

Ana Carolina Maurmann

**Um estudo da modelagem epidemiológica SIRC  
multi-fracionário para duas populações que  
interagem**

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Fevereiro, 2022

Ana Carolina Maurmann

**Um estudo da modelagem epidemiológica SIRC  
multi-fracionário para duas populações que interagem**

Trabalho de Conclusão de Curso, Matemática Aplicada Bacharelado, submetido por Ana Carolina Maurmann junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Matemática Aplicada Bacharelado

Orientador: Dr. Adriano De Cezaro

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

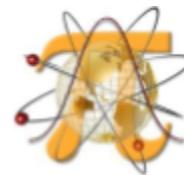
Fevereiro, 2022



Universidade Federal do Rio Grande – FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física  
Curso de Bacharelado em Matemática Aplicada

Av. Itália km 8 Bairro Carreiros  
Rio Grande-RS CEP: 96.203-900 Fone (53)3293.5411  
e-mail: imef@furg.br Site: www.imef.furg.br



## Ata de Defesa de Monografia

No vigésimo quinto dia do mês de fevereiro de 2022, às 14h, por webconferência, foi realizada a apresentação pública da defesa do Trabalho de Conclusão de Curso da acadêmica **Ana Carolina Maurmann Nascimento**, sob a orientação do Prof. Dr. Adriano De Cezaro, deste instituto, e intitulada **Um estudo da modelagem epidemiológica SIRC multi-fracionário para duas populações que interagem**. Para participar da banca avaliadora junto ao orientador foram convidados a Prof.ª Dr.ª Fabiana Travessini De Cezaro – IMEF/FURG, o Prof. Me. Luverci do Nascimento Ferreira – IMEF/FURG, a Dr.ª Joice Chaves Marques – PPGMC/FURG e a Me. Ana Carla Nicola Gomes – PPGMC/FURG. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, a candidata foi: ( X ) aprovada por unanimidade; ( ) aprovada somente após satisfazer as exigências que constam na folha de modificações, no prazo fixado pela banca; ( ) reprovada. Na forma regulamentar, foi lavrada a presente ata, que é abaixo assinada pelos membros da banca, na ordem acima relacionada.

*Adriano De Cezaro*

---

Prof. Dr. Adriano De Cezaro  
Orientador

*Fabiana Travessini De Cezaro*

---

Prof.ª Dr.ª Fabiana Travessini De Cezaro

*Luverci do Nascimento Ferreira*

---

Prof. Me. Luverci do Nascimento Ferreira

*Joice Chaves Marques*

---

Dr.ª Joice Chaves Marques

*Ana Carla Ferreira Nicola Gomes*

---

Me. Ana Carla Nicola Gomes

*Este trabalho é dedicado A Todos Que Amam A Ciência.*

# Resumo

Propomos um modelo compartimental do tipo SIRC fracionário para a propagação de doenças infecciosas entre duas populações que interagem. O modelo parte do pressuposto que as duas populações estão divididas em compartimentos, Suscetíveis (S), Infectados ou Infecciosos (I), Recuperados ou Removidos (R) e indivíduos com Imunidade Cruzada (C), cuja dinâmica entre os compartimentos de uma mesma população é governada por uma derivada de ordem fracionária, enquanto a interação entre as populações distintas é caracterizada pela proporção da interação entre indivíduos suscetíveis e infectados de ambas as populações. Entre as inovações na modelagem estão a inclusão do compartimento  $C$ , no qual se encontram indivíduos com uma proteção adquirida por uma contaminação no passado por vírus de estrutura semelhante ao estudado e a análise da memória imunológica adquirida, modelada pelas derivadas de ordem fracionária. Do ponto de vista teórico, provamos boa colocação para o modelo proposto, isto é, a existência de uma única solução contínua em toda a semirreta positiva, que depende continuamente dos parâmetros do modelo, das condições iniciais e das ordens das derivadas fracionária. A análise teórica é complementada pela apresentação de simulações numéricas que visam entender os efeitos das derivadas de ordem fracionária (memória) na dinâmica das distintas subpopulações, distribuídas em cada compartimento.

**Palavras-chaves:** Modelagem Epidemiológica, Modelos Comportamentais, SIRC multi-populações, Cálculo Fracionário.

# Abstract

We propose a fractional SIRC compartmental model for the spread of infectious diseases between two interacting populations. The model assumes that the two populations are divided into compartments, Susceptible (S), Infected or Infectious (I), Recovered or Removed (R) and Cross-immune (C), whose dynamics between the compartments of the same population is governed by a fractional derivative, while the interaction between distinct populations is characterized by the proportion of interaction between susceptible and infected individuals of both populations. Among the innovations in modeling are the inclusion of compartment C, in which there are individuals with a protection acquired by a contamination in the past by viruses of similar structure to the studied and the analysis of acquired immunological memory, modeled by fractional derivatives. The theoretical analysis is complemented by the presentation of numerical simulations that aim to understand the effects of fractional order derivatives (memory) on the dynamics of the different subpopulations, distributed in each compartment.

**Key-words:** Epidemiological Modeling, Behavioral Models, Multi-population SIRC, Fractional Calculus

# Lista de ilustrações

|           |  |    |
|-----------|--|----|
| Figura 1  | – Diagrama Compartimental SIRC. . . . .  | 10 |
| Figura 2  | – Dinâmica das subpopulações da População 1, para os distintos cenários simulados. As curvas em —, — e — aparecem praticamente sobrepostas. O mesmo acontece com as curvas em — e —. . . . .   | 56 |
| Figura 3  | – Dinâmica das subpopulações da População 2, para os distintos cenários simulados. As curvas em — e — aparecem praticamente sobrepostas. O mesmo acontece com as curvas em —, — e —. . . . .   | 57 |
| Figura 4  | – Dinâmica da População total em cada um dos compartimentos do modelo MF-SIRC, para os distintos cenários simulados. . . . .   | 58 |
| Figura 5  | – Dinâmica das subpopulações da População 1, com $N_1 = 10 \cdot N_2$ e a infecção começando na População 1, para os distintos cenários simulados. As curvas em — e — aparecem praticamente sobrepostas. O mesmo acontece com as curvas em —, — e —. . . . . | 60 |
| Figura 6  | – Dinâmica das subpopulações da População 2, com $N_1 = 10 \cdot N_2$ e a infecção começando na População 1, para os distintos cenários simulados. . . . .   | 61 |
| Figura 7  | – Dinâmica das subpopulações em cada compartimento referentes a População total, com $N_1 = 10 \cdot N_2$ e a infecção começando na População 1, para os distintos cenários simulados. . . . .   | 62 |
| Figura 8  | – Dinâmica das subpopulações da População 1, com $N_1 = 10 \cdot N_2$ e a infecção começando na População 2, para os distintos cenários simulados. As curvas em — e — aparecem praticamente sobrepostas. O mesmo acontece com as curvas em —, — e —. . . . . | 63 |
| Figura 9  | – Dinâmica das subpopulações da População 2, com $N_1 = 10 \cdot N_2$ e a infecção começando na População 1, para os distintos cenários simulados. . . . .   | 64 |
| Figura 10 | – Dinâmica das subpopulações em cada compartimento referentes a População total, com $N_1 = 10 \cdot N_2$ e a infecção começando na População 2, para os distintos cenários simulados. . . . .   | 65 |

# Sumário

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
|          | <b>Introdução</b> . . . . .  | <b>8</b>  |
| <b>1</b> | <b>TÓPICOS SOBRE A MODELAGEM EPIDEMIOLÓGICA</b> . . . . .                                    | <b>10</b> |
| 1.1      | <b>Compartimentos</b> . . . . .  | <b>10</b> |
| 1.2      | <b>Parâmetros</b> . . . . .  | <b>11</b> |
| 1.3      | <b>Modelo Compartmental SIRC</b> . . . . .   | <b>12</b> |
| <b>2</b> | <b>INTRODUÇÃO AO CÁLCULO FRACIONÁRIO</b> . . . . .   | <b>14</b> |
| 2.1      | <b>Conceitos Fundamentais</b> . . . . .  | <b>14</b> |
| 2.1.1    | Funções especiais . . . . .  | 16        |
| 2.2      | <b>Integral de Riemann-Liouville</b> . . . . .   | <b>19</b> |
| 2.3      | <b>Derivada de Riemann-Liouville</b> . . . . .   | <b>22</b> |
| 2.4      | <b>Derivada de Caputo</b> . . . . .  | <b>27</b> |
| 2.5      | <b>Equações Diferenciais Fracionárias do Tipo Caputo</b> . . . . .                           | <b>32</b> |
| 2.5.1    | Existência de uma solução . . . . .  | 33        |
| 2.5.2    | Unicidade de solução . . . . .   | 38        |
| 2.5.3    | Dependência contínua das condições iniciais, dos parâmetros e da ordem da derivada . . . . . | 40        |
| 2.6      | <b>Uma Associação Entre Derivadas de Ordem Fracionária e Memória</b>                         | <b>45</b> |
| 2.7      | <b>Boa Colocação para PVI's com Derivadas Fracionária de Múltiplas Ordens</b> . . . . .      | <b>46</b> |
| <b>3</b> | <b>MODELO COMPARTIMENTAL SIRC FRACIONÁRIO PARA DUAS POPULAÇÕES QUE INTERAGEM</b> . . . . .   | <b>48</b> |
| 3.1      | <b>SIRC Fracionário com Duas Populações Interagindo</b> . . . . .                            | <b>48</b> |
| 3.2      | <b>Boa Colocação para o Modelo MP-FSIRC</b> . . . . .  | <b>49</b> |
| <b>4</b> | <b>SIMULAÇÕES NUMÉRICAS</b> . . . . .  | <b>54</b> |
| 4.1      | <b>Duas Populações Igualmente Simétricas</b> . . . . .                                       | <b>54</b> |
| 4.2      | <b>Impondo Alguma Anti-Simetria Entre as Populações</b> . . . . .                            | <b>58</b> |
| 4.2.1    | Doença iniciando na população maior . . . . .  | 59        |
| 4.2.2    | Doença iniciando na população menor . . . . .  | 59        |
| <b>5</b> | <b>CONCLUSÃO</b> . . . . .   | <b>66</b> |
| 5.1      | <b>Contribuições Futuras</b> . . . . .   | <b>66</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .   | <b>67</b> |

# Introdução

As doenças infecciosas causadas por vírus ou bactérias e a história dos seres vivos sobre a Terra estão interligadas, como pode ser comprovado por registros em fósseis. Entretanto, registros sistemáticos de doenças que atingiram a humanidade<sup>1</sup> só foram possíveis a partir do momento em que a mesma teve interesse a partir de observações. Os pontos-chaves de uma área chamada epidemiologia são observar e registrar.

O fato é que epidemias e pandemias sempre existiram e continuarão existindo. Se não são propriamente controladas, trazem consequências muito graves tanto para a saúde humana quanto problemas na cadeia alimentar, (HETHCOTE, 2000), e consequentemente implicam em problemas econômicos. Isso pode ser mensurado pelo que estamos presenciando nestes últimos anos como a pandemia do Coronavírus, (SHEREEN et al., 2020).

Quando se fala em algo que resulte em um grande número de mortes é natural pensarmos em grandes guerras, porém, mesmo juntando todas elas ainda é possível afirmarmos que o número de mortes é menor que a mortalidade em pandemias recentes, (ANDERSON, 2013; ANDERSON; MAY, 1983). Os hábitos de vida modernos, concentração de indivíduos em locais muito próximos e onde distintas populações (mesmo distantes) interagem com facilidade devido a facilidade de deslocamento, criaram o ambiente perfeito para a propagação rápida de agentes infecciosos. Desta forma, houve a necessidade de uma vigilância constante para a observação do surgimento de novas doenças, bem como o entendimento de como uma possível ameaça pode ser disseminada. Neste ponto, a modelagem matemática tem contribuições muito importantes.

Neste trabalho, propomos e analisamos algumas características da propagação de uma doença em duas populações distintas e que interagem a partir de modelos compartimentais do tipo SIRC, como em, (GOMES; CEZARO, 2018; GOMES, 2018; GOMES; CEZARO, 2019; CASAGRANDE et al., 2006). Este modelo compartimental é incrementado com uma dinâmica fracionária (derivadas de ordem fracionária do tipo Caputo), com as quais assumimos capturar alguns efeitos de memória.<sup>2</sup>

O trabalho está dividido em:

---

<sup>1</sup> Pelo que se tem conhecimento, a primeira vez que se teve sucesso no combate a uma peste foi em (458-377 a.C.) por Hipócrates (YANG, 2001), e isso só ocorreu pois o mesmo percebeu que as quem ficava próximo ao fogo não eram acometido pela doença. Portanto Hipócrates ordenou que acendessem fogueiras por todos os lados e assim acabou com a contaminação.

<sup>2</sup> Aqui, memória significa a capacidade de nosso sistema imunológico de reconhecer e reagir a patógenos devido a uma exposição anterior a variantes do mesmo.

No Capítulo 1, fazemos uma breve introdução à epidemiologia matemática e introduziremos as variáveis principais de modelos compartimentais do tipo SIRC.

No Capítulo 2, apresentaremos uma breve introdução ao cálculo de ordem fracionária. Nos deteremos com mais detalhes na solução de problemas de valor inicial com derivadas de ordem não inteira. A motivação para tal está em deixar este trabalho de forma o mais auto-contido possível.

No Capítulo 3, apresentamos o modelo compartimental SIRC fracionário com duas populações que interagem. Provamos a boa colocação do modelo, ou seja, existência de uma única solução, que depende continuamente dos parâmetros, das condições iniciais e das ordens das derivadas, na Seção 3.2.

No Capítulo 4, apresentamos e discutimos uma série de simulações numéricas, com distintos cenários para a escolha das ordens das derivadas, da magnitude das populações e de como estas interagem. Fica evidente pelos cenários apresentados que, em alguns casos existe uma clara vantagem da memória imunológica, em especial, no caso em que as populações que interagem são idênticas, como discutido na Seção 4.1. Por outro lado, a análise se torna muito mais complexa a medida que as populações são de tamanhos distintos, como discutido na Seção 4.2.

No Capítulo 5 apresentamos as conclusões deste trabalho e uma série de direções futuras a serem seguidas.

# 1 Tópicos Sobre a Modelagem Epidemiológica

A epidemiologia é a área que estuda as epidemias, isto é, as doenças que se propagam em uma população. Além disso, são analisadas as condições que determinam a frequência e a distribuição de tais doenças, não caso a caso, mas sim as características gerais que interferem em toda a população.

Um método muito utilizado na epidemiologia é a divisão da população em grupos (ou compartimentos) e a formulação de sistemas de equações diferenciais que modelem a dinâmica da população. Os termos dessas equações diferenciais são produtos dos compartimentos com parâmetros que serão apresentados no decorrer deste Capítulo. Além da apresentação dos compartimentos e dos parâmetros, será feita uma explicação sobre a estimativa de tais parâmetros que têm a função de relacionar os compartimentos e a dedução do modelo completo.

## 1.1 Compartimentos

Nesta seção serão expostos alguns modelos compartimentais populares na modelagem epidemiológica. Começaremos definindo os compartimentos que serão mais utilizados neste trabalho, conforme o fluxograma abaixo:

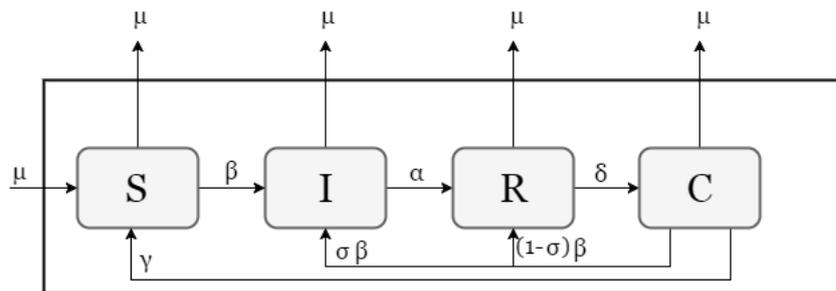


Figura 1 – Diagrama Compartmental SIRC.

- O grupo dos **Suscetíveis**,  $S(t)$ , que são os indivíduos saudáveis que caso sejam expostos a doença podem vir a ser infectados.
- O grupo dos **Infectados**,  $I(t)$ , que são indivíduos que estão infectados em dado momento  $t$  e que, caso entrem em contato com algum suscetível, pode torná-lo infectado.

- O grupo dos **Recuperados**,  $R(t)$ . Neste compartimento, como o próprio nome indica, estão os indivíduos que se recuperaram da doença e que adquiriram total imunidade, mesmo que temporária, a uma nova infecção.

**Observação 1.1.1.** No compartimento  $R(t)$  também estão os indivíduos que por algum outro motivo, por exemplo através de vacinação, obtiveram imunidade total. Porém como neste trabalho não consideraremos a dinâmica de vacinação, optamos por restringir tal compartimento apenas aos indivíduos que tiveram a doença e se recuperaram.

Outros compartimentos são:

- O grupo dos **Expostos**,  $E(t)$ , onde os indivíduos estão infectados mas ainda não podem contaminar ninguém, também chamado de compartimento latente devido ao período de latência da doença.
- O grupo da **Imunidade Cruzada**,  $C(t)$ , onde os indivíduos já foram infectados e após um tempo recuperados, com imunidade, passam a ser suscetíveis não à doença original, mas a uma mutação dela.

A imunidade cruzada explica uma imunização adquirida em uma primeira infecção e que protegerá mais tarde contra outros agentes infecciosos, sejam eles vírus ou bactérias. De maneira geral, um anticorpo é específico contra um agente, mas eventualmente pode atuar contra outros micro-organismos de espécies próximas.

**Observação 1.1.2.** O termo "imunidade total" está sendo utilizado para destacar a distinção entre imunidade total e imunidade parcial, devido a existência do compartimento  $C(t)$ .

## 1.2 Parâmetros

Como trabalharemos com várias constantes, é essencial que os significados destas estejam bem claros. As constantes são:

- $\mu$  representando a **taxa de mortalidade**;
- $\beta$  representando a **taxa de infecção**;
- $\gamma$  representando a taxa na qual uma população imunológica cruzada pode se tornar suscetível novamente e é dada por:

$$\gamma = \frac{1}{\text{período de imunidade cruzada}};$$

- $\sigma$  representando a probabilidade média de **reinfecção** do indivíduo que esteja no compartimento  $C$ ;

- $\alpha$  representando a **taxa de recuperação**. Esta taxa é calculada de acordo com o período infeccioso, isto é, o tempo que os indivíduos permanecem doentes:

$$\alpha = \frac{1}{\text{tempo que os indivíduos ficam no compartimento } I(t)};$$

- $\delta$  pode ser vista como o **tempo médio de aparecimento de novos aglomerados dominantes**. Esse parâmetro depende do período de imunidade total, ou seja, o tempo que a leva para a imunidade cruzada:

$$\delta = \frac{1}{\text{tempo que os indivíduos ficam no compartimento } R(t)};$$

- $R_0$  representa a **taxa de reprodutividade basal**.

**Observação 1.2.1.** Convenientemente consideraremos a taxa de mortalidade igual a taxa de natalidade em prol da constância na população.

Estes parâmetros são obtidos através de análises clínicas, que fogem do escopo do trabalho. Nas simulações numéricas no Capítulo 4 serão utilizados valores fictícios para os parâmetros.

### 1.3 Modelo Compartmental SIRC

Modelos matemáticos para propagação de doenças infecciosas são constantemente propostos e aprimorados, (YANG, 2001; CAI et al., 2015; HETHCOTE, 2000), de forma que estes forneçam um modelo que represente a realidade, na forma mais fidedigna possível, mantendo a simplicidade suficiente para que o tratamento teórico/numérico seja viável. Com esta característica, modelos matemáticos possibilitam simulações de cenários sobre os processos de disseminação e a dinâmica das doenças, os quais são capazes de fornecer subsídios para as tomadas de decisões das autoridades competentes.

O modelos compartimentais são descritos por meio de uma dinâmica entre distintas subpopulações de uma população total  $N$ , que estão divididas em compartimentos. A partir da lei de ação das massas, determinamos que a disseminação de uma epidemia em uma população deve ser proporcional ao produto da densidade de indivíduos suscetíveis  $S$  pela densidade de indivíduos infecciosos  $I$ . Conjuntamente, temos uma série de parâmetros biológicos que caracterizam as passagens da porcentagem da população de um compartimento a outro, dependendo das características específicas do fenômeno em estudo.

Neste trabalho concentraremos nossa atenção num modelo compartimental, que chamaremos de MP-FSIRC no Capítulo 3, que pode ser interpretado como uma variação do modelo compartimental SIRC<sup>1</sup> introduzido na literatura por Casagrandi et.al no ano

<sup>1</sup> O modelo SIRC é uma variante do modelo compartimental do tipo SIR, proposto originalmente por Kermack e McKendrick em 1927, (KERMACK; MCKENDRICK, 1927)

de 2006 (CASAGRANDE et al., 2006). Neste modelo cada uma das duas populações (1 e 2) segue a dinâmica descrita pelo fluxograma na Figura 1, e os compartimentos  $S, I, R, C$  e com parâmetros descritos na Seção anterior.

## 2 Introdução ao Cálculo Fracionário

Apesar de não ser um assunto tão conhecido, o cálculo fracionário teve sua origem junto ao cálculo de ordem inteira que estamos habituados, em 1695 quando Leibniz utilizou a notação

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \quad (2.1)$$

para falar da  $n$ -ésima derivada de uma função  $f$  em relação à variável  $x$ , a princípio considerando  $n \in \mathbb{N}$ . Entretanto foi questionado o que (2.1) significaria para  $n = \frac{1}{2}$ . Essa pergunta, especificamente, "*o que seria a derivada de meio?*", deu nome ao cálculo fracionário, pois  $n$  não estava contido somente nos números racionais. A ordem  $n$  podia ser um número real ou até complexo. Os últimos casos não serão considerados neste trabalho, pois utilizaremos apenas  $n$  racional.

Já no século XVII houveram algumas definições do que seria a derivada fracionária, contudo, foi a pouco mais de 50 anos que começaram a aparecer aplicações para o cálculo não inteiro. Em 1969 Caputo propôs sua própria definição da derivada de ordem fracionária e a utilizou para resolver problemas de viscoelasticidade em seu livro (CAPUTO, 1969). Apesar da introdução dessa área à Matemática aplicada ser recente, os exemplos de utilização são inúmeros, aplicados na física, biologia e química. Ainda, aplicações extremamente atuais, como na psicologia matemática, com a utilização de sistemas de ordem fracionária para modelagem do comportamento humano, isso devido ao efeito de memória que as derivadas de ordem fracionárias agregam ao problema, memória que o ser humano tem e que afeta seu comportamento. Uma dessas aplicações pode ser encontrada em (AHMAD; EL-KHAZALI, 2007) onde é realizada a análise da evolução das relações românticas que nitidamente se encaixa em problemas onde a memória interfere na dinâmica.

Neste Capítulo serão apresentadas as Definições e Teoremas que são extremamente necessários para a formalização do cálculo fracionário, assim como os próprios operadores não inteiros. Mas antes falaremos um pouco de um dos Teoremas clássicos do cálculo.

### 2.1 Conceitos Fundamentais

Começaremos com algumas definições e relembrando resultados do cálculo clássico que foram necessários para a generalização dos operadores integral e derivada para o caso não inteiro.

**Teorema 2.1.1. (Teorema Fundamental do Cálculo).** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma

função contínua, e seja  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

Então,  $F$  é diferenciável e

$$F' = f.$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em qualquer livro de Cálculo Diferencial e Integral ou Análise Real, por exemplo, (LIMA, 2009).  $\square$

Esse Teorema mostra uma relação direta entre os operadores derivada e integral, tal relação deve ser mantida nos operadores fracionários.

Diferentemente do que acontece em um curso de cálculo, onde aprendemos derivada e depois integral, no cálculo não inteiro é mais conveniente definir a integral e em seguida a derivada, pois logo veremos que a derivada fracionária de Riemann-Liouville é a derivada inteira de uma integral fracionária.

**Definição 2.1.1.** Apresentamos algumas definições que serão utilizadas no decorrer deste trabalho:

- (a) Denotamos por  $\mathbf{D}$  a aplicação que leva uma função diferenciável na sua derivada.

$$Df(x) := f'(x)$$

- (b) Por  $\mathbf{J}_a$  denotamos o operador que mapeia uma função  $f$ , integrável à Riemann no intervalo  $[a, b]$ , em sua primitiva centrada em  $a$ , ou seja,

$$J_a f(x) := \int_a^x f(t)dt$$

para  $a \leq x \leq b$ .

- (c)  $\mathbf{D}^n$  e  $\mathbf{J}_a^n$  denotam, respectivamente, a  $n$ -ésima iteração de  $D$  e  $J_a$  para  $n \in \mathbb{N}$ , i.e.,

$$D^1 := D, \quad D^n := DD^{n-1}$$

$$J_a^1 := J_a, \quad J_a^n := J_a J_a^{n-1} \text{ quando } n \geq 2.$$

Considerando a Definição acima, para uma função  $f$ , contínua por partes em  $[0, \infty)$  e integrável nesse intervalo, temos a seguinte composição

$$\begin{aligned} J^2 f(b) &= J J f(b) \\ &= \int_0^b J f(y) dy && \text{para } 0 \leq b < \infty \\ &= \int_0^b \int_0^y f(x) dx dy \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Fubini, (SPIVAK, 1965), temos que

$$\int_0^b \int_0^y f(x) dx dy = \int_0^b \int_x^b f(x) dy dx \quad (2.2)$$

Notemos que  $f$  não depende da variável  $y$ , então

$$\begin{aligned} J^2 f(b) &= \int_0^b f(x) \int_x^b dy dx = \int_0^b f(x) \cdot [y]_x^b dx \\ &= \int_0^b f(x)(b-x) dx \end{aligned} \quad (2.3)$$

Analogamente, desenvolvemos  $J^3$

$$\begin{aligned} J^3 f(b) &= J J^2 f(b) \\ &= \int_0^b J^2 f(y) dy \quad \text{para } 0 \leq b < \infty \\ &= \int_0^b \int_0^y f(x)(y-x) dx dy = \int_0^b \int_x^b f(x)(y-x) dy dx \\ &= \int_0^b f(x) \int_x^b (y-x) dy dx = \int_0^b f(x) \left[ \frac{(y-x)^2}{2} \right]_{y=x}^{y=b} dx \\ &= \int_0^b f(x) \frac{(b-x)^2}{2} dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

Seguindo de forma iterativa, obtemos sucessivos resultados como (2.3)-(2.4) e, assim, encontramos uma generalização para  $J^n f(t)$  da seguinte forma

$$J^n f(b) = \int_0^b f(x) \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} dx.$$

**Definição 2.1.2.** Seja  $f$  uma função integrável a Riemann em  $[a, b]$ . Então, para  $t \in [a, b]$  e  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$J_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \quad (2.5)$$

No decorrer deste Capítulo este operador será generalizado para valores de  $n$  não inteiros. Para isso é necessário entender o que significa  $(n-1)!$  para  $0 < n \in \mathbb{R}$ . Isso será feito com a utilização de uma função extremamente conhecida e importante, que generaliza a ideia de fatorial para números não inteiros, a função Gamma de Euler.

### 2.1.1 Funções especiais

Com o intuito de fazer um trabalho autocontido serão apresentadas as definições de duas funções essenciais para as generalizações do cálculo fracionário. Além disso, apresentaremos alguns Teoremas importantes com aplicações de tais funções.

**Definição 2.1.3.** A função  $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ , definida por

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt,$$

é chamada *função Gamma de Euler* (ou integral de Euler de segunda espécie).

Esta função possui algumas propriedades que podem ser encontradas em (DIETHELM, 2010a). A mais importante para esse trabalho é a seguinte.

**Teorema 2.1.2.** Se  $n \in \mathbb{N}$ , então  $(n - 1)! = \Gamma(n)$ . Além disso, em particular,  $\Gamma(1) = 1$

*Demonstração.* Esse teorema é facilmente demonstrado através de indução matemática. Para isso começaremos mostrando que vale para  $n=1$ , i.e., que  $\Gamma(1) = 1$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-t}]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-b} - (-e^{-0})] = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-b} - (-1)] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} 1 - e^{-b} = \lim_{b \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{e^b} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Em seguida, mostraremos que se vale para  $n = k$ , então é válida para  $n = k + 1$ , i.e, queremos mostrar que

$$\Gamma(k) = (k - 1)! \implies \Gamma(k + 1) = k!$$

Por definição,

$$\begin{aligned} \Gamma(k + 1) &= \int_0^\infty t^{(k+1)-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty t^k e^{-t} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+, b \rightarrow \infty} \int_a^b t^k e^{-t} dt \end{aligned}$$

Façamos a troca de variável  $u = t^k$  e  $dv = e^{-t} dt$ , assim temos  $du = kt^{k-1} dt$  e  $v = e^{-t}$ , então a integral que temos que resolver é  $\int_a^b u dv = u.v - \int_a^b v du$

$$\begin{aligned} \Gamma(k + 1) &= \lim_{a \rightarrow 0^+, b \rightarrow \infty} \left\{ [t^k \cdot (-e^{-t})]_{t=b}^{t=a} - \int_a^b -e^{-t} \cdot kt^{k-1} dt \right\} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+, b \rightarrow \infty} \left[ \cancel{a^k e^{-a}} - \left( \cancel{-b^k e^{-b}} \right) \right] + k \cdot \int_0^\infty t^{k-1} e^{-t} dt \\ &= k\Gamma(k) \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução,  $\Gamma(k) = (k - 1)!$ , então

$$\Gamma(k + 1) = k \cdot (k - 1)! = k!$$

Portanto, para  $n \in \mathbb{N}$ , temos  $(n - 1)! = \Gamma(n)$ .

□

As próximas propriedades serão utilizadas para resolução de exemplos e completar as demonstrações.

**Definição 2.1.4.** Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ . Então,  $B(\alpha, \beta)$  é chamada a *função Beta de Euler* ou, ainda, a *função de Euler de segunda espécie* e é dada por

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \quad (2.6)$$

**Teorema 2.1.3.** Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ . A função de Euler de segunda espécie pode ser escrita da seguinte forma:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \quad (2.7)$$

em que  $\Gamma$  é a função de Euler de primeira espécie.

Uma função que aparece com recorrência no cálculo de ordem fracionária e que generaliza a função exponencial é a função de Mittag-Leffler. Passaremos a defini-la abaixo.

**Definição 2.1.5** (Função de Mittag-Leffler). Consideremos a definição da função Gamma de Euler definida acima. Então, a função

$$E_{\theta}(z) := \sum_{j=0}^{\infty} z^j (\Gamma(j\theta + 1))^{-1} \quad (2.8)$$

é conhecida como a função de Mittag-Leffler de ordem  $\theta$ .

Seja  $\theta_1, \theta_2 > 0$ , a função  $E_{\theta_1, \theta_2}$  definida por

$$E_{\theta_1, \theta_2}(z) := \sum_{j=0}^{\infty} z^j (\Gamma(j\theta_1 + \theta_2))^{-1} \quad (2.9)$$

é conhecida como a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

E a chamada função de Mittag-Leffler com multi parâmetros é dada por

$$E_{(\theta_{11}, \theta_{12}, \dots, \theta_{1k}), (\theta_{21}, \theta_{22}, \dots, \theta_{2k})}(z) := \sum_{j=0}^{\infty} z^j \prod_{n=1}^k (\Gamma(j\theta_{1n} + \theta_{2n}))^{-1} \quad (2.10)$$

Uma propriedade importante da função de Mittag-Leffler  $E_{\theta}(z)$  é o seu comportamento assintótico, discutido no Lema a seguir.

**Lema 2.1.1.** (DIETHELM, 2010b, Teorema 4.4) Seja  $\theta \in \mathbf{R}_+$ . Então, a função de Mittag-Leffler (2.8) satisfaz:

- i) A função  $E_{\theta}(re^{i\phi}) \rightarrow 0$  para  $r \rightarrow \infty$  se  $|\phi| > \frac{\theta\pi}{2}$ ;
- ii) A função  $E_{\theta}(re^{i\phi})$  permanece limitada para  $r \rightarrow \infty$ , se  $|\phi| = \frac{\theta\pi}{2}$ ;
- iii) A função  $|E_{\theta}(re^{i\phi})| \rightarrow \infty$  para  $r \rightarrow \infty$  se  $|\phi| < \frac{\theta\pi}{2}$ .

Com o que foi apresentado, podemos falar em integral fracionária.

## 2.2 Integral de Riemann-Liouville

Vamos definir, primeiramente, uma função integrável a Lebesgue.

**Definição 2.2.1.** Chamamos  $L_n[a, b]$  de *espaço das funções integráveis a Lebesgue*, onde  $1 \leq n$ . Esse espaço é definido da seguinte maneira

$$L_n[a, b] := \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável em } [a, b] \text{ e } \int_a^b |f(x)|^n dx < \infty \right\}.$$

Por fim, podemos reescrever (2.5) como

$$J_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

e, ainda, teremos  $J_a^n$  bem definida pois  $\Gamma(n)$  é definida em  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Definição 2.2.2.** Seja  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a \leq b$ ,  $f \in L_1[a, b]$  e  $n \in \mathbb{R}_+$ . O **operador integral fracionário segundo Riemann-Liouville de ordem  $n$**  é definido à esquerda por

$$J_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (2.11)$$

para  $a \leq x \leq b$ .

**Observação 2.2.1.** Notamos que:

- Nitidamente, para  $n \in \mathbb{N}$ , a integral fracionária de Riemann-Liouville equivale a definição clássica.
- Quanto a existência de (2.11)
  - (i) Para  $n \geq 1$  a integral fracionária existe uma vez que o integrando é o produto de uma função que, por hipótese, é integrável, e uma função contínua.
  - (ii) Por outro lado, para  $0 < n < 1$ , a existência de (2.11) não é tão clara, portanto será necessário estabelecer alguns conceitos.

**Definição 2.2.3.** Sejam  $f$  e  $g$  funções definidas em  $[0, \infty)$ . O operador linear  $h$ , definido por

$$h(x) = (f * g)(x) := \int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt \quad (2.12)$$

é chamado *produto de convolução*.

**Definição 2.2.4.** Definimos a função de Gel'fand Shilov para  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$  e  $v \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_-$  da seguinte forma

$$\phi_n(x) := \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{para } x \geq 0 \\ 0, & \text{para } x < 0 \end{cases} \quad \text{e } \phi_v(x) := \begin{cases} \frac{x^{v-1}}{\Gamma(v)}, & \text{para } x \geq 0 \\ 0, & \text{para } x < 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

**Teorema 2.2.1.** Seja  $f \in L_1[a, b]$  e  $n > 0$ . O operador  $J_a^n f(x)$  existe em quase todo ponto  $x \in [a, b]$ .

*Demonstração.* Da definição de  $\phi_n(x)$  e da Definição 2.2.3, obtemos que

$$\begin{aligned} (\phi_n * f)(x) &= \int_0^x f(t) \cdot \phi_n(x-t) dt \\ &= \int_0^x f(x) \cdot \frac{(x-t)^{n-1}}{\Gamma(n)} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x f(x) \cdot (x-t)^{n-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} \cdot f(t) dt \\ &= J^n f(x). \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.2.2.** Sejam  $m, n \in \mathbb{R}_+$ . Então  $J^m J^n = J^{m+n}$ . Além disso,  $J^m J^n = J^n J^m$ .

*Demonstração.* Como vimos que  $J^m$  e  $J^n$  podem ser definidos como convoluções  $\phi_m$  e  $\phi_n$ , respectivamente, é suficiente mostrar que  $\phi_m * \phi_n = \phi_{m+n}$ .

Bom,

$$\begin{aligned} (\phi_m * \phi_n)(x) &= \int_0^x \phi_m(t) \cdot \phi_n(x-t) dt \\ &= \int_0^x \frac{t^{m-1}}{\Gamma(m)} \cdot \frac{(x-t)^{n-1}}{\Gamma(n)} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^x t^{m-1} (x-t)^{n-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^x t^{m-1} \left[ x \left( 1 - \frac{t}{x} \right) \right]^{n-1} dt \\ &= \frac{x^{n-1}}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^x t^{m-1} \left( 1 - \frac{t}{x} \right)^{n-1} dt \end{aligned} \tag{2.14}$$

Fazemos a troca de variável,

$$u = \frac{t}{x} \implies t = ux$$

$$du = \frac{dt}{x} \implies xdu = dt$$

temos novos limites de integração

$$t \longrightarrow 0 \implies u \longrightarrow \frac{0}{x} = 0$$

$$t \longrightarrow x \implies u \longrightarrow \frac{x}{x} = 1$$

Portanto, reescrevemos (2.14) como

$$\begin{aligned}
(\phi_m * \phi_n)(x) &= \frac{x^{n-1}}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^x t^{m-1} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{n-1} dt \\
&= \frac{x^{n-1}}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^1 (ux)^{m-1} (1-u)^{n-1} x du \\
&= \frac{x^{n-1} x^{m-1} x}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^1 u^{m-1} (1-u)^{n-1} x du \\
&= \frac{x^{n+m-1}}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^1 u^{m-1} (1-u)^{n-1} du
\end{aligned}$$

Como por hipótese  $m, n \in \mathbb{R}_+$  podemos concluir da Definição 2.1.4 que

$$(\phi_m * \phi_n)(x) = \frac{x^{n+m-1}}{\Gamma(m)\Gamma(n)} B(m, n)$$

e de (2.7)

$$\begin{aligned}
(\phi_m * \phi_n)(x) &= \frac{x^{n+m-1}}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \\
&= \frac{x^{n+m-1}}{\Gamma(m+n)} \\
&= \phi_{m+n}(x)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

□

Para encerrar a seção apresentemos um exemplo para o cálculo da integral fracionária de uma função.

**Exemplo 2.2.1.** Calculemos a integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem  $n$  da função  $f(x) = (x-a)^\lambda$  onde  $\lambda > -1$  e  $n > 0$ . Por definição

$$\begin{aligned}
J_a^n f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (t-a)^\lambda (x-t)^{n-1} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (t-a)^\lambda \left[ \frac{(x-a)}{(x-a)} (x-t) \right]^{n-1} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (t-a)^\lambda \left[ (x-a) \left( \frac{x-a-t+a}{x-a} \right) \right]^{n-1} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (t-a)^\lambda \left[ (x-a) \left( \frac{x-a}{x-a} - \frac{t-a}{x-a} \right) \right]^{n-1} dt
\end{aligned}$$

Façamos a seguinte troca de variável

$$s = \frac{t-a}{x-a} \implies t-a = s(x-a)$$

$$ds = \frac{dt}{x-a} \implies (x-a)ds = dt$$

Portanto

$$\begin{aligned} J_a^n f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^1 [s(x-a)]^\lambda [(x-a)(1-s)]^{n-1} (x-a) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} (x-a)^\lambda \int_0^1 s^\lambda (1-s)^{n-1} (x-a)^{n-1} (x-a) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} (x-a)^{\lambda+n} \int_0^1 s^\lambda (1-s)^{n-1} ds \end{aligned}$$

notamos que,  $0 < n$  e  $-1 < \lambda$  nos permite escrever  $\lambda = \alpha - 1$  onde  $0 < \alpha$ , então utilizando da Definição 2.1.4 e do resultado (2.7) temos que:

$$\begin{aligned} J_a^n f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)} (x-a)^{\lambda+n} B(\alpha, n) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} (x-a)^{\lambda+n} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha+n)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+n)} (x-a)^{\lambda+n} \end{aligned}$$

Portanto,

$$J_a^n f(x) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1)} (x-a)^{n+\lambda} \quad (2.16)$$

## 2.3 Derivada de Riemann-Liouville

Após essa breve introdução aos conceitos básicos do cálculo e da definição do operador integral fracionário e apresentação de algumas de suas propriedades podemos começar a falar da *derivada fracionária*. Começemos falando do *Operador Derivada Fracionária de Riemann-Liouville*. Apesar desse ter alguns problemas para ser aplicado e acabar não sendo a definição de  $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$  mais utilizada na prática quando  $n \notin \mathbb{N}$ , ele deu origem à definição que será apresentada na próxima seção. Essa definição surge diretamente do Teorema Fundamental do Cálculo, já apresentado.

Em outras palavras o que o Teorema 2.1.1 diz é que  $DJ_a f = f$ , ou seja,

$$D^n J_a^n f = f \quad (2.17)$$

Além disso, uma consequência direta desse importante teorema é que para  $m, n \in \mathbb{N}$  onde  $m > n$  e  $f \in C^n[a, b]$ , onde  $C^n[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ possui } n\text{-ésima derivada contínua}\}$ , tem-se  $D^m = D^{m-n} D^n$

$$D^n f = D^m J_a^{m-n} f \quad (2.18)$$

pois sabemos da Definição 2.1.1 que  $f = D^{m-n} J_a^{m-n} f$  e aplicando o operador  $D^n$  em ambos os lados de (2.18) obtemos

$$D^n f = D^n D^{m-n} J_a^{m-n} f = D^{n+m-n} J_a^{m-n} f = D^m J_a^{m-n} f$$

portanto,

$$D^n f = D^m J_a^{m-n} f$$

Consideremos agora que  $\eta$  não é inteiro, ainda sim existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\eta < n$ , consideremos então  $n = \lceil \eta \rceil$  que detona  $n$  o menor inteiro maior que  $\eta$ . Com isso fazemos a seguinte generalização

**Definição 2.3.1.** Seja  $\eta \in \mathbb{R}_+$  e  $n = \lceil \eta \rceil$ . O operador  $D_a^\eta$  definido à esquerda por

$$D_a^\eta f := D^n J_a^{n-\eta} f$$

é chamado o **operador diferencial fracionário de Riemann-Liouville de ordem  $\eta$** .

O lema abaixo esclarece porque se escolhe tomar para cada  $\eta$  não inteiro o  $n$  como o menor inteiro maior que  $\eta$ .

**Lema 2.3.1.** Seja  $\eta \in \mathbb{R}_+$  e  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\eta < n$ . Então,

$$D_a^\eta = D^n J_a^{n-\eta}.$$

*Demonstração.* Se  $n = \lceil \eta \rceil$  essa é a definição. Consideramos então  $\eta > \lceil \eta \rceil > n$

$$\begin{aligned} D^n J_a^{n-\eta} &= D^{\lceil \eta \rceil + n - \lceil \eta \rceil} J_a^{\lceil \eta \rceil + n - \lceil \eta \rceil - \eta} \\ &= D^{\lceil \eta \rceil} D^{n - \lceil \eta \rceil} J_a^{n - \lceil \eta \rceil} J_a^{\lceil \eta \rceil - \eta} \\ &= D^{\lceil \eta \rceil} J_a^{\lceil \eta \rceil - \eta} \end{aligned}$$

Pela *Definição* (2.3.1)

$$D^n J_a^{n-\eta} = D_a^\eta f$$

□

Por fim, concluímos que "a derivada de ordem fracionária é a derivada de ordem inteira de uma determinada integral de ordem fracionária" (CAMARGO et al., 2009). Considerando as definições de Integral Fracionária (Definição 2.2.2) de Derivada Fracionária de Riemann-Liouville (Definição 2.3.1)

$$D_a^\eta f(x) := \frac{d^n}{dx^n} \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\eta)} \int_a^x (x-t)^{n-\eta-1} f(t) dt \right] \quad (2.19)$$

**Observação 2.3.1.** Para  $\eta \in \mathbb{N}$  podemos afirmar que o operador diferencial fracionário coincide com o operador diferencial clássico.

Agora mostremos sob quais condições a derivada fracionária de Riemann-Liouville está bem definida.

**Lema 2.3.2.** Seja  $f \in C^1[a, b]$  e  $0 < \eta < 1$ , então  $D_a^\eta f$  existe em quase toda parte em  $[a, b]$ . Além disso  $D_a^\eta f \in L_q[a, b]$  para  $1 \leq q < \frac{1}{\eta}$  e

$$D_a^\eta f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\eta)} \left( \frac{f(a)}{(x-a)^\eta} + \int_a^x f'(s)(s-t)^{-\eta} dt \right).$$

*Demonstração.* Consideremos a definição 2.3.1 e a continuidade de  $f$ . Como  $\eta < 1$  temos  $n = 1$ .

$$\begin{aligned} D_a^\eta f(x) &= \frac{d^n}{dx^n} \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\eta)} \int_a^x (x-t)^{n-\eta-1} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\eta)} \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)(x-t)^{-\eta} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\eta)} \frac{d}{dx} \int_a^x \left( f(a) + \int_a^t (f'(s) ds) \right) (x-t)^{-\eta} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\eta)} \frac{d}{dx} \left( f(a) \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^\eta} + \int_a^x \int_a^t f'(s)(x-t)^{-\eta} ds dt \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\eta)} \frac{d}{dx} \left( f(a) \left[ \frac{-(x-t)^{1-\eta}}{1-\eta} \right]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \int_a^t f'(s)(x-t)^{-\eta} ds dt \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\eta)} \left( \frac{f(a)}{(x-a)^\eta} + \frac{d}{dx} \int_a^x \int_a^t f'(s)(x-t)^{-\eta} ds dt \right). \end{aligned}$$

Utilizando o teorema de Fubini (SPIVAK, 1965) chegamos no seguinte resultado

$$\begin{aligned} D_a^\eta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\eta)} \left( \frac{f(a)}{(x-a)^\eta} + \frac{d}{dx} \int_a^x \int_s^a f'(s)(x-t)^{-\eta} dt ds \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\eta)} \left( \frac{f(a)}{(x-a)^\eta} + \frac{d}{dx} \int_a^x f'(s) \frac{(x-s)^{1-\eta}}{1-\eta} ds \right). \end{aligned}$$

□

A seguir será apresentado um teorema que nos mostra em que caso estabelecemos uma lei dos expoentes para derivadas fracionárias de Riemann-Liouville.

**Teorema 2.3.1.** Sejam  $\eta_1, \eta_2 \geq 0$ ,  $\varphi \in L_1[a, b]$  e  $f = J_a^{\eta_1+\eta_2} \varphi$ . Então, temos

$$D_a^{\eta_1} D_a^{\eta_2} f = D_a^{\eta_1+\eta_2} f. \quad (2.20)$$

*Demonstração.* Por hipótese,

$$D_a^{\eta_1} D_a^{\eta_2} f = D_a^{\eta_1} D_a^{\eta_2} J_a^{\eta_1+\eta_2} \varphi.$$

Por definição

$$D_a^{\eta_1} D_a^{\eta_2} J_a^{\eta_1+\eta_2} \varphi = D^{[\eta_1]} J_a^{[\eta_1]-\eta_1} D^{[\eta_2]} J_a^{[\eta_2]-\eta_2} J_a^{\eta_1+\eta_2} \varphi.$$

Pelo Teorema 2.2.2, podemos fazer as seguintes manipulações

$$D_a^{\eta_1} D_a^{\eta_2} f = D^{[\eta_1]} J_a^{[\eta_1]-\eta_1} D^{[\eta_2]} J_a^{[\eta_2]+\eta_1} \varphi = D^{[\eta_1]} J_a^{[\eta_1]-\eta_1} D^{[\eta_2]} J_a^{[\eta_2]} J_a^{\eta_1} \varphi.$$

Como  $[\eta_1], [\eta_2] \in \mathbb{N}$ , pelo Teorema 2.1.1. (Teorema Fundamental do Cálculo) conclui-se que

$$D_a^{\eta_1} D_a^{\eta_2} f = D^{[\eta_1]} J_a^{[\eta_1]-\eta_1} J_a^{\eta_1} \varphi = D^{[\eta_1]} J_a^{[\eta_1]} \varphi.$$

Utilizando as propriedades do operador integral, temos

$$D_a^{\eta_1} D_a^{\eta_2} f = \varphi,$$

de forma análoga mostramos que  $D_a^{\eta_1+\eta_2} f = \varphi$  e isso conclui a demonstração.  $\square$

As hipóteses do teorema acima são de extrema importância, a seguir apresentaremos dois exemplos onde (2.20) não é verificada.

**Exemplo 2.3.1.** Considere  $f(x) = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$  e  $\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{2} = \eta$ . Note que

$$\begin{aligned} D_0^{\eta_1} f(x) = D_0^{\eta_2} f(x) &= D^{[\eta]} J_0^{[\eta]-\eta} f(x) = D J^{1-\frac{1}{2}} f(x) = D J^{\frac{1}{2}} f(x) \\ &= D \left[ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}-1} t^{-\frac{1}{2}} dt \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} D \left[ \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} D \left[ \int_0^x x^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} D \left[ x^{-\frac{1}{2}} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt \right] \end{aligned}$$

Fazendo a troca de variável  $u = \frac{t}{x}$

$$\begin{aligned} D_0^{\eta_1} f(x) = D_0^{\eta_2} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} D \left[ x^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} (ux)^{-\frac{1}{2}} x du \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} D \left[ x^{-\frac{1}{2}} x x^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} du \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} D \left[ \int_0^1 u^{\frac{1}{2}-1} (1-u)^{\frac{1}{2}-1} du \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} D(\pi) = \frac{1}{\pi} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} D_0^{\eta_1} D_0^{\eta_2} f(x) &= D_0^{\eta_1} (D_0^{\eta_2} f(x)) = D_0^{\frac{1}{2}}(0) = D J_0^{1-\frac{1}{2}}(0) \\ &= D \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 0 dt = D(0) = 0 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$D^{\eta_1+\eta_2} f(x) = D^1 f(x) = -\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{2}$$

. Portanto,

$$D_a^{\eta_1} D_a^{\eta_2} f = D_a^{\eta_2} D_a^{\eta_1} f \neq D_a^{\eta_1+\eta_2} f.$$

**Exemplo 2.3.2.** Considere agora  $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\eta_1 = \frac{1}{2}$  e  $\eta_2 = \frac{3}{2}$ . Assim obtemos  $D_0^{\eta_1} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  e  $D_0^{\eta_2} f(x) = 0$ . Com isso  $0 = D_0^{\eta_1} D_0^{\eta_2} f(x) \neq D_0^{\eta_2} D_0^{\eta_1} f(x) = D_0^{\eta_1 + \eta_2} f(x) = -\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4}$ . Portanto

$$D_a^{\eta_1} D_a^{\eta_2} f \neq D_a^{\eta_2} D_a^{\eta_1} f = D_a^{\eta_1 + \eta_2} f$$

O próximo resultado é uma generalização de (2.17) para o caso não inteiro.

**Teorema 2.3.2.** Seja  $\eta \geq 0$ . Para cada  $f \in L_1[a, b]$ , temos

$$D_a^\eta J_a^\eta f = f.$$

*Demonstração.* Da Definição 2.3.1 e do Teorema 2.2.2 temos

$$D_a^\eta J_a^\eta f = D^n J_a^{n-\eta} J_a^\eta f = D^n J_a^\eta f(t) = f(t)$$

onde  $n = \lceil \eta \rceil$ . □

Com isso é possível afirmar que a derivada fracionária é o operador inverso à esquerda da integral fracionária.

Outra das propriedades que devem ser satisfeitas pela derivada fracionária, assim como a derivada de ordem inteira, é a linearidade.

**Teorema 2.3.3.** Sejam  $f_1$  e  $f_2$  funções em  $C^1[a, b]$ ,  $\eta \in \mathbb{R}_+$  e  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  então

$$D_a^\eta (c_1 f_1 + c_2 f_2) = (c_1 D_a^\eta f_1 + c_2 D_a^\eta f_2).$$

*Demonstração.* Segue imediata consequência da definição de  $D_a^\eta$ . □

Novamente apresentaremos um cálculo explícito, desta vez da derivada fracionária de uma função constante.

**Exemplo 2.3.3.** Seja  $f(x) = 1$ , então a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem  $\frac{1}{2}$  é:

$$D_x^{\frac{1}{2}}(1) = D^1[J^{\frac{1}{2}}(1)]$$

Nota que  $J^{\frac{1}{2}}(1)$  é um caso particular do Exemplo 2.2.1 quando  $\lambda = 0 = a$  e  $n = \frac{1}{2}$  então

$$D_x^{\frac{1}{2}}(1) = D^1 \left[ \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+0+1)} (x-0)^{\frac{1}{2}+0} \right].$$

Como,  $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  e  $\Gamma(1) = 1$ , temos:

$$D_t^{\frac{1}{2}}(1) = D^1 \left[ \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \neq 0.$$

O exemplo acima ilustra um dos empecilhos para a aplicação da derivada fracionária de Riemann-Liouville à problemas reais. O fato da derivada de uma constante não ser nula faz com que a ideia de derivada como uma taxa de variação, que estamos habituados no cálculo clássico, não seja mais possível. Para resolver esse "problema" surgiu a derivada fracionária de Caputo.

## 2.4 Derivada de Caputo

Apesar da definição de derivada não inteira segundo Riemann-Liouville ter vindo primeiro e, de fato, ter sido bem desenvolvida teoricamente, alguns fatores dificultam a sua aplicação à problemas reais. Por isso foi desenvolvido outro operador derivativo, bem semelhante ao de Riemann-Liouville. Esse operador, por sua vez, é utilizado em diversas áreas como em problemas de viscoelasticidade (MAINARDI, 2010) ou processos de difusão (OLDHAM; SPANIER, 1974). Começemos então fazendo uma prévia definição

**Definição 2.4.1.** Seja  $0 \leq \eta$ ,  $n = [\eta]$  e  $f \in C^1[a, b]$ . Então, definimos o operador  $\hat{D}_a^\eta$  por

$$\hat{D}_a^\eta f := J_a^{n-\eta} D^n f, \quad (2.21)$$

onde  $D^n f \in L_1[a, b]$ .

Ou ainda,

$$\hat{D}_a^\eta f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\eta)} \int_a^x (x-t)^{n-\eta-1} \left( \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) dt \quad (2.22)$$

**Observação 2.4.1.** Note que:

- Na derivada fracionária de Caputo a ordem dos operadores é o inverso da derivada de Riemann-Liouville.
- Como já dito, a derivada fracionária de Riemann-Liouville pode ser vista como a derivada inteira de uma integral fracionária, enquanto na derivada fracionária de Caputo podemos ver que corre uma integral fracionária de uma derivada inteira.
- A derivada segundo Caputo requer a integrabilidade da derivada de ordem  $n$  da função, por isso se torna uma derivada mais restritiva do que a derivada de Riemann-Liouville.
- Assim como na Definição 2.3.1, para  $\eta \in \mathbb{N}$  tem-se  $n = \eta$  e

$$\hat{D}_a^\eta f(x) := J_a^0 D^n f(x) = D^n f(x)$$

isto é, o operador fracionário coincide com a derivada inteira. Isso não é uma coincidência, esse é um requisito para o operador ser intitulado Derivada Fracionária.

Existem na literatura outros operadores diferenciais não inteiros, como por exemplo o operador de Grunwald–Letnikov que não fazem parte do escopo deste trabalho mas que satisfazem os critérios que foram estipulados que tais operadores deveriam satisfazer. Em 1975, Ross formulou os primeiros tópicos que um operador derivativo deveria satisfazer (ROSS, 2006) e em 2015 uma reformulação desses critérios foi apresentada (ORTIGUEIRA; MACHADO, 2015). As condições são as seguintes

- 1) A derivada não inteira de uma função analítica é analítica;
- 2) Quando a ordem da derivação for inteira a derivada fracionária é a mesma que a derivada clássica (inteira).
- 3) A derivada de ordem zero de uma função retorna é a própria função.
- 4) É um operador linear.
- 5) A lei do expoente é válida (onde  $\eta_1$  e  $\eta_2$  são a ordem da derivada), isto é,

$$D^{\eta_1} D^{\eta_2} f(t) = D^{\eta_1 + \eta_2} f(t) \quad \text{para } \eta_1 > 0 \quad \text{e} \quad \eta_2 > 0.$$

Apesar de haver vários operadores propostos, para cada tipo de problema haverá uma definição que se encaixa melhor. Para problemas com valor inicial o melhor operador costuma ser a Derivada Fracionária de Caputo portanto a partir daqui quando não for especificado o operador  $D^n$ ,  $n > 0$  estaremos nos referindo à derivada fracionária de Caputo.

**Definição 2.4.2.** Seja  $f$  uma função com as  $(n - 1)$  derivadas definidas em  $[a - \epsilon, a + \epsilon]$  e que exista a  $f^{(n)}(a)$ , então

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}h(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h(x - a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde  $f^{(0)} = f$  e  $0! = 1$ . Chamamos  $P_n$  de *polinômio de Taylor de ordem  $n$  da função  $f$  em torno de  $a$* .

O próximo teorema garante sob quais condições a derivada fracionária segundo Caputo está bem definida.

**Teorema 2.4.1.** Sejam  $\eta \geq 0$ ,  $n = \lceil \eta \rceil$  e  $f \in C^n[b, c]$ . Então

$$\hat{D}_a^\eta f = D_a^\eta(f - P_{n-1}[f; a]),$$

onde  $P_{n-1}[f; a]$  é o polinômio de Taylor de grau  $(n - 1)$  para  $f$  em torno de  $a$ .

*Demonstração.* Observe que a expressão no lado direito da equação existe se,  $D_a^\eta f$  existe e  $f$  possui  $n - 1$  derivadas em  $a$  e assim o polinômio de Taylor existe. Do Lema 2.3.2 temos que  $D_a^\eta f$  existe. Como por hipótese  $f \in C^n$  podemos garantir, além da existência, a continuidade das  $n - 1$  derivadas de  $f$  em  $a$ .

Portanto a partir de agora usaremos a ultima expressão. □

Partimos então para a definição do operador derivativo de Caputo.

**Definição 2.4.3.** Sejam  $\eta \geq 0$ ,  $n = \lceil \eta \rceil$  e  $f$  seja tal que  $D_a^\eta(f - P_{n-1}[f; a])$  exista. Então,

$$D_{*a}^\eta f = D_a^\eta(f - P_{n-1}[f; a]). \quad (2.24)$$

O operador  $D_{*a}^\eta$  é chamado de **operador diferencial fracionário de Caputo de ordem  $\eta$** .

*Demonstração.* Para  $\eta \in \mathbb{N}$  a afirmação é verdadeira e já foi apresentada na Observação 2.4.1, logo temos que analisar o caso  $\eta \notin \mathbb{N}$ . Como consideramos  $n$  o primeiro inteiro tal que  $n > \eta$ , temos pela Definição 2.3.1 que

$$\begin{aligned} D_a^\eta(f - P_{n-1}[f; a]) &= D^n J_a^{n-\eta}(f - P_{n-1}[f; a])(x) \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\eta-1}}{\Gamma(n-\eta)} (f(t) - P_{n-1}[f; a](t)) dt. \end{aligned}$$

Começemos resolvendo a integral por partes, considere

$$\begin{aligned} u = f(t) - P_{n-1}[f; a](t) &\implies du = Df(t) - D(P_{n-1}[f; a](t))dt \\ dv = (x-t)^{n-\eta-1}dt &\implies v = \frac{-(x-t)^{n-\eta}}{n-\eta} \end{aligned} \quad (2.25)$$

assim  $J_a^{n-\eta}(f - P_{n-1}[f; a])(x) = u.v - \int_a^x v du$ , isto é,

$$\begin{aligned} &\int_a^x \frac{1}{\Gamma(n-\eta)} (f(t) - P_{n-1}[f; a](t)) (x-t)^{n-\eta-1} dt \\ &= -\frac{1}{\Gamma(n-\eta+1)} \left[ (f(t) - P_{n-1}[f; a](t)) (x-t)^{n-\eta} \right]_{t=a}^{t=x} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n-\eta+1)} \int_a^x (D(f(t)) - D(P_{n-1}[f; a](t))) (x-t)^{n-\eta} dt. \end{aligned} \quad (2.26)$$

É sabido que  $f(t) - P_{n-1}[f; a](t) = 0$  quando  $t = a$  e que, nitidamente,  $(x-t)^{n-\eta} = 0$  para  $t = x$ , assim, temos que o termo fora da integral é zero. Então,

$$J_a^{n-\eta}(f - P_{n-1}[f; a]) = J_a^{n-\eta+1} D(f - P_{n-1}[f; a])$$

Repetindo este processo sucessivamente,  $n$  vezes, obtemos

$$J_a^{n-\eta}(f - P_{n-1}[f; a]) = J_a^{n-\eta+1} D(f - P_{n-1}[f; a]) = \dots = J_a^{n-\eta+n} D(f - P_{n-1}[f; a])$$

ou seja,

$$J_a^{n-\eta}(f - P_{n-1}[f; a]) = J_a^{2n-\eta}D^n(f - P_{n-1}[f; a]) = J_a^n J_a^{n-\eta}D^n(f - P_{n-1}[f; a]).$$

Note que  $D^n P_{n-1}[f; a] \equiv 0$  porque  $P_{n-1}[f; a]$  é um polinômio de grau  $n - 1$ . Logo

$$J_a^{n-\eta}(f - P_{n-1}[f; a]) = J_a^n J_a^{n-\eta}D^n f.$$

Portanto,

$$D_a^\eta(f - P_{n-1}[f; a]) = D^n J_a^n J_a^{n-\eta}D^n f = J_a^{n-\eta}D^n f = \hat{D}_a^\eta f.$$

□

Existem outras formas de representar tais operadores, a saber operadores diferenciais fracionários de Riemann-Liouville e de Caputo, entretanto, nosso objetivo continua sendo apresentar questões analíticas dos mesmos, em particular relações entre eles.

**Lema 2.4.1.** Sejam  $\eta \geq 0$  e  $n = \lceil \eta \rceil$ . Supondo que  $f$  seja uma função de tal modo que ambos  $D_{*a}^\eta f$  (derivada fracionária de ordem  $\eta$  segundo Caputo) e  $D_a^\eta f$  (derivada fracionária de ordem  $\eta$  segundo Riemann-Liouville) existam. Então,

$$D_{*a}^\eta f(x) = D_a^\eta f - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(a)}{\Gamma(k - \eta + 1)} (x - a)^{k-\eta}.$$

isto é,

$$\begin{aligned} D_{*a}^\eta f(x) &= D_a^\eta f - \left[ \frac{D^0 f(a)}{\Gamma(0 - \eta + 1)} (x - a)^{0-\eta} + \frac{D^1 f(a)}{\Gamma(1 - \eta + 1)} (x - a)^{1-\eta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{D^2 f(a)}{\Gamma(2 - \eta + 1)} (x - a)^{2-\eta} + \dots + \frac{D^{n-1} f(a)}{\Gamma(n - 1 - \eta + 1)} (x - a)^{n-(\eta-1)} \right] \end{aligned}$$

*Demonstração.* Começemos considerando a definição da derivada de Caputo,

$$\begin{aligned} D_{*a}^\eta f(x) &= D_a^\eta(f - P_{n-1}[f; a]) \\ &= D_a^\eta f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(a)}{k!} D_a^\eta (x - a)^k \\ &= D_a^\eta f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(a)}{k!} \left[ \frac{\Gamma(k + 1)}{\Gamma(k + 1 - \eta)} (x - a)^{k-\eta} \right] \\ &= D_a^\eta f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(a)}{\Gamma(k - \eta + 1)} ((x - a)^{k-\eta}) \end{aligned}$$

□

**Lema 2.4.2.** Assumindo as mesmas hipóteses do lema anterior, temos:

$$D_a^\eta f = D_{*a}^\eta f$$

como condição necessária e suficiente para que  $f$  possua  $n$  derivadas nulas em um dado ponto  $a$  e

$$D^k f(a) = f(0) \text{ para } k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

*Demonstração.* Essa demonstração é feita de forma análoga ao Lema 2.4.1.  $\square$

**Teorema 2.4.2.** Se  $f$  for contínua e  $\eta \geq 0$ , então

$$D_{*a}^\eta J_a^\eta f = f.$$

*Demonstração.* Definimos  $\phi = J_a^\eta f$ , temos  $D^k \phi(a) = 0$  para  $k = 0, 1, \dots, [\eta] - 1$ . Além disso  $D_{*a}^\eta J_a^\eta f = D_{*a}^\eta \phi$ , pelo Lema 2.4.2  $D_{*a}^\eta \phi = D_a^\eta \phi$ , e novamente  $D_a^\eta \phi = D_a^\eta J_a^\eta f$ , por fim, pelo Teorema 2.3.2,  $D_a^\eta J_a^\eta f = f$   $\square$

O último resultado mostrou que o operador derivada de ordem fracionária de Caputo é o inverso à esquerda do operador de integração de ordem fracionária.

**Lema 2.4.3.**  $\therefore$  Seja  $f \in C^k[a, b]$ ,  $a < b$  e  $k \in \mathbb{N}$ . Sejam  $\eta, \varepsilon > 0$  tal que existe  $l \in \mathbb{N}$  com  $l \leq k$  e  $\eta, \eta + \varepsilon \in [l - 1, l]$ , então

$$D_{*a}^\varepsilon D_{*a}^\eta f = D_{*a}^{\eta+\varepsilon} f.$$

A seguir provaremos que, como a derivada de ordem fracionária de Riemann-Liouville, a derivada de ordem fracionária segundo Caputo é um operador linear.

**Teorema 2.4.3.** Sejam  $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções tais que  $D_{*a}^\eta f_1$  e  $D_{*a}^\eta f_2$  existem em quase toda parte e  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ , então

$$D_{*a}^\eta (k_1 f_1 + k_2 f_2) = k_1 D_{*a}^\eta f_1 + k_2 D_{*a}^\eta f_2.$$

*Demonstração.* Consequência imediata da definição de  $D_{*a}^\eta$ .  $\square$

Para concluir a seção apresentaremos um exemplo do cálculo de uma derivada de ordem fracionária segundo Caputo.

**Exemplo 2.4.1.** Seja  $f(x) = k$ , então a derivada fracionária segundo Caputo de ordem  $\frac{1}{2}$  é:

$$D_{*a}^{\frac{1}{2}}(k) = J^{\frac{1}{2}}(D^1(k)) = J^{\frac{1}{2}}(0) = 0.$$

**Observação 2.4.2.** Note que esse exemplo ilustra uma característica já apresentada da derivada fracionária de Caputo, a derivada de que constante é nula, assim como no caso inteiro.

## 2.5 Equações Diferenciais Fracionárias do Tipo Caputo

Nesta seção será introduzida a teoria básica a cerca das equações diferenciais fracionárias, expondo alguns resultado como existência e unicidade da solução, problemas de valores iniciais e dependência contínua dos dados iniciais. Gostaria de ressaltar que esta será apenas uma introdução, trazendo questões básicas e fundamentais sobre o assunto. Em momento alguma espera-se esgotar o tema tendo em vista a grandeza dessa área que continua crescendo, com aplicações em diversas áreas do conhecimento.

Algumas definições serão feitas com o objetivo de facilitar a compreensão das demonstrações que serão feitas nesta seção.

**Definição 2.5.1.** Considere o conjunto  $E \neq \{\}$  e uma função  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ , satisfazendo as seguintes condições para  $a, b, c \in E$

$$(M1) \quad d(a, b) \geq 0 \text{ e } d(a, b) = 0 \iff a = b;$$

$$(M2) \quad d(a, b) = d(b, a);$$

$$(M3) \quad d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$$

Então  $d$  é dita *métrica* de  $E$ ,  $d(a, b)$  indica a *distância* entre  $a$  e  $b$  e  $(E, d)$  é chamado **espaço métrico**.

**Definição 2.5.2.** Um espaço métrico  $(E, d)$  é dito ser **completo** se toda sequência de Cauchy em  $(E, d)$  converge para um ponto em  $(E, d)$ .

**Definição 2.5.3.** Um subconjunto  $U$  é **convexo** quando

$$\forall t \in [0, 1], \text{ tem-se } (1 - t)x + ty \in U \text{ onde } x, y \in U.$$

**Definição 2.5.4.** Seja  $A$  uma aplicação do conjunto  $U$  nele mesmo, isto é,  $A : U \rightarrow U$ . Dizemos que  $u$  é um **ponto fixo** de  $A$  quando  $A(u) = u$ .

**Definição 2.5.5.** Seja  $(E, d)$  um espaço métrico e  $F \subseteq E$ . O conjunto  $F$  é **relativamente compacto** em  $E$  se o conjunto  $F$  é fechado.

Agora será enunciado um teorema que será utilizado na demonstração do teorema de existência.

**Teorema 2.5.1. (Teorema do ponto fixo de Schauder)** Seja  $(E, d)$  um espaço métrico completo,  $U$  um subconjunto convexo e fechado de  $E$  e  $A : U \rightarrow U$  uma aplicação tal que o conjunto  $Au : u \in U$  é relativamente compacto em  $E$ . Então  $A$  tem pelo menos um ponto fixo.

Existe uma caracterização para conjuntos relativamente compacto conhecida como *Teorema de Arzelà-Ascoli* de extrema importância para a demonstração do teorema de existência, ele será enunciado a seguir mas antes fazemos algumas definições.

**Definição 2.5.6.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada,  $\|\cdot\|_\infty$  denota a **norma do supremo** (também conhecida como norma Chebyshev ou norma infinito), que é definida da seguinte forma

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$$

**Definição 2.5.7.** Um conjunto de funções contínuas,  $F \subseteq C[a, b]$  para algum  $a < b$ , é dito **equicontínuo** quando para todo  $\epsilon > 0$  existe algum  $\delta > 0$  tal que para toda  $f \in F$  e todos  $x, x^* \in [a, b]$  com  $|x - x^*| < \delta$  temos  $|f(x) - f(x^*)| < \epsilon$ .

**Definição 2.5.8.** Um conjunto  $F \subseteq C[a, b]$  onde  $a < b$  é dito **uniformemente limitado** quando existe uma constante  $K > 0$  tal que  $\|f\|_\infty \leq K$  para toda  $f \in F$ .

**Teorema 2.5.2. (Arzelà-Ascoli).** Seja  $F \subseteq C[a, b]$  para algum  $a < b$ , e assumamos que o conjunto está equipado com a norma do supremo. Então,  $F$  é relativamente compacto em  $C[a, b]$  se  $F$  é equicontínua e uniformemente limitado.

**Definição 2.5.9.** Um **espaço de Banach** é um espaço vetorial normado completo.

Por fim, definimos um problema de valor inicial (PVI). No decorrer do capítulo mostraremos resultados de existência e unicidade da solução do mesmo.

**Definição 2.5.10.** O PVI com derivadas de ordem fracionária segundo Caputo é escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} D_{*0}^\eta u(t) &= f(t, u(t)), \\ D^k u(0) &= u_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \tag{2.27}$$

como condições iniciais, onde operador diferencial de ordem fracionária segundo Caputo é  $D_{*0}^\eta$  como foi apresentado na *Definição 2.4.1*.

## 2.5.1 Existência de uma solução

Nesta subseção apresentaremos os resultados de existência de uma solução para o PVI fracionário (2.27).

**Teorema 2.5.3.** (Teorema da Existência) Sejam  $0 < \eta$  e  $n = \lceil \eta \rceil$ ,  $(u_0^0, \dots, u_0^{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ ,  $k > 0$  e  $h^* > 0$ . Definimos  $G := \left\{ (t, u) : 0 \leq t \leq h^*, \left| u - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k u_0^k}{k!} \right| \leq k \right\}$ . Além disso a função  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua,  $M := \sup_{(t,z) \in G} |f(t, z)|$  e

$$h := \begin{cases} h^* & , \quad \text{se } M = 0, \\ \min \left\{ h^*, \frac{(k\Gamma(\eta+1))^{\frac{1}{\eta}}}{M} \right\} & , \quad \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.28}$$

Então, existe uma função  $u \in C[0, h]$  solução do PVI (2.27).

*Demonstração.* Se  $M = 0$ , temos que para todos  $(t, u) \in G$ ,  $f(t, u) = 0$  e evidentemente a função  $u(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_0^{(k)} t^{(k)}}{k!}$ , definida em  $[0, h]$  é uma solução do PVI (2.27), e assim o teorema estaria provado.

Caso contrário, se  $M \neq 0$ , utilizaremos do fato de que o PVI (2.27) é equivalente à equação integral não linear de Volterra do segundo tipo

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} u_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_0^t (t-x)^{\eta-1} f(x, u(x)) dx \quad (2.29)$$

onde  $n = \lceil \eta \rceil$ .

Defina o polinômio  $P_{n-1}$ , polinômio de Taylor de ordem  $n-1$  da função  $u$  em torno de 0,

$$P_{n-1}(t) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} u_0^{(k)}, \quad (2.30)$$

que satisfaz as condições iniciais, e o conjunto  $U := \{u \in C[0, h] : \|u - P\|_\infty \leq K\}$ . Evidentemente  $U$  é um subconjunto fechado e convexo do espaço de todas as funções contínuas em  $[0, h]$  com a norma do supremo que é um espaço de Banach. Assim,  $U$  também é um espaço de Banach (DIETHELM, 2010b). Além disso,  $U$  também é não vazio, uma vez que o polinômio  $P$  é um elemento de  $U$ . Sobre este conjunto  $U$ , definimos o operador  $A$  por

$$(Au)(t) := P(t) + \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_0^t (t-x)^{\eta-1} f(x, u(x)) dx \quad (2.31)$$

Com esse operador, a equação de Volterra (2.29), pode ser reescrita como

$$u = Au,$$

e assim, como  $u$  é um ponto fixo, para provar a existência, é suficiente mostrar que o operador  $A$  possui um ponto fixo. Portanto, o próximo passo é investigar as propriedades do operador  $A$ .

$Au \in U$  para qualquer  $u \in U$ .

De fato, seja  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq u$ , então:

$$\begin{aligned} |Au(t_1) - Au(t_2)| &= \frac{1}{\Gamma(\eta)} \left| \int_0^{t_1} (t_1 - x)^{\eta-1} f(x, u(x)) dx - \int_0^{t_2} (t_2 - x)^{\eta-1} f(x, u(x)) dx \right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\eta)} \left| \int_0^{t_1} (t_1 - x)^{\eta-1} - (t_2 - x)^{\eta-1} f(x, u(x)) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - x)^{\eta-1} f(x, u(x)) dx \right| \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\eta)} \left( \int_0^{t_1} |(t_1 - x)^{\eta-1} - (t_2 - x)^{\eta-1}| dx + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - x)^{\eta-1} dx \right). \end{aligned}$$

Analisando separadamente

$$I_1 = \int_0^{t_1} |(t_1 - x)^{\eta-1} - (t_2 - x)^{\eta-1}| dx \quad \text{e} \quad I_2 = \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - x)^{\eta-1} dx$$

notamos que

$$I_2 = \left[ \frac{-(t_2 - x)^\eta}{\eta} \right]_{x=t_1}^{x=t_2} = \frac{(t_2 - t_1)^\eta}{\eta}$$

e que para  $I_1$  precisamos olhar para os três casos  $\boxed{\eta = 1}$ ,  $\boxed{\eta < 1}$  e  $\boxed{\eta > 1}$ , à parte.

(i) Para  $\boxed{\eta = 1}$ , o integrando de  $I_1$  é identicamente nulo, e, portanto, a integral tem valor zero.

(ii) Para  $\boxed{\eta < 1}$ , temos  $\eta - 1 < 0$  e, portanto,  $(t_1 - x)^{\eta-1} \geq (t_2 - x)^{\eta-1}$ . Assim,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{t_1} |(t_1 - x)^{\eta-1} - (t_2 - x)^{\eta-1}| dx = \int_0^{t_1} ((t_1 - x)^{\eta-1} - (t_2 - x)^{\eta-1}) dx \\ &= \frac{1}{\eta} (t_1^\eta - t_2^\eta + (t_2 - t_1)^\eta) \\ &\leq \frac{(t_2 - t_1)^\eta}{\eta}. \end{aligned}$$

(iii) Por último, se  $\boxed{\eta > 1}$  então  $(t_1 - x)^{\eta-1} \leq (t_2 - x)^{\eta-1}$  e, portanto,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{t_1} |(t_1 - x)^{\eta-1} - (t_2 - x)^{\eta-1}| dx = \int_0^{t_1} ((t_2 - x)^{\eta-1} - (t_1 - x)^{\eta-1}) dx \\ &= \frac{1}{\eta} (-t_1^\eta + t_2^\eta - (t_2 - t_1)^\eta) \\ &\leq \frac{(t_2^\eta - t_1^\eta)}{\eta}. \end{aligned}$$

Como

$$|Au(t_1) - Au(t_2)| = \frac{M}{\Gamma(\eta)} \left( I_1 + \frac{(t_2 - t_1)^\eta}{\eta} \right).$$

para  $\eta < 1$

$$|Au(t_1) - Au(t_2)| \leq \frac{M}{\Gamma(\eta)} \left( \frac{(t_2 - t_1)^\eta}{\eta} + \frac{(t_2 - t_1)^\eta}{\eta} \right).$$

e para  $\eta > 1$

$$|Au(t_1) - Au(t_2)| \leq \frac{M}{\Gamma(\eta)} \left( \frac{(t_2^\eta - t_1^\eta)}{\eta} + \frac{(t_2 - t_1)^\eta}{\eta} \right).$$

Unindo estes resultados:

$$|Au(t_1) - Au(t_2)| \leq \begin{cases} \frac{2M}{\Gamma(\eta+1)} (t_2 - t_1)^\eta & \text{se } \eta \leq 1, \\ \frac{M}{\Gamma(\eta+1)} ((t_2 - t_1)^\eta + t_2^\eta - t_1^\eta), & \text{se } \eta > 1. \end{cases} \quad (2.32)$$

Em ambos os casos, quando  $t_2 \rightarrow t_1$  a expressão do lado direito da equação (2.32) converge

para 0. Com isso é possível provar que  $Au$  é uma função contínua. Além disso, para  $u \in U$  e  $t \in [0, h]$  vale que

$$\begin{aligned}
 |(Au)(t) - T(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\eta)} \left| \int_0^t (t-x)^{\eta-1} f(x, u(x)) dx \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\eta+1)} M t^\eta \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\eta+1)} M h^\eta \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\eta+1)} M \frac{k\Gamma(\eta+1)}{M} \\
 &= K.
 \end{aligned}$$

Assim, acabamos de mostrar que  $Au \in U$  para todo  $u \in U$ .

Como mostrar a existência de uma solução  $u$  é equivalente a mostrar a existência do ponto fixo do operador  $A$  iremos aplicar o teorema do ponto fixo de Schauder, (SOTOMAYOR, 1979), mas para isso precisamos mostrar que  $A(U) := \{Au : u \in U\}$  é um conjunto relativamente compacto. Isto será feito por meio do Teorema de Arzela-Ascoli (ALMEIDA; PIMENTA, 2018). Agora vamos a demonstração deste fato.

Para cada  $z \in A(U)$ , descobrimos que, para todos  $t \in [0, h]$ ,

$$\begin{aligned}
 |z(t)| = |(Au)(t)| &\leq \|P_{n-1}\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_0^t (t-x)^{\eta-1} |f(x, u(x))| dx \\
 &\leq \|P_{n-1}\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(\eta+1)} M h^\eta \\
 &\leq \|P_{n-1}\|_\infty + K,
 \end{aligned}$$

desta forma está provado a limitação do conjunto  $A(U)$ .

Para provar a **equicontinuidade** do conjunto  $A(U) \subseteq C[0, h]$  precisamos mostrar que para todo  $\epsilon > 0$  existe algum  $\delta > 0$  tal que para toda  $Au \in A(U)$  e todos  $t_1, t_2 \in [0, h]$  com  $|t_2 - t_1| < \delta$  temos  $|Au(t_2) - Au(t_1)| < \epsilon$ . Novamente separamos em casos,  $\boxed{\eta \leq 1}$  e  $\boxed{\eta > 1}$ , partindo de (2.32) encontramos, para o caso  $\boxed{\eta \leq 1}$  que

$$|(Au)(t_1) - (Au)(t_2)| \leq \frac{2M}{\Gamma(\eta+1)} (t_2 - t_1)^\eta.$$

Assim, para cada  $\epsilon > 0$  tomemos  $\delta = \left(\frac{\Gamma(\eta+1)}{2M}\epsilon\right)^{\frac{1}{\eta}} > 0$ ,  $|t_2 - t_1| < \delta$  implica

$$|(Au)(t_1) - (Au)(t_2)| < \frac{2M}{\Gamma(\eta+1)} \left[ \left( \frac{\Gamma(\eta+1)}{2M} \epsilon \right)^{\frac{1}{\eta}} \right]^\eta = \epsilon.$$

Para o caso em que  $\boxed{\eta > 1}$ , podemos usar o teorema do valor médio expandido (GUIDO-

RIZZI, 2012), para obter que

$$\begin{aligned} |(Au)(t_1) - (Au)(t_2)| &\leq \frac{M}{\Gamma(\eta + 1)} ((t_2 - t_1)^\eta + t_2^\eta - t_1^\eta) \\ &= \frac{M}{\Gamma(\eta + 1)} ((t_2 - t_1)^\eta + \eta(t_2 - t_1)\xi^{\eta+1}) \\ &= \frac{M}{\Gamma(\eta + 1)} ((t_2 - t_1)^\eta + \eta(t_2 - t_1)h^{\eta+1}), \end{aligned}$$

para algum  $\xi \in [t_1, t_2] \subseteq [0, h]$ . Portanto, se  $|t_2 - t_1| < \delta$ , então

$$|(Au)(t_1) - (Au)(t_2)| \leq \frac{M}{\Gamma(\eta + 1)} (\delta^\eta + \eta\delta h^{\eta-1}). \quad (2.33)$$

Como o lado direito é independente de  $u$ ,  $t_1$  e  $t_2$ , provando assim a equicontinuidade do conjunto  $A(U)$  para esse caso. Como mostramos a equicontinuidade para  $\eta \leq 1$  e para  $\eta > 1$  a equicontinuidade esta provada. Usando o Teorema de Ascoli-Arzelá (ALMEIDA; PIMENTA, 2018), em qualquer um dos casos, concluímos que  $A(U)$  é relativamente compacto. Portanto, pelo Teorema de Ponto Fixo de Schauder (DIETHELM, 2010b), obtemos que o operador  $A$  tem um ponto fixo. Por construção, um ponto fixo de  $A$  é uma solução de nosso problema do valor inicial (2.27).  $\square$

**Definição 2.5.11.** Qualquer função  $u$  para a qual está bem definida a derivada de ordem fracionária  $D_{*0}^{n-\eta}$ , isto é, que satisfaz as hipóteses do Teorema 2.5.3 e também satisfaz o PVI (2.27) é dita uma solução do PVI.

**Lema 2.5.1.** Nas mesmas hipóteses do Teorema 2.5.3,  $u \in C[0, h]$  é uma solução do problema de valor inicial equação (2.27) se, e somente se, é uma solução da equação integral de Volterra não linear do segundo tipo

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\eta-1} \frac{t^k}{k!} u_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_0^t (t-s)^{n-\eta-1} f(s, u(s)) ds \quad (2.34)$$

onde  $n = \lceil \eta \rceil$ .

*Demonstração.* Primeiramente definimos  $z(t) := f(t, u(t))$ . Notamos que dadas as hipóteses sobre  $u$  e  $f$  temos que  $z \in C[0, h]$ . Em seguida, usamos a definição do operador diferencial do Caputo para reescrever a equação (2.27) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} z(t) &= f(t, u(t)) = D_{*0}^\theta u(t) = D_0^\theta (u - P_{n-1}[u; 0])(t) \\ &= D^n J_0^{n-\theta} (u - P_{n-1}[u; 0])(t). \end{aligned}$$

Uma vez que estamos trabalhando com funções contínuas, podemos aplicar o operador  $J_0^n$  em ambos os lados e encontrar

$$J_0^n z(t) = J_0^{n-\theta} (u - P_{n-1}[u; 0])(t) + q(t)$$

com  $q$  um polinômio de grau não superior a  $(n - 1)$ . Como  $z$  é contínua, a função  $J_0^n z$  no lado esquerdo da equação acima tem um zero de ordem, pelo menos,  $n$  na origem. Além disso, a diferença  $u - P_{n-1}[u; 0]$  tem a mesma propriedade por construção e, portanto, a função  $J_0^{n-\theta} (u - P_{n-1}[u; 0])$  no lado direito da nossa equação tem a mesma ordem  $n$  na origem. Assim, resta que o polinômio  $q$  tem a mesma propriedade e pode-se então deduzir imediatamente (desde que seu grau não seja superior  $n - 1$ ) que:

$$J_0^n z(t) = J_0^{n-n} (u - P_{n-1}[u; 0]) (t)$$

Agora aplicando o operador de Riemann-Liouville  $D_0^{n-n}$  para esta equação observa-se que

$$\begin{aligned} u(t) - P_{n-1}[u; 0](t) &= D_0^{n-n} J_0^n z(t) \\ &= D^1 J_0^{1+\theta-n} J_0^\theta z(t) \\ &= D J_0^{1+\theta} z(t) = J_0^\theta z(t). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Recordando as definições em que  $P_{n-1}$  é o polinômio de Taylor em  $[u; 0]$ , obtemos que é uma condição necessária para  $u$  solução do problema (2.27) satisfazer a equação integral de Volterra.  $\square$

## 2.5.2 Unicidade de solução

Nesta subseção apresentaremos os resultados que garantem a unicidade para a solução do PVI (2.27).

**Teorema 2.5.4.** (Teorema de Ponto Fixo de Weissinger) Assuma que  $(U, d)$  seja um espaço métrico completo não vazio e seja  $\alpha_j \geq 0$  para todo  $j \in \mathbb{N}_0$  tal que  $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$  converge. Além disso, seja  $A : U \rightarrow U$  a aplicação que satisfaz a seguinte desigualdade

$$d(A^j u, A^j v) \leq \alpha_j d(u, v)$$

para todo  $j \in \mathbb{N}$  e todo  $u, v \in U$ . Então,  $A$  possui um único ponto fixo  $u^*$ . Além disso, para qualquer  $u_0 \in U$ , a sequência  $(A^j u_0)_{j=1}^{\infty}$  converge para esse ponto fixo  $u^*$ .

Esse teorema foi enunciado pois será utilizado na demonstração de unicidade da solução.

**Teorema 2.5.5.** (Teorema de Unicidade) Seja  $0 < n$  e  $n = [n]$ ,  $u_0^{(0)}, \dots, u_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}^n$ ,  $k > 0$  e  $h^* > 0$ . Seja  $G$  definido como no Teorema (2.5.3). Assuma ainda que a função  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaça condição de Lipschitz em relação à segunda variável, ou seja, existe uma constante  $L > 0$  tal que, para todo  $(t, u_1), (t, u_2) \in G$ , temos

$$|f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t))| < L |u_1(t) - u_2(t)|. \tag{2.36}$$

com a constante  $L > 0$  independente de  $t, u_1$  e  $u_2$ . Então, existe uma única função  $u \in C[0, h]$  solução do problema de valor inicial (2.27).

*Demonstração.* Lembre que o Teorema 2.5.3 afirma que existe ao menos uma solução para o PVI. Para provar a unicidade desta solução, começamos com argumentos semelhantes aos da prova de Teorema 2.5.3. Considere o mesmo polinômio  $P$  (definido em (2.30)) e o mesmo operador  $A$  (definido em (2.31)) e lembre-se que ele mapeia o conjunto  $U = \{u \in C[0, h] : \|u - P\|_\infty \leq k\}$  não vazio, convexo e fechado, em si mesmo.

Assim como mostrar que o operador  $A$  possuía um ponto fixo foi suficiente para mostrar a existência de pelo menos uma solução, provar que esse ponto fixo é único também será suficiente para garantir que essa solução é única. Para fazer isso, vamos primeiro provar que, para cada  $j \in \mathbb{N}_0$ , todo  $x \in [0, h]$  e todos  $u, \tilde{u} \in U$ , temos

$$\|A^j u - A^j \tilde{u}\|_{L_\infty[0, t]} \leq \frac{(Lt^n)^j}{\Gamma(1 + nj)} \|u - \tilde{u}\|_{L_\infty[0, t]}. \quad (2.37)$$

Agora usaremos o método de indução para obter o resultado. No caso  $j = 0$ , a afirmação é trivialmente verdadeira. Se utilizarmos esse método para  $(j-1) \rightarrow j$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|A^j u - A^j \tilde{u}\|_{L_\infty[0, t]} &= \|A(A^{j-1}u) - A(A^{j-1}\tilde{u})\|_{L_\infty[0, t]} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\eta)} \sup_{0 \leq \omega \leq t} \left| \int_0^\omega (\omega - x)^{\eta-1} [f(x, A^{j-1}u(x)) - f(x, A^{j-1}\tilde{u}(x))] dx \right|. \end{aligned}$$

Considerando o fato de  $f$  ser Lipschitz contínua em relação à segunda variável e a hipótese de indução prosseguimos então da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \|A^j u - A^j \tilde{u}\|_{L_\infty[0, t]} &\leq \frac{L}{\Gamma(\eta)} \sup_{0 \leq \omega \leq t} \int_0^\omega (\omega - x)^{\eta-1} |A^{j-1}u(x) - A^{j-1}\tilde{u}(x)| dx \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(\eta)} \int_0^t (t - x)^{\eta-1} \sup_{0 \leq \omega \leq x} |A^{j-1}u(\omega) - A^{j-1}\tilde{u}(\omega)| dx. \\ &\leq \frac{L^j}{\Gamma(\eta)\Gamma(1 + \eta(j-1))} \int_0^t (t - x)^{\eta-1} x^{\eta(j-1)} \sup_{0 \leq \omega \leq x} |u(\omega) - \tilde{u}(\omega)| dx. \\ &\leq \frac{L^j}{\Gamma(\eta)\Gamma(1 + \eta(j-1))} \sup_{0 \leq \omega \leq t} |u(\omega) - \tilde{u}(\omega)| \int_0^x (t - x)^{\eta-1} x^{\eta(j-1)} dx \\ &= \frac{L^j}{\Gamma(\eta)\Gamma(1 + \eta(j-1))} \|u - \tilde{u}\|_{L_\infty[0, t]} \frac{\Gamma(\eta)\Gamma(1 + \eta(j-1))}{\Gamma(1 + \eta j)} t^{\eta j}. \end{aligned}$$

Como  $t \in [0, h]$ , podemos reformular a estimativa acima em todo o intervalo  $[0, h]$ , obtendo

$$\|A^j u - A^j \tilde{u}\|_\infty \leq \frac{(Lh^\eta)^j}{\Gamma(1 + \eta j)} \|u - \tilde{u}\|_\infty.$$

Agora mostramos que o operador  $A$  cumpre as suposições de Teorema do ponto fixo de Weissinger com  $\alpha_j = (Lh^\eta)^j / \Gamma(1 + \eta j)$ . Para aplicar esse teorema, só precisamos verificar se a série  $\sum_{j=0}^\infty \alpha_j$  converge. Para isso, notamos que  $\sum_{j=0}^\infty \alpha_j$  com  $\alpha_j$  como acima é simplesmente a representação série de potencia da função de Mittag-Leffler  $E_n(Lh^\eta)$ ,

e, portanto, a convergência necessária da série segue imediatamente de Teorema 4.1. Portanto, podemos aplicar o Teorema de Ponto Fixo de Weissinger e deduzir a unicidade da solução da nossa equação diferencial.

Definindo  $\alpha_j = \frac{(Lh^\eta)^j}{\Gamma(1+\eta j)}$  temos que a série  $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$  é a representação em série de potências da função de Mittag-Leffler  $E_\eta(Lh^\eta)$  (ver (DIETHELM, 2010b) para maiores detalhes). Portanto, converge uniformemente. Assim, o operador  $A$  satisfaz as hipóteses do Teorema de Ponto Fixo de Weissinger (HINDERER; RIEDER; STIRGLITZ, 2017) com  $\alpha_j$  definido acima. Logo, existe uma única solução do PVI (2.27).  $\square$

Agora que concluímos a existência e unicidade de uma solução para o PVI, apresentaremos alguns resultados que serão utilizados a seguir nas discussões de dependência contínua dos dados iniciais.

**Teorema 2.5.6.** Seja  $\eta > 0$ ,  $n = \lceil \eta \rceil$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . A solução do problema de valor inicial

$$D_{*0}^\eta u(t) = \lambda u(t), \quad u(0) = u_0, \quad u^{(k)}(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

é dada por

$$u(t) = u_0 E_\eta(\lambda t^\eta), \quad t \geq 0.$$

*Demonstração.* Essa demonstração pode ser encontrada em (DIETHELM, 2010b).  $\square$

### 2.5.3 Dependência contínua das condições iniciais, dos parâmetros e da ordem da derivada

Para concluir a boa colocação do problema apresentaremos a seguir o estudo da dependência contínua dos dados iniciais para o PVI com derivadas de ordem fracionária. A propriedade de dependência contínua dos dados iniciais é de extrema importância para analisarmos o quanto uma pequena perturbação no dado inicial interfere no resultado, isto é, na função que encontramos como solução para o problema. No caso clássico, onde trabalhamos um PVI com equações de ordem inteira essa análise também é feita mas no caso fracionário a relevância fica clara uma vez que sabemos que o problema depende de constantes que no geral não conhecemos tão bem. Note que por exemplo a própria ordem o operador diferencial pode assumir valores com precisão limitada e o que vamos mostrar é que, em todos os casos, pequenas perturbações em qualquer um dos dados rendem pequenas perturbações na solução, o que é um resultado muito bom.

Para tal, assumiremos durante toda esta seção que  $u$  é a única solução do PVI (2.27). Começemos apresentando a seguinte desigualdade.

**Lema 2.5.2.** Sejam  $\eta, T, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+$  e  $\delta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua que satisfaz a seguinte desigualdade

$$|\delta(t)| \leq \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{\Gamma(\eta)} \int_0^t (t-x)^{\eta-1} |\delta(x)| dx,$$

para todo  $t \in [0, T]$ . Então

$$|\delta(t)| \leq \varepsilon_1 E_\eta(\varepsilon_2 t^\eta),$$

para  $t \in [0, T]$ . Onde,  $E_\eta$  denota a função Mittag-Leffler de ordem  $\theta$  definida em (2.8).

*Demonstração.* Sejam  $\varepsilon_3 > 0$  e a função  $\Phi(t) := (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)E_\eta(\varepsilon_2 t^\eta)$ , obtida aplicando o Teorema 2.5.6 e usando a linearidade do problema de valor inicial considerando a função  $\Phi$  a solução do problema de valor inicial

$$D_{*0}^\eta \Phi(t) = \varepsilon_2 \Phi(t),$$

onde  $\Phi(0) = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$  e  $D^k \Phi(0) = 0$  para  $k = 1, 2, \dots, [\eta] - 1$ . Considerando o Lema 2.5.1 podemos deduzir que  $\Phi$  satisfaz a equação

$$\Phi(t) = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_2}{\Gamma(\eta)} \int_0^t (t-x)^{\eta-1} \Phi(x) dx.$$

Pela suposição sobre a função  $\delta$ , descobrimos que  $|\delta(0)| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_1 + \varepsilon_3 = \Phi(0)$ .

Pela continuidade das funções envolvidas podemos deduzir que  $|\delta(t)| < \Phi(t)$  para todo  $t \in [0, \Theta]$  com  $\Theta > 0$ . Para provar que a desigualdade se mantém ao longo de todo o intervalo  $[0, T]$ , denotamos  $t_0$  como o menor número positivo com a propriedade que  $|\delta(t_0)| = \Phi(t_0)$ . Então, para  $0 \leq t \leq t_0$  temos  $|\delta(t)| \leq \Phi(t)$  e portanto,

$$\begin{aligned} |\delta(t_0)| &\leq \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{\Gamma(\theta)} \int_0^{t_0} (t_0-s)^{\theta-1} |\delta(s)| ds \\ &\leq \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{\Gamma(\theta)} \int_0^{t_0} (t_0-s)^{\theta-1} \Phi(s) ds \\ &< \varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_2}{\Gamma(\theta)} \int_0^{t_0} (t_0-s)^{\theta-1} |\Phi(s)| ds \\ &= \Phi(t_0). \end{aligned}$$

Note que a igualdade não pode ser verdade, tendo em conta a escolha de  $t_0$ . Assim, a suposição deve ser falsa. Portanto, descobrimos que na verdade

$$|\delta(t)| < \Phi(t) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)E_\theta(\varepsilon_2 t^\theta),$$

para  $t \in [0, T]$  e  $\varepsilon_3 > 0$ , o que chega no resultado desejado.  $\square$

Mostramos agora o resultado que garante a dependência contínua em relação às condições iniciais.

**Teorema 2.5.7.** Seja  $u$  a solução do PVI (2.27) e  $z$  a solução do seguinte PVI,

$$\begin{aligned} D_{*0}^\eta z(t) &= f(t, z(t)), \\ D^k z(0) &= z_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Se  $\varepsilon := \max_{k=0,1,\dots,\eta-1} |u_0^{(k)} - z_0^{(k)}|$  é suficientemente pequeno, então existe algum  $h > 0$  tal que tanto as funções  $u$  e  $z$  estão bem definidas no intervalo  $[0, h]$ , e

$$\sup_{0 \leq t \leq h} |u(t) - z(t)| = O\left(\max_{\{k=0,1,\dots,n-1\}} |u_0^{(k)} - z_0^{(k)}|\right). \quad (2.39)$$

*Demonstração.* Definindo  $\delta(t) := u(t) - z(t)$ , deduzimos que  $\delta$  é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} D_{*0}^\eta \delta(t) = f(t, u(t)) - f(t, z(t)), \\ D^k \delta(0) = u_0^{(k)} - z_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (2.40)$$

pois o PVI acima satisfaz as hipóteses do Teorema 2.5.3.

Considerando o Lema 2.5.1, o problema de valor inicial é equivalente à equação

$$\delta(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} (u_0^{(k)} - z_0^{(k)}) + \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_0^t (t-x)^{\eta-1} (f(x, u(x)) - f(x, z(x))) dx.$$

Usando desigualdade de Hölder e a condição de Lipschitz de  $f$ , encontramos que:

$$\delta(t) \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^k}{k!} + \frac{L}{\Gamma(\eta)} \int_0^t (t-x)^{\eta-1} |\delta(x)| dx,$$

onde  $L$  é a constante de Lipschitz. Pelo Lema 2.5.2, obtemos:

$$|\delta(t)| \leq O(\varepsilon) E_\eta(Lh^\eta) = O(\varepsilon)$$

como o desejado. □

Agora, mostraremos o teorema que garante dependência contínua em relação aos parâmetros do modelo estudado.

**Teorema 2.5.8.** Seja  $u$  a solução do PVI (2.27) e  $z$  a solução do seguinte PVI

$$\begin{aligned} D_{*0}^\eta z(t) &= \tilde{f}(t, z(t)), \\ D^k z(0) &= z_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde  $\tilde{f}$  deve satisfazer as mesmas hipóteses de  $f$  e

$$\varepsilon := \max_{(t_1, t_2) \in G} |f(t_1, t_2) - \tilde{f}(t_1, t_2)|.$$

Se  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno, então existe  $h > 0$  tal que tanto as funções  $u$  e  $z$  estão bem definidas em  $[0, h]$  e

$$\sup_{0 \leq t \leq h} |u(t) - z(t)| = O\left(\max_{(t_1, t_2) \in G} |f(t_1, t_2) - \tilde{f}(t_1, t_2)|\right). \quad (2.42)$$

*Demonstração.* Definindo primeiramente  $\delta(t) := u(t) - z(t)$ , onde  $\delta$  é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} D_{*0}^{\eta} \delta(t) = f(t, u(t)) - \tilde{f}(t, z(t)), \\ D^k \delta(0) = 0, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.43)$$

Isso é equivalente à equação

$$\delta(t) = \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_0^t (t-x)^{\eta-1} (f(x, u(x)) - \tilde{f}(x, z(x))) dx.$$

Usando a hipótese de Lipschitz continuidade de  $f$  e  $\tilde{f}$ , podemos deduzir que

$$\begin{aligned} |\delta(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-x)^{\eta-1}}{\Gamma(\eta)} (|f(x, u(x)) - f(x, z(x))| + |f(x, z(x)) - \tilde{f}(x, z(x))|) dx \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_0^t (t-x)^{\eta-1} |\delta(x)| dx + \varepsilon \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_0^t (t-x)^{\eta-1} dx \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(\eta)} \int_0^t (t-x)^{\eta-1} |\delta(x)| dx + \varepsilon \frac{h^{\eta}}{\Gamma(\eta+1)}. \end{aligned}$$

Podemos agora aplicar o Lema 2.5.2 para encontrarmos novamente

$$|\delta(t)| \leq O(\varepsilon) E_{\eta}(Lh^{\eta}) = O(\varepsilon).$$

□

Por último, discutimos um resultado que garanta a dependência contínua em relação à ordem dos operadores fracionários, tal resultado é necessário para trabalhar com operadores deste tipo.

**Teorema 2.5.9.** Seja  $u$  a solução do PVI (2.27) e  $z$  a solução do seguinte PVI,

$$\begin{aligned} D_{*0}^{\tilde{\eta}} z(t) &= f(t, z(t)), \\ D^k z(0) &= u_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \tilde{n} - 1 \end{aligned} \quad (2.44)$$

onde  $\tilde{\eta} > \eta$ ,  $\tilde{n} := \lceil \tilde{\eta} \rceil$ ,  $\varepsilon := \tilde{\eta} - \eta$  e

$$\varepsilon^* := \begin{cases} 0, & \text{se } n = \tilde{n}, \\ \max \left\{ |u_0^{(k)}| : n \leq k \leq \tilde{n} - 1 \right\} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se  $\varepsilon$  e  $\varepsilon^*$  são suficientemente pequenos, então existe  $h > 0$  tal que, tanto  $z$  como  $u$  são funções definidas em  $[0, h]$  e

$$\sup_{0 \leq t \leq h} |u(t) - z(t)| = O(\tilde{\eta} - \eta) + O \max \left\{ 0, \max \left\{ |u_0^{(k)}| : \eta \leq k \leq \tilde{\eta} - 1 \right\} \right\}. \quad (2.45)$$

*Demonstração.* Seja

$$\begin{aligned}
 \delta(t) &:= u(t) - z(t) \\
 &= -\sum_{k=n}^{\tilde{n}-1} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_0^t (t-x)^{\eta-1} f(x, u(x)) dx \\
 &\quad - \frac{1}{\Gamma(\tilde{\eta})} \int_0^t (t-x)^{\tilde{\eta}-1} f(x, z(x)) dx \\
 &= -\sum_{k=n}^{\tilde{n}-1} \frac{t^k}{k!} u_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_0^t (t-x)^{\eta-1} (f(x, u(x)) - f(x, z(x))) dx \\
 &\quad + \int_0^t \left( \frac{(t-x)^{\eta-1}}{\Gamma(\eta)} - \frac{(t-x)^{\tilde{\eta}-1}}{\Gamma(\tilde{\eta})} \right) f(x, z(x)) dx.
 \end{aligned}$$

Usando a hipótese de Lipschitz continuidade de  $f$ , podemos deduzir que

$$\begin{aligned}
 |\delta(t)| &\leq \sum_{k=n}^{\tilde{n}-1} \frac{h^k}{k!} |u_0^{(k)}| + \frac{L}{\Gamma(\eta)} \int_0^t (t-x)^{\eta-1} |\delta(x)| dx \\
 &\quad + \max_{(t_1, t_2) \in G} |f(t_1, t_2) - \tilde{f}(t_1, t_2)| \int_0^t \left| \frac{(t-x)^{\eta-1}}{\Gamma(\eta)} - \frac{(t-x)^{\tilde{\eta}-1}}{\Gamma(\tilde{\eta})} \right| dx
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Obviamente a soma é  $O(\varepsilon^*)$ . Logo,

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \left| \frac{(t-x)^{\eta-1}}{\Gamma(\eta)} - \frac{(t-x)^{\tilde{\eta}-1}}{\Gamma(\tilde{\eta})} \right| dx &= \int_0^t \left| \frac{v^{\eta-1}}{\Gamma(\eta)} - \frac{v^{\tilde{\eta}-1}}{\Gamma(\tilde{\eta})} \right| dx \\
 &\leq \int_0^h \left| \frac{v^{\eta-1}}{\Gamma(\eta)} - \frac{v^{\tilde{\eta}-1}}{\Gamma(\tilde{\eta})} \right| dx \\
 &= O(\varepsilon).
 \end{aligned}$$

Podemos calcular a integral explicitamente, toda via, primeiro temos que achar o zero da integração que está localizado em  $\left(\frac{\Gamma(\tilde{\eta})}{\Gamma(\eta)}\right)^{\frac{1}{\tilde{\eta}-\eta}}$  (uma quantidade que converge para  $\exp(\psi(\eta))$  e  $\tilde{\eta} \rightarrow \eta$  onde  $\psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ ). Se  $h$  é menor do que esse valor, então o integrando não tem nenhuma mudança de sinal. Caso contrário devemos dividir o intervalo de integração neste ponto. Em qualquer caso, podemos dizer que a expressão resultante é delimitada por  $O(\tilde{\eta} - \eta) = O(\varepsilon)$ . Então

$$|\delta(t)| \leq O(\varepsilon) + O(\varepsilon^*) + \frac{L}{\Gamma(\eta)} \int_0^t (t-x)^{\eta-1} |\delta(x)| dx,$$

se utilizarmos o Lema 2.5.2 produzindo o resultado desejado.  $\square$

**Corolário 2.5.1.** Assumindo as hipóteses do Teorema 2.5.9 e  $\tilde{n} = n$ , então

$$\sup_{0 \leq t \leq h} |u(t) - z(t)| = O(\tilde{\eta} - \eta)$$

**Corolário 2.5.2.** Assumindo as hipóteses do Teorema 2.5.9 e sejam  $\tilde{n} > n$  e  $u_0^{(k)} = 0$  para  $k = n, n+1, \dots, \tilde{n}-1$  então

$$\sup_{0 \leq t \leq h} |u(t) - z(t)| = O(\tilde{n} - n).$$

Todos estes resultados a respeito de dependência contínua foram encontrados em (DIETHELM, 2010b)[Seção 6.3]

## 2.6 Uma Associação Entre Derivadas de Ordem Fracionária e Memória

Nesta seção faremos algumas observações a respeito das derivadas de ordem fracionária que servem como motivação para utilizá-las para descrever efeitos de memória.

**Observação 2.6.1.** Olhando para a equação (2.34) para algum  $\eta \in (0, 1]$  e para dois valores diferentes de  $t$ , digamos  $t_1$  e  $t_2$  com  $t_1 < t_2$ . Subtraindo a segunda destas equações pela primeira, obtemos que:

$$\begin{aligned}
 u(t_2) - u(t_1) &= \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_0^{t_2} (t_2 - x)^{\eta-1} f(x, u(x)) dx \\
 &\quad - \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_0^{t_1} (t_1 - x)^{\eta-1} f(x, u(x)) dx \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_0^{t_1} [(t_2 - x)^{\eta-1} - (t_1 - x)^{\eta-1}] f(x, u(x)) dx \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - x)^{\eta-1} f(x, u(x)) dx.
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Consideremos primeiramente o caso (não fracionário), isto é  $\eta = 1$ . Analisando o lado direito da equação (2.47) vemos que a primeira integral é nula uma vez que o termo entre colchetes é nulo, portanto, fica nítido que se conhecemos a solução  $u(t_1)$  do PVI, então encontramos a solução no ponto  $t_2 > t_1$  conhecendo apenas  $u(t_1)$  e a função  $f$ . Qualquer informação sobre  $u(t)$  para  $t \in [0, t_1)$  é desnecessária. Esta observação é uma das formas de ver a localidade da derivada inteira. Com isso podemos afirmar que observar o estado de um sistema de primeira ordem em um dado momento é suficiente para conhecer seu comportamento no futuro.

Note que a situação é essencialmente diferente quando analisamos o caso não inteiro  $0 < \eta < 1$ . Agora a primeira integral do lado direito da equação (2.47) não desaparece. Logo, sempre que se quer calcular a solução  $u(t_2)$ , em algum momento  $t_2$ , é necessário considerar o que acontece no ponto inicial 0 e levar em conta toda a informação até o ponto de interesse  $t_2$ . Isso reflete a não localidade dos operadores diferenciais segundo Caputo. Quando são utilizados na modelagem de um fenômenos reais, essa característica descreve um sistemas com memória.

Uma consequência do que foi afirmado na observação acima, é que a equação (2.47) tem grande impacto sobre a base teórica dos métodos numéricos para equações diferenciais fracionárias. O método padrão geralmente funciona corretamente mas, muitas vezes, não faz uso de todo o poder desta equação, pois o mesmo termo entre parênteses no lado direito da equação (2.47) não é nulo, ele vai ser muito pequeno em magnitude para determinadas situações, por exemplo, se  $t_1$  e  $t_2$  são suficientemente grandes em comparação com  $(t_2 - t_1)$ .

## 2.7 Boa Colocação para PVI's com Derivadas Fracionária de Múltiplas Ordens

Na aplicação que temos interesse no Capítulo 3 e em muitas outra o problema de interesse se traduz em um sistema de equações diferenciais de ordem fracionária do tipo

$$\begin{aligned} D_*^{\theta_1}(u_1(t)) &= f_1(t, u_1(t), \dots, u_k(t)) \\ &\vdots \\ D_*^{\theta_j}(u_j(t)) &= f_j(t, u_1(t), \dots, u_k(t)) \\ u_j(0) &= u_{j,0} \quad (j = 1, 2, \dots, k) \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde a ordem das derivadas é dada por  $0 < \theta_j \leq 1$ , com  $j = 1, \dots, k$ . Neste caso os  $\theta_j$  não são necessariamente iguais. Ao sistema (2.48) com  $0 < \theta_j \leq 1$ , com  $j = 1, \dots, k$  chamamos de **PVI com derivadas fracionária de múltiplas ordens**.

Os resultados de boa colocação para o problema (2.48) segue dos seguintes resultados.

**Teorema 2.7.1.** Seja  $0 < \theta_j$  para  $j = 1, 2, \dots, k$ . Considere o PVI dado pelo sistema diferencial fracionário multi-ordem (2.48). Temos que (2.48) é equivalente a

$$\begin{aligned} D_*^{\theta_j}(u_j(t)) &= f_j(t, u_1(t), \dots, u_k(t)), \quad (j = 1, 2, \dots, k), \\ u_j^l(0) &= u_{j,0}^l \quad (l = 0, 1, \dots, [\theta_j] - 1) \quad (j = 1, 2, \dots, k) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Se as funções  $f_j : [0, T] \times \mathbb{R}^k \Rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , são contínuas e satisfazem as condições de Lipschitz em relação a todos os seus argumentos, exceto o primeiro. Então, o PVI tem uma única solução que é continuamente dependente das condições iniciais, dos parâmetros e da ordem da derivada.

*Demonstração.* A equivalência entre (2.48) e (2.49) segue diretamente.

O problema de valor inicial (2.49), é equivalente ao sistema de equações de Volterra

$$u_j(t) = \sum_{l=0}^{[\theta_j]-1} u_j^l \frac{t^l}{l!} + \frac{1}{\Gamma(\theta_j)} \int_0^t (t-s)^{\theta_j-1} f_j(s, u_1(s), \dots, u_k(s)) ds. \quad (2.50)$$

$j = 1, 2, \dots, k$ .

Defina  $\theta = \min_j \theta_j$ . Note que (2.50) pode ser reescrito na forma

$$u_j(t) = \sum_{l=0}^{[\theta_j]-1} u_j^l \frac{t^l}{l!} + \frac{1}{\Gamma(\theta_j)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} \hat{f}_j(s, u_1(s), \dots, u_k(s)) ds. \quad (2.51)$$

para  $j = 1, 2, \dots, k$ , onde,

$$\hat{f}_j(s, u_1, \dots, u_k) := \frac{\Gamma(\theta)}{\Gamma(\theta_j)} (t-s)^{\theta_j-\theta} f_j(s, u_1, \dots, u_k) \quad (2.52)$$

Fazendo uso de uma notação vetorial  $U := (u_1, \dots, u_k)^T$ ,  $\widehat{F} := (\widehat{f}_1, \dots, \widehat{f}_k)^T$ , (3.9) pode ser escrita da forma

$$U(t) = \sum_{l=0}^{\max_j [\theta_j] - 1} U_0^l \frac{t^l}{l!} + \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} \widehat{F}_j(s, U(s)) ds. \quad (2.53)$$

Como  $f_j : [0, T] \times \mathbb{R}^k \Rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  e o fato de que  $\theta_j \geq \theta$  para todos  $j$ , implicam que todas as funções  $\widehat{f}_j$  são contínuas e satisfazem as condições de Lipschitz com respeito a  $u_1, \dots, u_k$ . Assim,  $\widehat{F}_j$  é contínua e satisfaz uma condição de Lipschitz em relação a  $U = (u_1, \dots, u_k)^T$ .

Portanto, o resultado segue agora com os mesmos argumentos apresentados nos Teoremas 2.5.3 (garantindo a existência), 2.5.5 (garantindo a unicidade) e Teoremas 2.5.7-2.5.8 e 2.5.9 garantindo a dependência contínua dos dados iniciais, dos parâmetros e das ordens das derivadas.  $\square$

## 3 Modelo Compartimental SIRC Fracionário para Duas Populações que Interagem

Neste Capítulo propomos e analisaremos resultados de boa colocação para o modelo compartimental SIRC fracionário, para duas populações interagindo. No Capítulo 4 apresentaremos a simulação numérica de diversos cenários distintos.

### 3.1 SIRC Fracionário com Duas Populações Interagindo

Nosso problema aborda duas populações distintas  $j = 1, 2$ , cada uma com seu conjunto de compartimentos  $S_j, I_j, R_j$  e  $C_j$ , como descritos no Capítulo 1, com  $N_j(t) = S_j(t) + I_j(t) + R_j(t) + C_j(t)$ . Entretanto, como há interação entre as populações não podemos trabalhar com o modelo SIRC tradicional apresentado no Capítulo 1.

Para levar em conta tal interação, assumiremos que uma porção dos suscetíveis, da primeira população, que entra em contato com os infectados, da segunda população, deixam de ser suscetivos e tornam-se infectados. Em outras palavras, haverá uma variação da taxa de indivíduos saindo do compartimento  $S_1(t)$  em direção à  $I_1(t)$  que assumiremos ser proporcional a  $\beta_{12}S_1(t)I_2(t)$ .

De forma análoga, assumiremos que os suscetíveis da segunda população interagem com os infectados da primeira população uma vez que os infectados da segunda população ( $I_2(t)$ ) podem vir a levar suscetíveis da primeira população ( $S_1(t)$ ) a serem infectados. Modelaremos este compartimento pelo termo  $\beta_{21}S_2(t)I_1(t)$ .

Por fim, assumiremos que ambas as populações possuam compartimentos com memórias distintas, descritas pelas derivadas de ordem fracionária de Caputo (como introduzidas no Capítulo 2, de forma que a dinâmica entre os compartimentos das duas populações seja modelado pelo sistema acoplado

$$\begin{aligned}
 D^{\theta_1} S_1(t) &= \mu_1(N_1 - S_1(t)) - \beta_{11}S_1(t)I_1(t) - \beta_{12}S_1(t)I_2(t) + \gamma_1 C_1(t) \\
 D^{\theta_1} I_1(t) &= \beta_{11}S_1(t)I_1(t) + \beta_{12}S_1(t)I_2(t) + \sigma_1\beta_{11}C_1(t)I_1(t) - (\mu_1 + \alpha_1)I_1(t) \\
 D^{\theta_1} R_1(t) &= (1 - \sigma_1)\beta_{11}C_1(t)I_1(t) + \alpha_1 I_1(t) - (\mu_1 + \delta_1)R_1(t) \\
 D^{\theta_1} C_1(t) &= \delta_1 R_1(t) - \beta_{11}C_1(t)I_1(t) - (\mu_1 + \gamma_1)C_1(t)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
D^{\theta_2} S_2(t) &= \mu_2(N_2 - S_2(t)) - \beta_{22}S_2(t)I_2(t) - \beta_{21}S_2(t)I_1(t) + \gamma_2C_2(t) \\
D^{\theta_2} I_2(t) &= \beta_{22}S_2(t)I_2(t) + \beta_{21}S_2(t)I_1(t) + \sigma_2\beta_{22}C_2(t)I_2(t) - (\mu_2 + \alpha_2)I_2(t) \\
D^{\theta_2} R_2(t) &= (1 - \sigma_2)\beta_{22}C_2(t)I_2(t) + \alpha_2I_2(t) - (\mu_2 + \delta_2)R_2(t) \\
D^{\theta_2} C_2(t) &= \delta_2R_2(t) - \beta_{22}C_2(t)I_2(t) - (\mu_2 + \gamma_2)C_2(t),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

onde  $\theta_j \in ]0, 1]$ , para  $j = 1, 2$ , respectivamente.

Os parâmetros  $\mu_j$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\gamma_j$ ,  $\sigma_j$ ,  $\alpha_j$  e  $\delta_j$  no modelo (3.1)-(3.2) são relacionadas de acordo com seus significados epidemiológicos de forma análoga a que foi proposta em (CASAGRANDI et al., 2006) e descritos de maneira sucinta no Capítulo 1, para  $i, j = 1, 2$ , respectivamente.

Por fim, a dinâmica (3.1)-(3.2) é considerado com condições iniciais

$$S_j(0) \geq 0, I_j(0) \geq 0, R_j(0) \geq 0, C_j(0) \geq 0, \quad j = 1, 2, \tag{3.3}$$

respectivamente. Ao modelo (3.1)-(3.2) com condições iniciais (3.3), chamaremos de modelo SIRC-Fracionário com duas populações interagindo (MP-FSIRC).

## 3.2 Boa Colocação para o Modelo MP-FSIRC

Nesta seção, provaremos resultados de boa colocação para o modelo MP-FSIRC (3.1)-(3.2), com condições iniciais (3.3). Em outras palavras, provaremos a existência de uma única solução  $X(t) := (S_1(t), I_1(t), R_1(t), C_1(t), S_2(t), I_2(t), R_2(t), C_2(t))^T$ , que satisfaz (3.1)-(3.2) com condições iniciais (3.3). Provaremos ainda que  $X(t)$  como acima depende continuamente das condições iniciais (3.3), dos parâmetros e das ordens das derivadas  $\theta_j \in ]0, 1]$ , para  $j = 1, 2$ , respectivamente.

No que segue, assumiremos as seguintes hipóteses gerais: Cada coordenada de  $X(t)$  é composta por uma função contínua, para qualquer  $t \geq 0$ .

Antes de provarmos os resultados anunciados acima, vamos apresentar alguns resultados preliminares que servirão de auxílio no que segue.

O seguinte lema é de extrema importância para entendermos o motivo de usar o operador diferencial de Caputo.

**Lema 3.2.1.** Assuma as hipóteses gerais deste trabalho. Seja  $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ , onde  $N_1(t)$  e  $N_2(t)$  são a população total de cada uma das populações, 1 e 2, respectivamente. Então  $N(t)$  é constante para todo  $t \geq 0$ .

*Demonstração.* Segue da linearidade da derivada de ordem fracionária que  $D^{\theta_j} N_j(t) = D^{\theta_j} S_j(t) + D^{\theta_j} I_j(t) + D^{\theta_j} R_j(t) + D^{\theta_j} C_j(t)$ , para qualquer que seja  $j = 1, 2$ . Somando os

lados direitos de (3.1) e (3.2), obtemos, respectivamente, que  $D^{\theta_j} N_j(t) = 0$ , para qualquer que seja  $j = 1, 2$ . Portanto, segue que tanto  $N_1(t)$  quanto  $N_2(t)$  são constantes. Isso é o suficiente para mostrar que  $N(t)$  é constante.  $\square$

**Lema 3.2.2.** Assuma as hipóteses gerais deste trabalho. Se existir uma solução  $X(t)$  para o problema (3.1)-(3.2) com condições iniciais (3.3), então tal solução é uniformemente limitada por  $N(0)$ . Em particular, cada uma das coordenadas de  $X(t)$  será uniformemente limitada.

*Demonstração.* De fato, como todas as normas são equivalentes em  $\mathbb{R}^n$ , isto é, existe  $C > 0$  tal que  $\|\cdot\| \leq C\|\cdot\|$  ((GUIDORIZZI, 2012)) temos que

$$\|X(t)\|_1 \leq C\|N(t)\|_1 = C\|N(0)\|$$

qualquer que seja  $t \geq 0$ , onde a última identidade segue graças ao Lema 3.2.1, mostrando a limitação uniforme de  $\|X(t)\|$ . Em particular,  $\|N_j(t)\| \leq \|N(t)\|$ . O que conclui as afirmativas do lema.  $\square$

Consideremos a aplicação  $F : [0, \infty) \times \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8$  dada por

$$F(t, X(t)) := \begin{bmatrix} F_1(t, X(t)) \\ 0_{4x1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{4x1} \\ F_2(t, X(t)) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

onde  $0_{4x1} = (0, 0, 0, 0)^T$  e  $F_j : [0, \infty) \times \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^4$  são, os lados direitos de (3.1) e (3.2), para  $j = 1, 2$ , respectivamente.

O próximo resultado é fundamental para a obtenção dos objetivos desta seção. Antes disso apresentamos o Teorema do Valor Intermediário.

**Teorema 3.2.1.** (Teorema do Valor Intermediário) Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $]a, b[$ , então existirá pelo menos um  $c$  em  $]a, b[$  tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

*Demonstração.* A prova deste teorema pode ser encontrada em (GUIDORIZZI, 2012), por exemplo.  $\square$

**Proposição 3.2.1.** Assuma as hipóteses gerais deste trabalho. Então a aplicação  $F(t, X(t))$  satisfaz:

- i)  $F(t, X(t))$  é contínua com relação a  $t$ , para todo  $t \geq 0$ ;
- ii) Existem constantes  $w_1$  e  $w_2$  tais que  $\|F(t, X(t))\| \leq w_1 + w_2\|X(t)\|$ .

iii) Existe uma constante  $L$  (independente de  $X(t), \tilde{X}(t)$ ), tal que

$$\|F(t, X(t)) - F(t, \tilde{X}(t))\| \leq L\|X(t) - \tilde{X}(t)\|, \quad (3.5)$$

isto é,  $F$  é Lipschitz contínua com relação a segunda variável.

*Demonstração.* O item i) segue do fato de que, por hipótese, cada coordenada de  $F(t, X(t))$  é formada pela soma e produto de funções contínuas.

Note que, (usando as estimativas do Lema 3.2.2) para a primeira coordenada de  $F(t, X(t))$  temos que

$$\begin{aligned} & \mu_1(N_1(t) - S_1(t)) - \beta_{11}S_1(t)I_1(t) - \beta_{12}S_1(t)I_2(t) + \gamma_1C_1(t) \\ & \leq \mu_1(|N_1(t)| + |S_1(t)|) + \beta_{11}|S_1(t)||I_1(t)| + \beta_{12}|S_1(t)||I_2(t)| + \gamma_1|C_1(t)| \\ & \leq \mu_1N(0) + \mu_1|S_1(t)| + \beta_{11}N(0)|I_1(t)| + \beta_{12}N(0)|I_2(t)| + \gamma_1|C_1(t)| \\ & \leq \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2\|X(t)\| \end{aligned}$$

onde  $\tilde{w}_1 = \mu_1N(0)$  e  $\tilde{w}_2 = \max\{\mu_1, \beta_{11}N(0), \beta_{12}N(0), \gamma_1, 1\}$ .

Repetindo o argumento acima de forma similar, coordenada a coordenada, chegamos a conclusão de que o item ii) é verdadeiro.

Para verificar o item iii), utilizamos o Teorema do Valor Intermediário (3.2.1), o qual garante que existe  $\nu \in [0, 1]$  tal que

$$F(t, X(t)) - F(t, \tilde{X}(t)) = JF(t, X(t) + \nu\tilde{X}(t))(X(t) - \tilde{X}(t)) \quad (3.6)$$

onde  $JF(t, \cdot)$  é a Jacobiana da aplicação  $F(t, \cdot)$ . Como

$$JF(t, X(t)) := \begin{bmatrix} JF_1(t, X(t)) \\ 0_{4 \times 8} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{4 \times 8} \\ JF_2(t, X(t)) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

onde  $0_{4 \times 8}$  é a matriz quadrada identicamente nula de ordem  $4 \times 8$  e, (somente para as coordenadas não nulas de  $F_1$ ) temos que

$$JF_1(t, X(t)) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \gamma_1 & 0 & a_{16} & 0 & 0 \\ -a_{11} + \mu_1 & a_{22} & 0 & \sigma_1\beta_{11}I_1 & 0 & \beta_{12}S_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & -(\mu_1 + \delta_1) & (1 - \sigma_1)\beta_{11}I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{11}C_1 & \delta_1 & -\beta_{11}I_1 - (\mu_1 + \gamma_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $a_{11} = -\mu_1 - \beta_{11}I_1 - \beta_{12}I_2$ ,  $a_{12} = -\beta_{11}I_1$ ,  $a_{16} = -\beta_{12}S_1$ ,  $a_{22} = \beta_{11}S_1 + \sigma_1\beta_{11}C_1 - (\mu_1 + \alpha_1)$ ,  $a_{32} = (1 - \sigma_1)\beta_{11}C_1 + \alpha_1$  e, de maneira análoga (somente para as coordenadas não nulas de  $F_2$ )

$$JF_2(t, X(t)) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & \gamma_2 & 0 & b_{16} & 0 & 0 \\ -b_{11} + \mu_2 & b_{22} & 0 & \sigma_2\beta_{22}I_2 & 0 & \beta_{21}S_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & -(\mu_2 + \delta_2) & (1 - \sigma_2)\beta_{22}I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{22}C_2 & \delta_2 & -\beta_{22}I_2 - (\mu_2 + \gamma_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $b_{11} = -\mu_2 - \beta_{22}I_2 - \beta_{22}I_1$ ,  $b_{12} = -\beta_{22}I_2$ ,  $b_{16} = -\beta_{21}S_2$ ,  $b_{22} = \beta_{22}S_2 + \sigma_2\beta_{22}C_2 - (\mu_2 + \alpha_2)$ ,  $b_{32} = (1 - \sigma_2)\beta_{22}C_2 + \alpha_2$  segue do Lema (3.2.2) que cada coordenada de  $JF(t, X(t))$  é uniformemente limitada. Portanto, existe uma constante  $L$  (independente de  $t$  e  $X(t)$ ) tal que  $\|JF(t, X(t))\| \leq L$ .

Deste fato e de (3.6), temos que

$$\|F(t, X(t)) - F(t, \tilde{X}(t))\| \leq \|JF(t, X(t) + \nu\tilde{X}(t))\| \|X(t) - \tilde{X}(t)\| \leq L\|X(t) - \tilde{X}(t)\|$$

o que conclui a demonstração.  $\square$

Os resultados acima são auxiliares para o resultado de boa colocação que segue.

**Teorema 3.2.2.** Assuma as hipóteses gerais deste trabalho satisfeitas. Então:

- i) [Existência e Unicidade] Existe uma única função  $X(t)$ , contínua para todo  $t \in [0, \infty)$  solução de (3.1)-(3.2), condições iniciais (3.3).
- ii) [Dependência Contínua] A solução  $X(t)$  de (3.1)-(3.2), depende continuamente dos dados iniciais (3.3), dos parâmetros do modelo e das ordens das derivadas  $\theta_j \in ]0, 1]$ , para  $j = 1, 2$ , respectivamente.

*Demonstração.* Integrando de ordem fracionária  $\theta_1$  e  $\theta_2$  de ambos os lados de (3.1) e (3.2), respectivamente e utilizando os argumentos do Lema 2.5.1, obtemos que o problema (3.1)-(3.2) com condições iniciais (3.3) é equivalente ao sistema de equações de Volterra

$$x_j(t) = \sum_{l=1}^8 x_j(0) \frac{t^l}{l!} + \frac{1}{\Gamma(\theta_j)} \int_0^t (t-s)^{\theta_j-1} f_j(s, x_1(s), \dots, x_8(s)) ds. \quad (3.8)$$

onde  $f_j$  e  $x_j$  representam a  $j$ -ésima coordenada dos vetores  $F(t, X(t))$  com

$$X(t) = (S_1(t), I_1(t), R_1(t), C_1(t), S_2(t), I_2(t), R_2(t), C_2(t))^T$$

e  $\theta_j = \theta_1$ , para  $j = 1, \dots, 4$  e  $\theta_j = \theta_2$ , para  $j = 5, \dots, 8$ .  $j = 1, 2, \dots, k$ .

Defina  $\theta = \min_{j=1,2} \theta_j$ . Então (3.8) pode ser reescrita como

$$x_j(t) = \sum_{l=1}^7 x_j(0) \frac{t^l}{l!} + \frac{1}{\Gamma(\theta_j)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} \hat{f}_j(s, x_1(s), \dots, x_8(s)) ds. \quad (3.9)$$

para  $j = 1, 2, \dots, 8$ , onde,

$$\hat{f}_j(s, x_1, \dots, x_8) := \frac{\Gamma(\theta)}{\Gamma(\theta_j)} (t-s)^{\theta_j-\theta} f_j(s, x_1, \dots, x_8). \quad (3.10)$$

Apresentando a notação vetorial  $X(t)$  e  $\hat{F} := (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_8)^T$  e uma expressão correspondente para os valores iniciais, podemos combinar essas 8 equações escalares (3.9) em uma equação vetorial, da forma

$$X(t) = \sum_{l=1}^8 X(0) \frac{t^l}{l!} + \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} \hat{F}_j(s, X(s)) ds. \quad (3.11)$$

Segue da Proposição 3.2.1-i)-iii) que  $F(t, X(t))$  é contínua com relação a  $t$  e Lipschitz contínua com relação a segunda variável. Portanto  $\widehat{F}(t, X(t))$  também é contínua com relação a  $t$  e Lipschitz contínua com relação a segunda variável. Logo, os mesmos argumentos de ponto fixo utilizado no Teorema 2.5.3 pode ser invocado para garantir a existência de uma única solução contínua para o problema (3.1)-(3.2), com condições iniciais (3.3), num intervalo  $[0, T^*]$  para algum  $T^* > 0$ . Para mostrar que a solução  $X(t)$  pode ser estendida de maneira única a toda semirreta positiva, primeiro observe que a matriz Jacobiana  $JF(t, X(t))$  é contínua, como provado nas entrelinhas da Proposição 3.2.1. Além disso, segue da Proposição 3.2.1-ii) que  $F$  cresce no máximo linearmente. Portanto, todas as hipóteses do Teorema 3.1 em (LIN, 2007) são satisfeitas. Isso conclui o item i) do Teorema.

O item ii) segue diretamente da observação de que as hipóteses do Teorema 2.5.9 são satisfeitas, tendo em vista as propriedades de Proposição 3.2.1.

□

## 4 Simulações Numéricas

Neste capítulo apresentaremos algumas simulações de cenários do modelo (3.1)-(3.2), cujos parâmetros e ordens das derivadas não foram calibrados a partir de dados reais, por conta disso também não utilizaremos uma unidade de tempo específica. Em outras palavras, as simulações podem não representar nenhum cenário real, mas servem para descrever algumas das possíveis características das dinâmicas das populações envolvidas.

Em todas as simulações que apresentaremos nas seções que seguem, as aproximações numéricas das soluções do modelo (3.1)-(3.2) foram obtidos adaptando o algoritmo proposto em (GARRAPPA, 2015; GARRAPPA, 2018). Tal algoritmo utiliza um método de quadraturas para a convolução com base no método de Runge–Kutta (ASCHER; PETZOLD, 1998). A análise de estabilidade e convergência do método pode ser consultada em (GARRAPPA, 2015).

Analisaremos abaixo três cenários, de forma mais específica. Na Seção 4.1 analisaremos o caso em que as duas populações são simétricas. Em outras palavras, simularemos o caso em que as duas populações são iguais, cujos parâmetros do modelo (3.1)-(3.2) são os mesmos. O que difere, eventualmente, é a ordem da derivada em cada uma das populações. Na Seção 4.2 simularemos dois casos em que há uma população relativamente maior que a outras (com taxas de infecção distintas, dado o tamanho da população). Apresentaremos as conclusões relativas aos casos em que a infecção inicia na população com mais indivíduos e também um caso hipotético de a doença começar na população com menos indivíduos.

Em todos os cenários analisados, as ordens das derivadas  $\theta_1, \theta_2$  são escolhidas como combinações (não todas as possíveis) dos valores  $\{1, 0.8, 0.6\}$ , conforme descrito nos respectivos gráficos.

### 4.1 Duas Populações Igualmente Simétricas

Nesta seção analisaremos numericamente distintos cenários para a escolha das derivadas de ordem fracionária  $\theta_1, \theta_2 \in \{1, 0.8, 0.6\}$ , em duas populações perfeitamente simétricas, no sentido que os parâmetros do modelo (3.1)-(3.2) são tais que:

- Populações 1 e 2 são tais que  $N_1 = N_2 = 1$ ;
- Taxas de natalidade/mortalidade  $\mu_1 = \mu_2 = 0.0001$ ;
- Taxa de infecção interna de cada população  $\beta_{11} = \beta_{22} = 0.5$ ;

- Taxa de infecção pela interação das populações  $\beta_{12} = \beta_{22} = \beta_{11}/100$ ;
- $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.1$ ;
- $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$ ;
- $\delta_1 = \delta_2 = 0.2$ ;

Como as duas populações são simétricas, as simulações foram feitas com a escolha das condições iniciais  $X(0) = (0.9, 0.1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$ , indicando que a infecção pela doença, no tempo inicial  $t = 0$  se concentra somente na população 1, e afeta 10% desta população, enquanto a população 2 está livre de doença neste estágio (no momento  $t = 0$ ).

As Figuras 2 mostram a dinâmica das subpopulações<sup>1</sup> entre os compartimentos do modelo MF-SIRC para a População 1, para distintas escolhas das ordens das derivadas  $\theta_1, \theta_2 \in \{1, 0.8, 0.6\}$ .

É possível observar pela Figura 2 que, dentre os cenários simulados para os Suscetíveis da População 1, temos que estes decaem mais rapidamente, pelo menos no início da transmissão, para as ordens das derivadas  $\theta_1 = \theta_2 = 1$  (gráfico em azul), o qual é praticamente coincidente com a escolha das ordens das derivadas  $\theta_1 = 1$  e  $\theta_2 = 0.8$  (gráfico em verde), em comparação com os demais, para os quais  $\theta_1 < 1$ . Esse cenário se reflete nos Infectados (Infecciosos)  $I_1$ , Recuperados (Removidos)  $R_1$ , Imunidade cruzada  $C_1$ , relativos a população 1, conforme pode ser visto nos cenários apresentados nas Figuras 2, respectivamente. Isso sugere que a memória imunológica menor  $\theta_1 = 1$  interfere negativamente na dinâmica da população 1, quando comparada com os outros cenários ( $\theta_1 \leq 0.8$ ). Em particular, vale destacar que o pico da infecção da população acontece antes para os cenários em que  $\theta_1 = 1$  e alcança praticamente 60% da população, enquanto fica abaixo dos 55% quando  $\theta_1 \leq 0.8$  e não passa de 50% para o cenário em que  $\theta_1 = 0.8$  e  $\theta_2 = 0.6$ . Este último cenário ( com  $\theta_1 = 0.8$  e  $\theta_2 = 0.6$ ) também é o mais favorável em termos de ter a menor propensão a uma reinfecção, como mostra a Figura 2 relativa a subpopulação com imunidade cruzada  $C_1(t)$ .

As Figuras 3 mostram a dinâmica das subpopulações<sup>2</sup> de Suscetíveis, Infectados (Infecciosos), Recuperados (Removidos) e Imunidade Cruzada (Cross-ímmunes) da População 2, respectivamente, para distintas escolhas das ordens das derivadas  $\theta_1, \theta_2 \in \{1, 0.8, 0.6\}$ .

Similarmente ao verificado para a População 1, é possível observar pela Figura 3 que, dentre os cenários simulados para os Suscetíveis da População 2, temos que estes decaem mais rapidamente, pelo menos no início da transmissão, para as ordens das derivadas  $\theta_1 = \theta_2 = 1$  (gráfico em azul), o qual é praticamente coincidente com a escolha

<sup>1</sup> Na figura 2, onde lê-se "suctiveis"leia-se suscetíveis

<sup>2</sup> Na figura 3, onde lê-se "suctiveis"leia-se suscetíveis

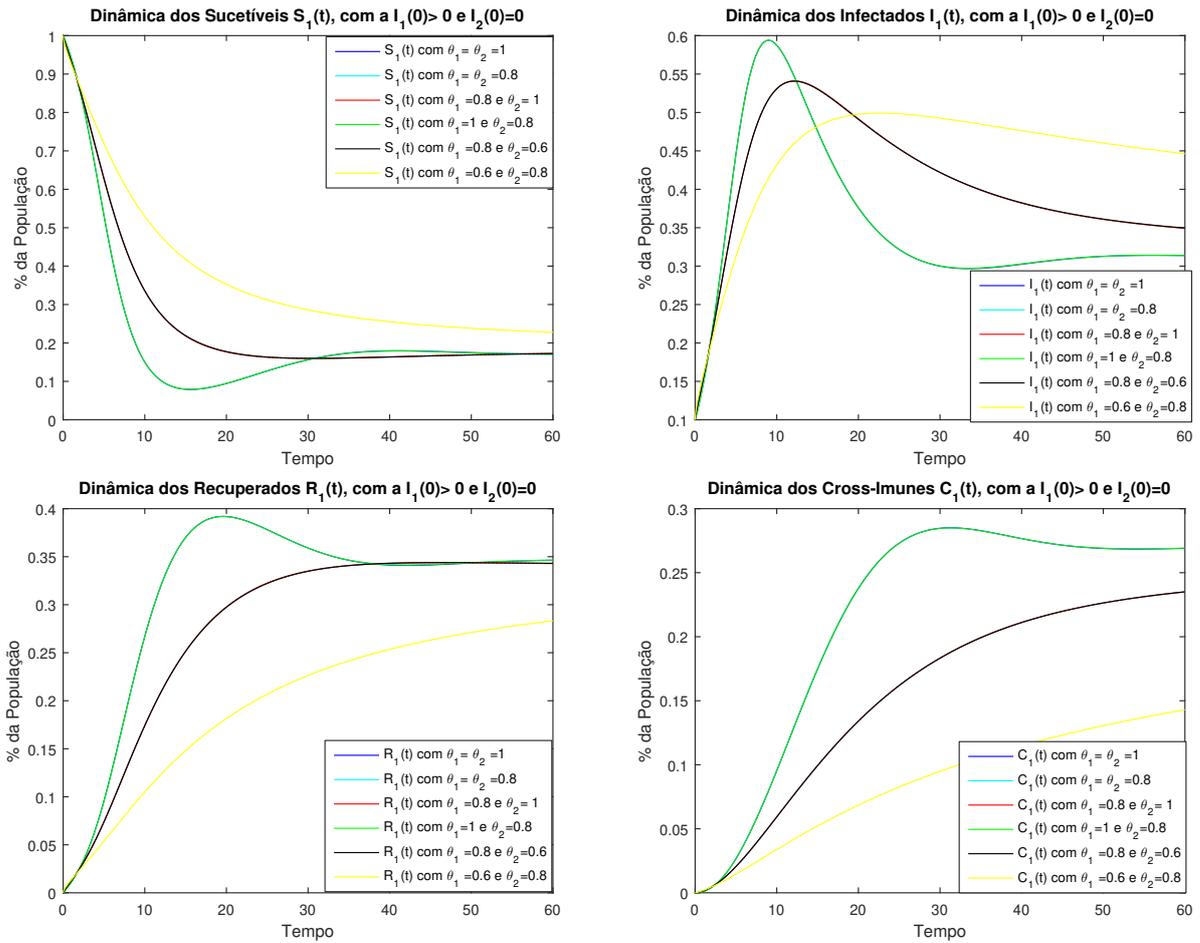


Figura 2 – Dinâmica das subpopulações da População 1, para os distintos cenários simulados. As curvas em —, — e — aparecem praticamente sobrepostas. O mesmo acontece com as curvas em — e —.

das ordens das derivadas  $\theta_1 = 0.8$  e  $\theta_2 = 1$  (gráfico em **vermelho**), em comparação com os demais, para os quais  $\theta_2 < 1$ . Esse cenário se reflete nos Infectados (Infecciosos)  $I_2$ , Recuperados (Removidos)  $R_2$ , Imunidade cruzada  $C_2$ , relativos a População 2, conforme pode ser visto nos cenários apresentados nas Figuras 3, respectivamente. Isso sugere que a memória imunológica menor  $\theta_2 = 1$  interfere negativamente na dinâmica da População 2, quando comparada com os outros cenários ( $\theta_2 \leq 0.8$ ). Em particular, vale destacar que o pico da infecção da população acontece antes para os cenários em que  $\theta_2 = 1$  e alcança praticamente 50% da população, enquanto fica abaixo dos 45% quando  $\theta_2 \leq 0.8$  e não passa de 50% para o cenário em que  $\theta_1 = 0.8$  e  $\theta_2 = 0.6$  (gráfico em preto). As simulações relativas a População 2 nos levam a conjecturar que quanto maior é a memória imunológica da População 2 ( $\theta_2 = 0.6$ ) menor é o pico da epidemia para a População 2, embora a infecção se estabilize em um cenário maior neste caso. Outro fator que colabora com a importância da memória imunológica elevada (derivadas de ordem fracionária menores) é o fato a imunidade cruzada (nos cenários simulados) ser monótona com relação à ordem  $\theta_2$  das derivadas (veja Figura 3), indicando que, conforme ambas as populações possuem uma memória imunológica melhor, menos suscetíveis a infecções por novas variantes da

doença elas estarão.

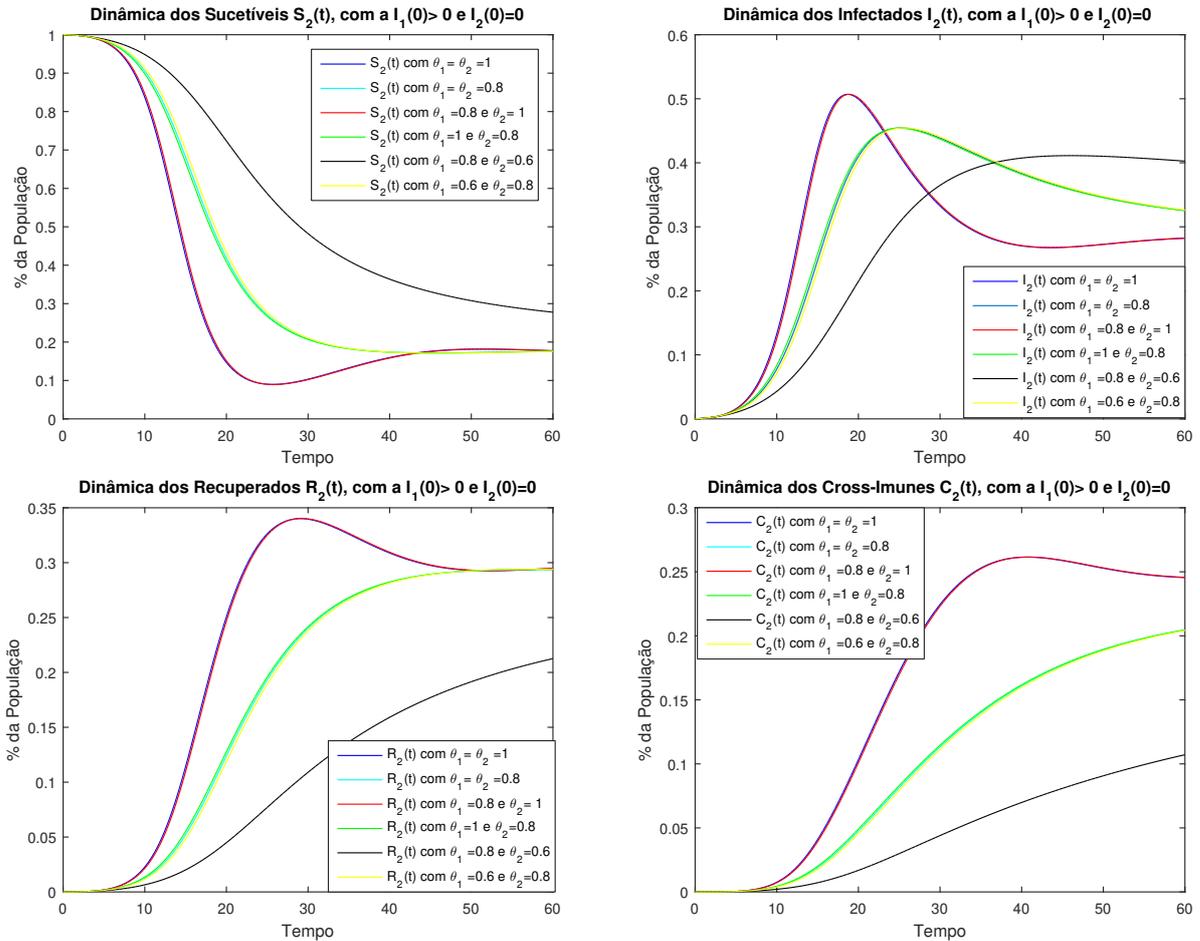


Figura 3 – Dinâmica das subpopulações da População 2, para os distintos cenários simulados. As curvas em — e — aparecem praticamente sobrepostas. O mesmo acontece com as curvas em —, — e —.

A Figura 4 mostra o comportamento dinâmico da população total em cada compartimento<sup>3</sup>. De uma forma geral, a subpopulação de suscetíveis totais são monótonos decrescentes com relação a soma das ordens das derivadas. Já as subpopulações de recuperados e cross-imunes são monótonos crescentes com a soma das ordens das derivadas. Num primeiro momento, a análise acima sugere que, quanto mais memória cada uma das populações adquirem, melhor. Contudo ao analisarmos os cenários para a subpopulação de infectados, percebemos que o melhor dos cenários é a escolha de  $\theta_1 = 1$  e  $\theta_2 = 0.8$  (gráfico em verde no compartimento  $I(t)$ ) uma vez que para esse temos o menor pico, o que, de alguma forma, contradiz o senso comum. Analisando ainda os cenários para a subpopulação de infectados, percebemos que as melhores situações acontecem quando  $\theta_2 \leq \theta_1$ . Isso nos leva a concluir que, estando a doença concentrada na População 1, o melhor que temos a fazer é imunizar a População 2 o quanto antes, para que essa tenha uma memória imunológica maior.

<sup>3</sup> Na figura 4, onde lê-se "suscetíveis" leia-se suscetíveis

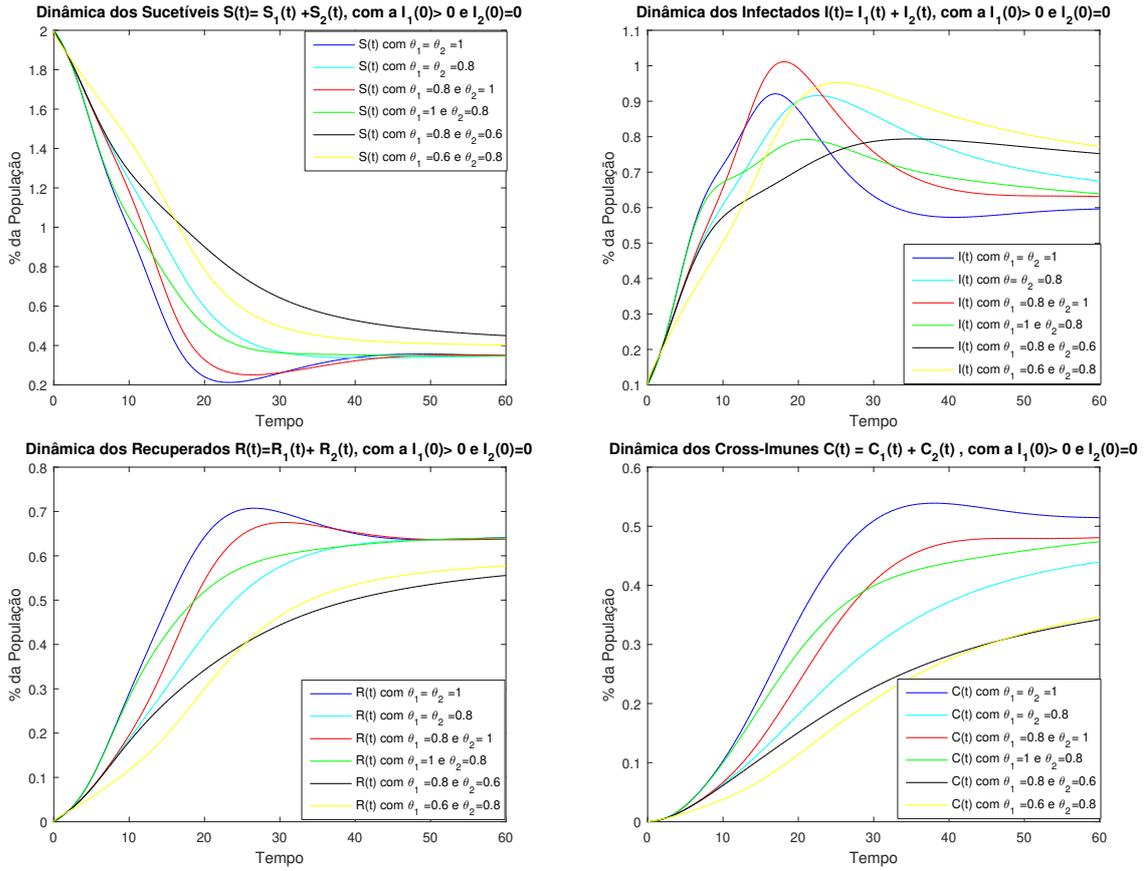


Figura 4 – Dinâmica da População total em cada um dos compartimentos do modelo MF-SIRC, para os distintos cenários simulados.

## 4.2 Impondo Alguma Anti-Simetria Entre as Populações

Nesta seção analisaremos alguns cenários em que as populações não são simétricas. Em particular, simularemos os casos em que a População 1 é 10 vezes maior que a População 2. Serão apresentados os casos em que a doença começa na população maior, isto é  $I_1(0) \neq 0$  e  $I_2(0) = 0$ , na Subseção 4.2.1 e o caso em que a doença começa na população menor, isto é  $I_1(0) = 0$  e  $I_2(0) \neq 0$ , na Subseção 4.2.2. Em ambos os casos, os parâmetros do modelo (3.1)-(3.2) são mantidos constantes e descritos abaixo.

- Populações 1 e 2 são tais que  $N_1 = 10$  e  $N_2 = 1$ ;
- Taxas de natalidade/mortalidade  $\mu_1 = \mu_2 = 0.0001$ ;
- Taxa de infecção interna de cada população  $\beta_{11} = 0.5$  e  $\beta_{22} = 0.35$ ;
- Taxa de infecção pela interação das populações  $\beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{11}/10$ ;
- $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.1$ ;
- $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$ ;
- $\delta_1 = \delta_2 = 0.2$ ;

Nas simulações abaixo mostramos os cenários para distintas escolhas das ordens das derivadas  $\theta_1, \theta_2 \in \{1, 0.8, 0.6\}$ .

#### 4.2.1 Doença iniciando na população maior

Nesse primeiro cenário assumiremos que a doença se inicie na População 1 (que é a maior). Para tal, as simulações foram feitas com a escolha das condições iniciais  $X(0) = (9.09, 0.01, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$ , e que a doença afeta 10% desta população, enquanto a População 2 está livre de doença neste estágio (no momento  $t = 0$ ).

As Figuras 5-6 e 7 expressam as dinâmicas das populações em cada um dos compartimentos<sup>4</sup>, para a População 1, População 2 e para a População total, respectivamente. Observando os gráficos relativos a  $C_1(t)$  e  $C_2(t)$  nas Figuras 5 e 6, respectivamente, não é possível determinar qual a melhor das situações para cada população individualmente, tendo em vista que não é possível determinar uma monotonia com relação às subpopulações dos cross-ímmunes, individualmente. No entanto ao observarmos o gráfico relativo a  $C(t)$  na Figura 7, percebemos que o melhor no sentido de ser menos suscetível a mutações da doença, se centram nas menores somas das ordens das derivadas, ou então, naquelas que a memória da População 1 é maior ( $\theta < 1$ ). Por outro lado esta análise preliminar só se sustenta observando a imunidade cruzada, já que, para a percentagem de infectados ( $I_1(t)$  e  $I_2(t)$  ou  $I(t)$  nas Figuras 5 e 6 ou 7) não é possível identificar o melhor cenário. Muito porque a percentagem total de infectados no pico da epidemia só é relativamente maior para o caso em que  $\theta_1 = 1$ .

#### 4.2.2 Doença iniciando na população menor

Nesse cenário assumiremos que a doença se inicie na População 2 (que é a menor). Para tal, as simulações foram feitas com a escolha das condições iniciais  $X(0) = (10, 0, 0, 0, 1, 0.001, 0, 0)^T$ , e que a doença afeta 10% desta população, enquanto a População 1 está livre de doença neste estágio (no momento  $t = 0$ ).

As Figuras 8-9 e 10 expressam as dinâmicas das populações em cada um dos compartimentos<sup>5</sup>, para a População 1, População 2 e para a População total, respectivamente.

Observando os gráficos relativos a  $C_1(t)$  e  $C_2(t)$  nas Figuras 8 e 9, respectivamente, não é possível determinar qual a melhor das situações para cada população individualmente, pois não é possível determinar uma monotonia com relação às subpopulações da imunidade cruzada, individualmente. Entretanto ao observarmos o gráfico relativo a  $C(t)$  na Figura 10, percebemos que o melhor no sentido de ser menos suscetível a mutações da

<sup>4</sup> Nas figura 5,6 e 7, onde lê-se "sucetiveis"leia-se suscetíveis

<sup>5</sup> Nas figuras 8,9 e 10, onde lê-se "sucetiveis"leia-se suscetíveis, além disso, onde lê-se "sucetiveis  $I_1$ "leia-se "infectados  $I_1$

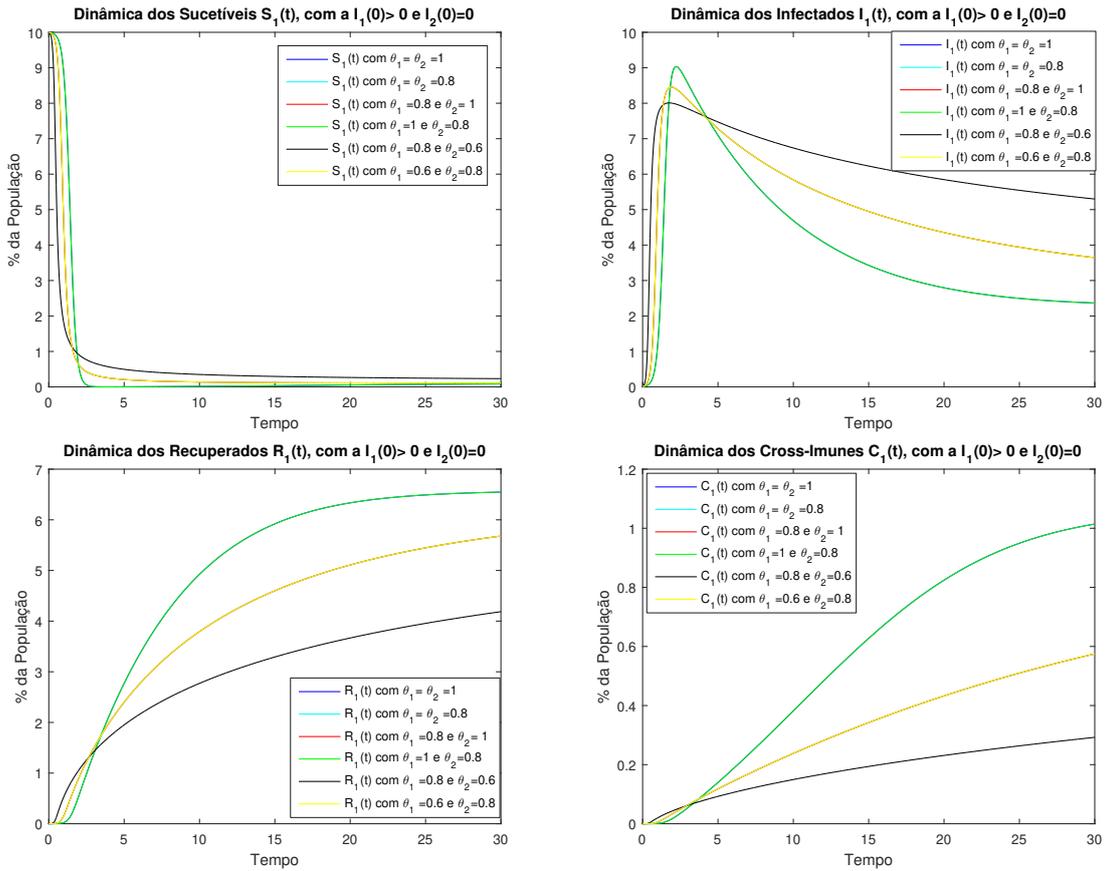


Figura 5 – Dinâmica das subpopulações da População 1, com  $N_1 = 10 \cdot N_2$  e a infecção começando na População 1, para os distintos cenários simulados. As curvas em — e — aparecem praticamente sobrepostas. O mesmo acontece com as curvas em —, — e —.

doença, se centram nas menores somas das ordens das derivadas, ou então, naquelas que a memória da População 1 é maior ( $\theta < 1$ ). Por outro lado esta análise preliminar só se sustenta observando a imunidade cruzada, uma vez que, para a percentagem de infectados ( $I_1(t)$  e  $I_2(t)$  ou  $I(t)$  nas Figuras 8 e 9 ou 10) não é possível identificar o melhor cenário. Muito porque a percentagem total de infectados no pico da epidemia só é relativamente maior para o caso em que  $\theta_1 = 1$ .

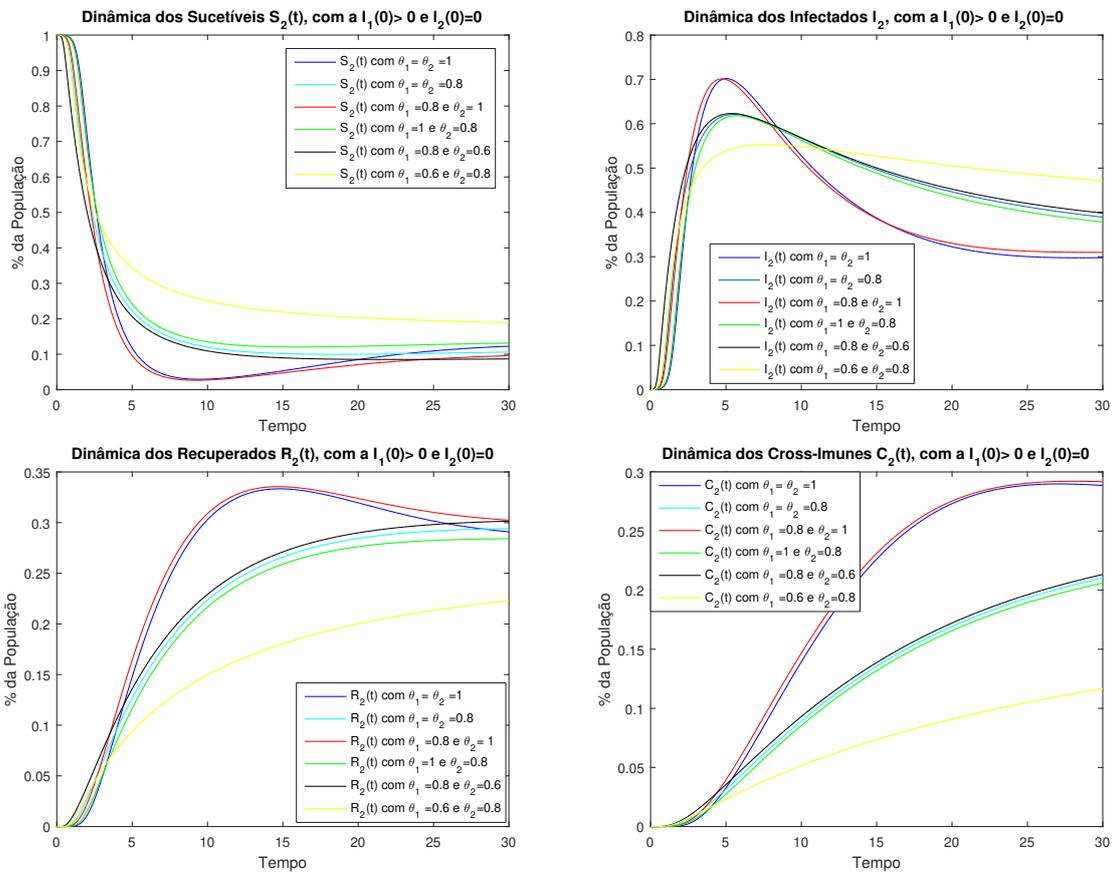


Figura 6 – Dinâmica das subpopulações da População 2, com  $N_1 = 10 \cdot N_2$  e a infecção começando na População 1, para os distintos cenários simulados.

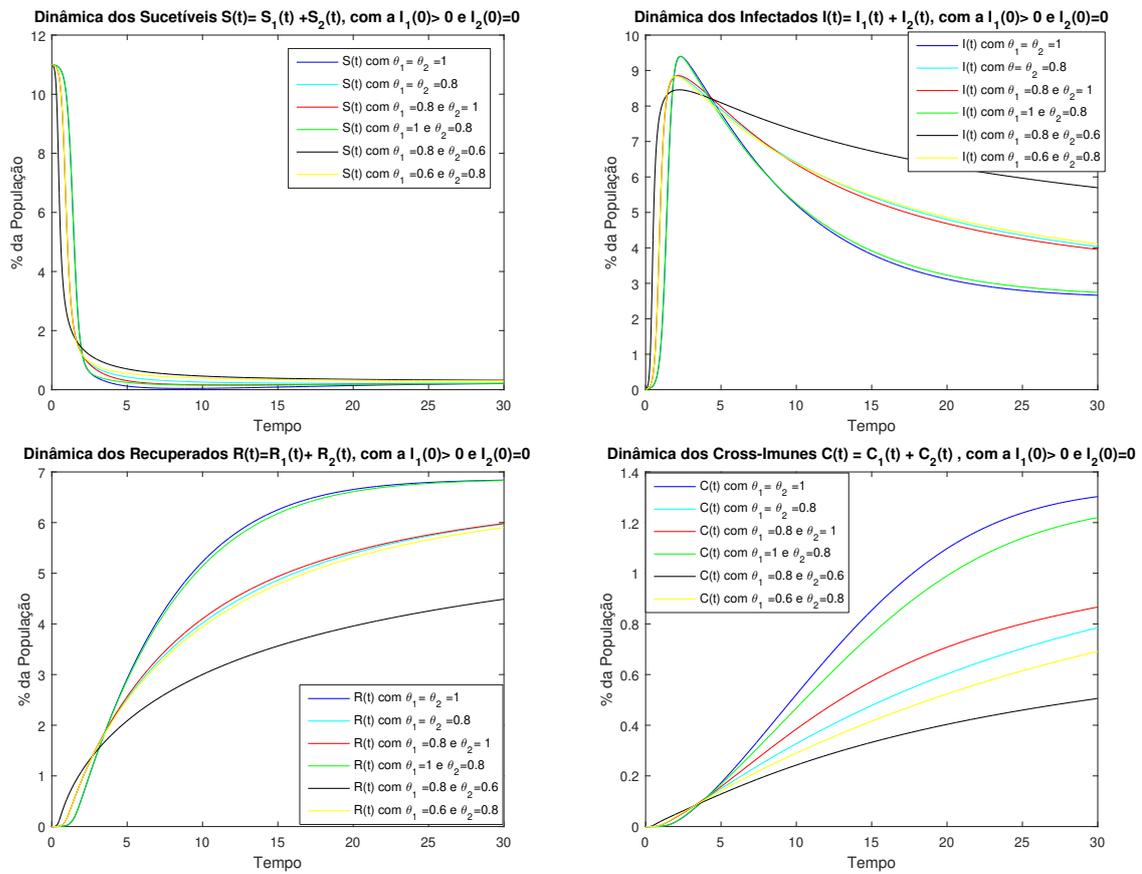


Figura 7 – Dinâmica das subpopulações em cada compartimento referentes a População total, com  $N_1 = 10 \cdot N_2$  e a infecção começando na População 1, para os distintos cenários simulados.

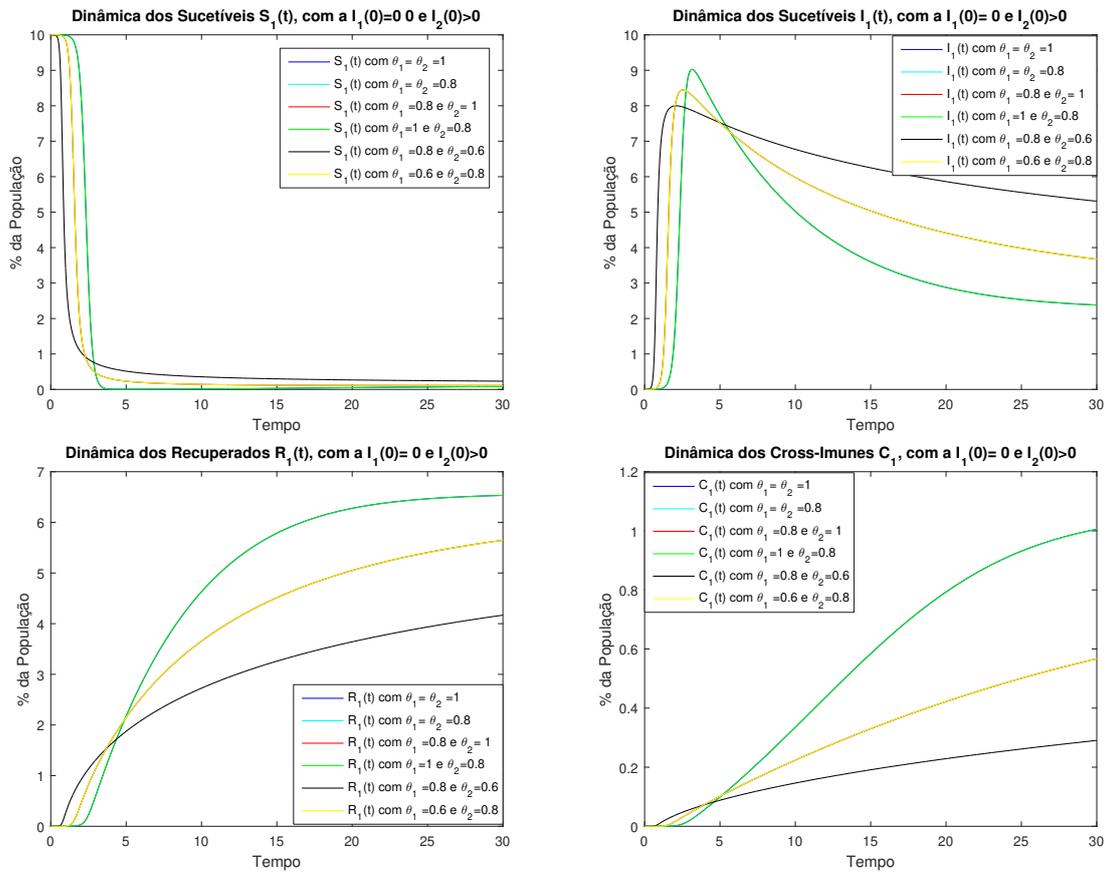


Figura 8 – Dinâmica das subpopulações da População 1, com  $N_1 = 10 \cdot N_2$  e a infecção começando na População 2, para os distintos cenários simulados. As curvas em  $\text{---}$  e  $\text{---}$  aparecem praticamente sobrepostas. O mesmo acontece com as curvas em  $\text{---}$ ,  $\text{---}$  e  $\text{---}$ .

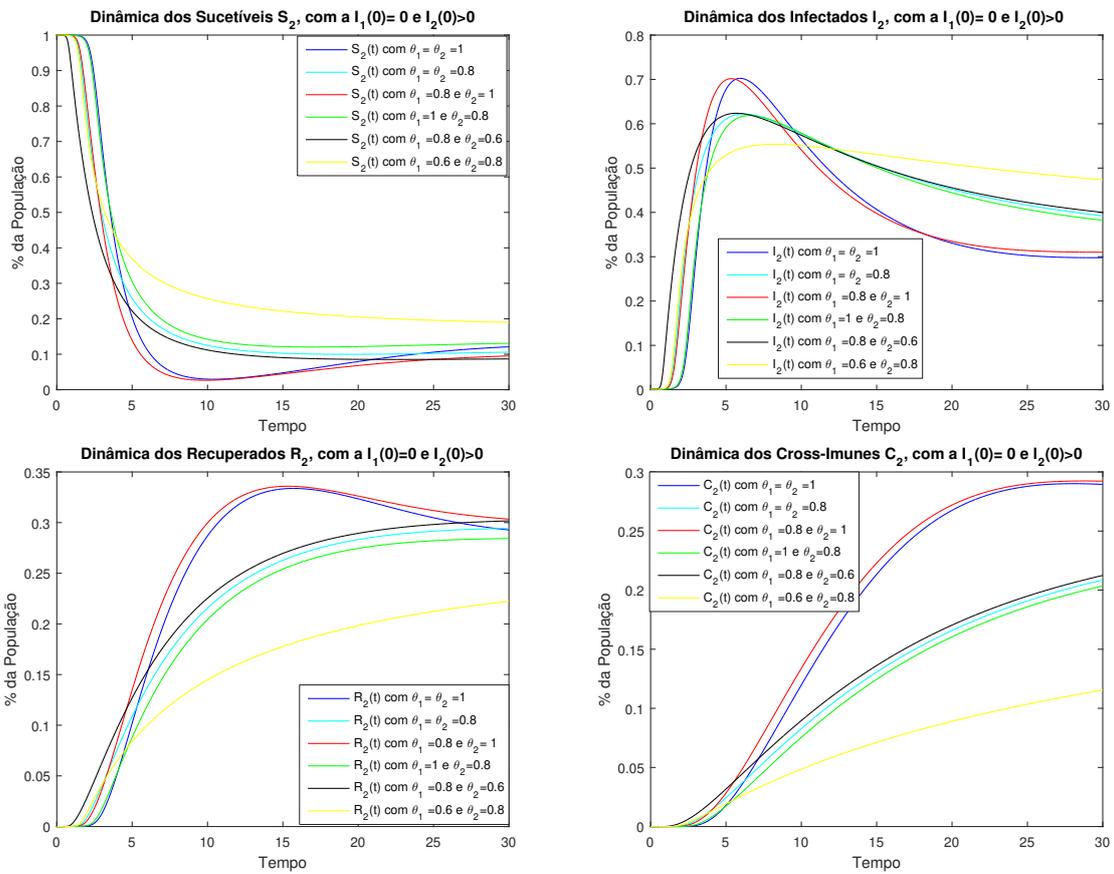


Figura 9 – Dinâmica das subpopulações da População 2, com  $N_1 = 10 \cdot N_2$  e a infecção começando na População 1, para os distintos cenários simulados.

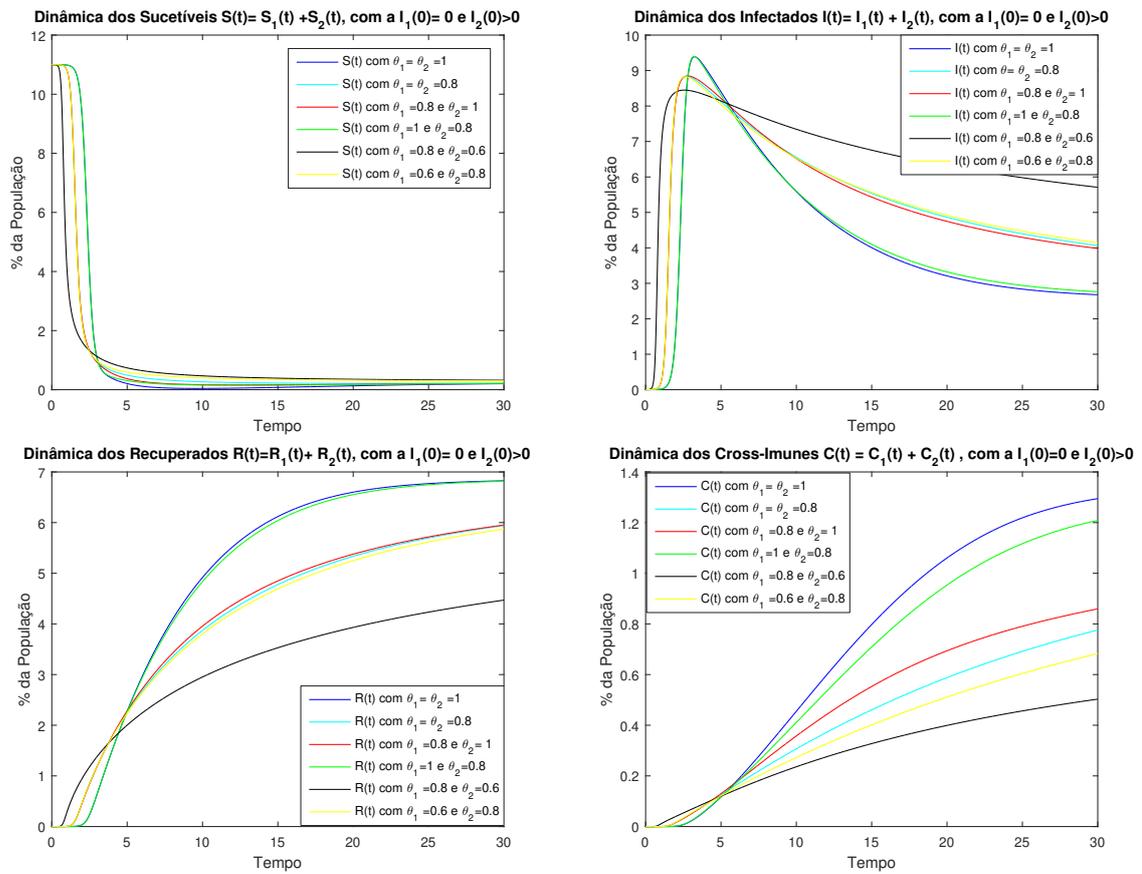


Figura 10 – Dinâmica das subpopulações em cada compartimento referentes a População total, com  $N_1 = 10 \cdot N_2$  e a infecção começando na População 2, para os distintos cenários simulados.

## 5 Conclusão

Neste trabalho, foi proposto e analisado um modelo compartimental do tipo SIRC multi-fracionário para a propagação de doenças infecciosas entre duas populações que interagem.

Do ponto de vista teórico, foram provados resultados de boa colocação para o modelo proposto. Para além da teoria, apresentamos simulações numéricas que visam entender os efeitos das derivadas de ordem fracionária (memória) na dinâmica das distintas subpopulações, distribuídas em cada compartimento. No caso em que as populações são simétricas, é possível analisar pelas simulações numéricas apresentadas que a existência de memória contribui na melhora significativa da porcentagem das populações que se infectam no pico da disseminação da doença, bem como na diminuição da porcentagem da população no compartimento de imunidade cruzada ( $C(t)$ ), o que indica uma menor propensão da população a se reinfectar com variantes do patógeno que causa a doença. A mesma monotonia entre a ordem das derivadas (que "medem" o nível de memória) e a porcentagem de infectados no pico da infecção não é mais verificada para o cenário em que as populações não são idênticas (ver Seção 4.2), independentemente da população que tenha sido infectada primeiro pela doença, note que talvez para outras taxas de variações teríamos essa verificação. Entretanto a monotonia é mantida com relação a imunidade cruzada total (ver Seção 4.2), independentemente de qual população a doença tenha surgido. Esse resultado preliminar e contraditório com a intuição com relação ao pico de infectados é inconclusiva, pois os parâmetros utilizado podem não retratar nenhuma situação realística.

### 5.1 Contribuições Futuras

Como não foi realizada uma abordagem a respeito de uma análise para o modelo MP-FSIRC deixamos como pontos a serem estudados em trabalhos futuros os seguintes tópicos:

- Estudar resultados de estabilidade dos pontos de equilíbrio.
- Analisar o modelo com estratégias de vacinação.
- Simular cenários com parâmetros advindos de doenças reais.
- Escolher ordens das derivadas que melhor descrevem dados reais (calibrar a ordem das derivadas).

## Referências

- AHMAD, W. M.; EL-KHAZALI, R. Fractional-order dynamical models of love. *Chaos, Solitons Fractals*, v. 33, n. 4, p. 1367–1375, 2007. ISSN 0960-0779. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077906001652>>. Citado na página 14.
- ALMEIDA, W. F. de; PIMENTA, M. T. D. O. O teorema de arzela-ascoli e sua aplicacao em equacoes diferenciais ordinarias. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 6, n. 2, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- ANDERSON, D. H. *Compartmental modeling and tracer kinetics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 50. Citado na página 8.
- ANDERSON, R.; MAY, R. Vaccination against rubella and measles: quantitative investigations of different policies. *Epidemiology & Infection*, Cambridge University Press, v. 90, n. 2, p. 259–325, 1983. Citado na página 8.
- ASCHER, U. M.; PETZOLD, L. R. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. [S.l.]: SIAM, 1998. v. 1. Citado na página 54.
- CAI, Y. et al. Extinction in a feline panleukopenia virus model incorporating direct and indirect transmissions. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 258, p. 358–366, 2015. Citado na página 12.
- CAMARGO, R. d. F. et al. Cálculo fracionário e aplicações. [sn], 2009. Citado na página 23.
- CAPUTO, M. *Elasticità e Dissipazione*. [S.l.]: Zanichelli, Bologna, 1969. Citado na página 14.
- CASAGRANDE, R. et al. The sirc model and influenza a. Elsevier, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 8, 13 e 49.
- DIETHELM, K. *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010. Citado na página 17.
- DIETHELM, K. *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*. [S.l.]: Springer, 2010. Citado 5 vezes nas páginas 18, 34, 37, 40 e 44.
- GARRAPPA, R. Trapezoidal methods for fractional differential equations: Theoretical and computational aspects. *Mathematics and Computers in Simulation*, Elsevier, v. 110, p. 96–112, 2015. Citado na página 54.
- GARRAPPA, R. Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial. *Mathematics*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 6, n. 2, p. 16, 2018. Citado na página 54.

- GOMES, A. C. F. N. *Modelo comportamental sirc fracionário*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande, 2018. Citado na página 8.
- GOMES, A. C. F. N.; CEZARO, A. D. Estudo da estabilidade do modelo compartimental sirc fracionário. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 6, n. 2, 2018. Citado na página 8.
- GOMES, A. C. F. N.; CEZARO, A. D. Modelo sirc fracionário com múltiplas ordens para influenza. *Scientia Plena*, v. 15, n. 4, 2019. Citado na página 8.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo, vol. 1*. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 50.
- HETHCOTE, H. W. The mathematics of infectious diseases. *SIAM review*, SIAM, v. 42, n. 4, p. 599–653, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 12.
- HINDERER, K.; RIEDER, U.; STIRGLITZ, M. *Dynamic Optimization: Deterministic and Stochastic Models*. [S.l.]: Springer, 2017. Citado na página 40.
- KERMACK, W.; MCKENDRICK, A. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing papers of a Mathematical and Physical Character*, v. 115, n. 772, p. 700–721, 1927. Citado na página 12.
- LIMA, E. L. *Análise real volume 1. Funções de uma variável*. [S.l.]: IMPA, 2009. v. 10. Citado na página 15.
- LIN, W. Global existence theory and chaos control of fractional differential equations. *J.Math. Anal. Appl*, v. 1, n. 332, p. 709–726, 2007. Citado na página 53.
- MAINARDI, F. *Fenner and White's Medical Virology*. [S.l.]: Imperial College Press, 2010. Citado na página 27.
- OLDHAM, K. B.; SPANIER, J. *Fenner and White's Medical Virology*. [S.l.]: Academic Press, 1974. Citado na página 27.
- ORTIGUEIRA, M. D.; MACHADO, J. T. What is a fractional derivative? *Journal of computational Physics*, Elsevier, v. 293, p. 4–13, 2015. Citado na página 28.
- ROSS, B. *Fractional calculus and its applications: proceedings of the international conference held at the University of New Haven, June 1974*. [S.l.]: Springer, 2006. v. 457. Citado na página 28.
- SHEREEN, M. A. et al. Covid-19 infection: origin, transmission, and characteristics of human coronaviruses. *Journal of Advanced Research*, Elsevier, 2020. Citado na página 8.
- SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979. v. 11. Citado na página 36.
- SPIVAK, M. *O Cálculo em variedades*. [S.l.]: Ciência Moderna, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 24.

---

YANG, H. M. Epidemiologia matemática: estudos dos efeitos da vacinação em doenças de transmissão direta. In: *Epidemiologia matemática: estudos dos efeitos da vacinação em doenças de transmissão direta*. [S.l.: s.n.], 2001. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 12.