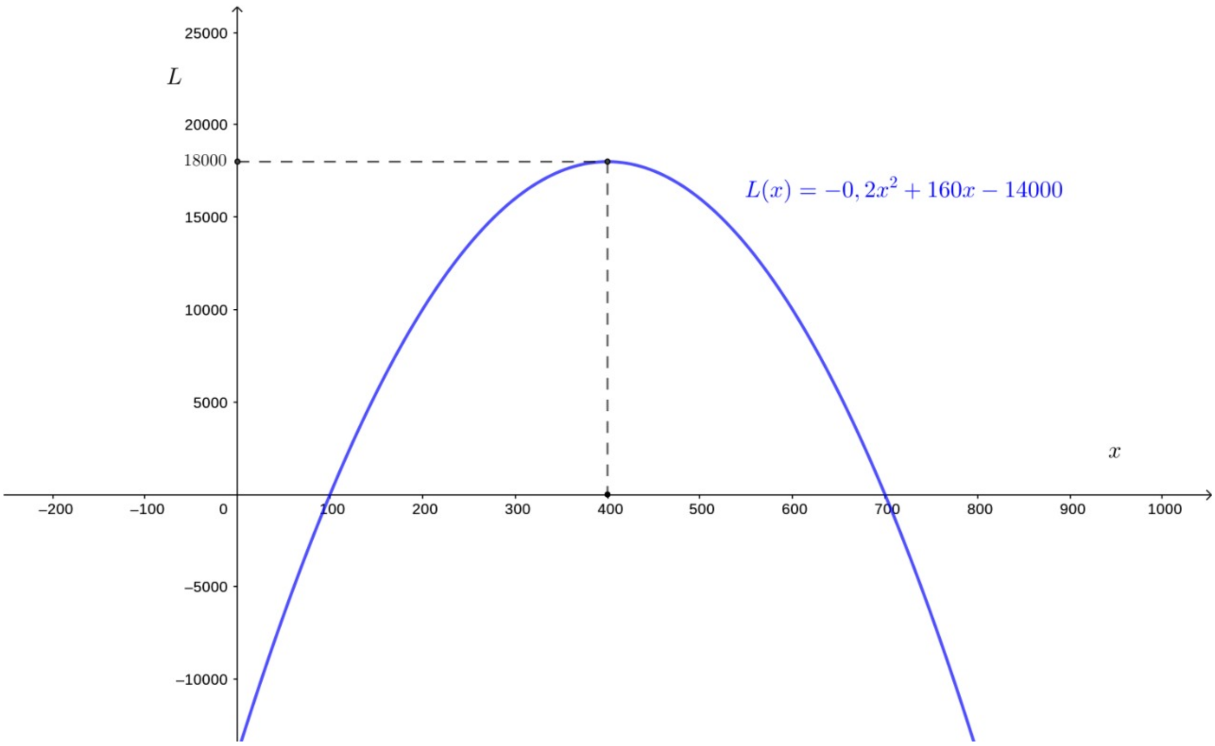
Com estes dados conseguimos calcular a função Lucro e posteriormente chegar ao Lucro máximo do problema.

Vamos encontrar a função Lucro:

$$\begin{aligned} L(x) &= R(x) - C(x) \\ &= -0,2x^2 + 200x - (40x + 14000) \\ &= -0,2x^2 + 200x - 40x - 14000 \\ &= -0,2x^2 + 160x - 14000 \end{aligned}$$

Graficamente, como mostra a Figura 18, podemos observar que o ponto de lucro máximo corresponde a $x = 400$. A seguir, vamos comprovar esse resultado analiticamente.

Figura 18 – Gráfico da função lucro



Fonte: Elaborado pelo autor

Agora vamos calcular a função Lucro Marginal (L_{Mg}). Para isso, basta apenas calcular a derivada da função Lucro.

$$L_{Mg}(x) = L'(x) = -0,4x + 160$$

Para buscarmos o melhor caminho de se chegar no Lucro máximo, precisamos selecionar dois valores de x, e fazer uma precisa análise dos resultados encontrados, só assim vamos conseguir chegar no principal objetivo.

Então temos para x os seguintes valores: $x = 250$ e $x = 500$.

Para $x = 250$ temos:

$$L'(250) = -0,4(250) + 160 = -100 + 160 = 60.$$

Assim, o valor de $L'(250) = 60$ indica que R$ 60,00 é o valor aproximado do lucro na venda do 251° aquecedor.

Para $x = 500$ temos:

$$L'(500) = -0,4(500) + 160 = -200 + 160 = -40.$$

Assim, o valor de $L'(500) = -40$ indica que na venda do 501° aquecedor, haverá um decréscimo de R$ 40,00 no lucro, pois o Lucro Marginal é negativo, ou seja, um lucro decrescente.

Por fim vamos encontrar o Lucro máximo da empresa na produção de aquecedores, para isso precisamos fazer $L'(x) = 0$ e verificar se o ponto x encontrado é tal que $L''(x)$ é menor que zero e, consequentemente, chegando no Lucro máximo. Temos que:

$$L'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,4x + 160 = 0 \Leftrightarrow -0,4x = -160 \Leftrightarrow x = 400.$$

Agora vamos ao cáculo da derivada segunda de L. Na Figura 19 podemos ver o cálculo das derivadas no SymPy.

$$L'(x) = -0,4x + 160 \;\Rightarrow\; L''(x) = -0,4.$$

Figura 19 – Primeira e segunda derivada da função lucro no SymPy

```
>>> x = symbols('x')
>>> diff(-0.2*x**2+160*x-14000,x)
```

$$160 - 0.4x$$

```
>>> diff(-0.2*x**2+160*x-14000,x,x)
```

$$-0.4$$

Fonte: Elaborado pelo autor

Com isso, vimos que $L''(x)$ é menor que zero para qualquer outro valor de x, $L''(400)$ em particular, isto indica que $x = 400$ é a quantidade de aquecedores que nos dará o Lucro máximo.

Desta forma, no decorrer deste capítulo foi possível perceber a importância das contribuições da área da matemática para o desenvolvimento financeiro das empresas através do uso do conceito de derivadas, visto que através deste conceito foi encontrado o lucro ótimo.

6 Resultados

O Cálculo Diferencial é um tema muito abordado nas ciências exatas, com isso a revisão dos conceitos que envolvem este tema foi de fundamental importância para a elaborção do TCC, pois deu suporte na elaboração de todas as etapas do trabalho.

De acordo com Costa (2018), a relação da matemática com a economia já é uma situação que vem de várias décadas, ambas trabalham basicamente juntas, pois com a aplicação de alguns conceitos matemáticos conseguimos analisar e resolver diversos problemas da área econômica.

Dentre eles, podemos destacar principalmente o Cálculo Diferencial, com o uso das derivadas, muito importante para encontrar a maximização dos lucros e na análise marginal, para auxiliar na tomada de decisões acerca da quantidade de produção ou na quantidade ofertada para a venda de um determinado produto. A álgebra, que nos ajuda na resolução de problemas de receita total e custo total. Na Estatística, por sua vez, no estudo da econometria que faz com que os economistas possam fazer previsões para determinar qual a melhor probabilidade de ocorrer um evento.

Além disso, buscou-se construir um discussão que torne a temática escolhida acessível para outras áreas do meio acadêmico, contribuindo para que a relação entre matemática e economia seja cada vez mais acessível.

7 Considerações finais

O Trabalho de Conclusão de Curso proporcionou observar na prática as possibilidades de articulação entre as áreas de matemática e economia. Através da articulação destas áreas de conhecimento foi possível desenvolver uma pesquisa visando encontrar o lucro ótimo, o que contribuirá de forma significatica para o desenvolvimento da saúde financeira das empresas.

Este trabalho também oportunizou explorar possibilidades do uso das tecnologias a partir dos softwares Python e GeoGebra tornando desta forma, as informações mais acessíveis para as empresas, pois facilita na visualização dos cálculos e gráficos.

Dessa forma, ressalto que a pesquisa me oportunizou adquirir um maior conhecimento das aplicações dos conceitos matemáticos em geral. Além disso, a articulação com a economia e a utilização dos softwares, que foram apresentados no decorrer deste trabalho, contribuíram para deixar cada vez mais presente a aplicação do Calculo Diferencial na saúde financeira das empresas.

Referências

COSTA, H. C. *A matematização da Economia*. 2018. Disponível em: <https://medium.com/the-empirical-mode/o-uso-da-matem%C3%A1tica-na-economia-6d6de2e39dab>. Acesso em: 22.1.2021. Citado na página 55.

JASMINE, O. *Software gratuito pode auxiliar economistas na análise de dados*. Paineira USP, 2019. Disponível em: <https://paineira.usp.br/aun/index.php/2019/02/22/software-gratuito-pode-auxiliar-economistas-na-analise-de-dados/>. Acesso em: 18.1.2020. Citado na página 10.

LEITE, A. *Aplicações da matemática: administração, economia e ciências contábeis 2. ed.* São Paulo: Cengage Learning, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 40.

LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica 3ª ed.* São Paulo: editora HARBA ltda, 1994. Citado na página 27.

LIMA, A. C. As derivadas e a sua aplicação na análise marginal de custos na economia. *Revista Científica Semana Acadêmica*, v. 1, n. 84, 2016. Disponível em: <https://semanaacademica.com.br/artigo/derivadas-e-sua-aplicacao-na-analise-marginal-de-custos-na-economia>. Citado na página 13.

MUROLO, A. C.; BONETTO, G. *Matemática aplicada: à administração, economia e contabilidade 2ª edição*. São Paulo: Cengage Learning, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 17, 21, 22 e 40.

PEREIRA, W. L. *Aplicação do Cálculo Diferencial, em especial como derivadas na economia e administração*. 2012. 61 p. Trabalho de Conclusão de Curso. Disponível em: <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/1595/1/PDF%20-%20Wesklemyr%20Lacerda%20Pereira.pdf>. Citado na página 13.

PINHO, D. B.; VASCONCELLOS, M. A. S. de; Toneto JR, R. *Manual De Economia*. São Paulo: Saraiva, 2017. v. 7. Citado na página 13.

SANTOS, J. V. Derivada: Uma ferramenta importante nas resoluções de problemas em economia. *Anais do VII Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade – EDUCON*, São Cristóvão, 2013. Disponível em: <https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/9705/26/25.pdf>. Citado na página 13.

SYMPY. Tutorial do sympy. 2021. Disponível em: <https://docs.sympy.org/latest/tutorial/index.html>. Acesso em: 27.4.2021. Citado na página 37.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. *Cálculo V.1 12°ed.* São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. Citado 13 vezes nas páginas 13, 15, 17, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 34, 35 e 47.

VILCHES, M. A. *Cálculo para a economia e administração: Volume I.* Rio de Janeiro: Departamento de Análise - IME UERJ, 2018. Disponível em: <http://www.professores.uff.br/jcolombo/wp-content/uploads/sites/124/2018/08/ecomat.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 40.