Alisson Tallys Geraldo Fiorentin

Matemática Aplicada a Títulos Públicos Federais e Análise da Estrutura a Termo da Taxa de Juros

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Julho, 2023

Alisson Tallys Geraldo Fiorentin

Matemática Aplicada a Títulos Públicos Federais e Análise da Estrutura a Termo da Taxa de Juros

Trabalho de Conclusão de Curso, Matemática Aplicada Bacharelado, submetido por Alisson Tallys Geraldo Fiorentin junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Matemática Aplicada Bacharelado

Orientador: Dra. Cristiana Andrade Poffal

Coorientador: Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Julho, 2023

Alisson Tallys Geraldo Fiorentin

Matemática Aplicada a Títulos Públicos Federais e Análise da Estrutura a Termo da Taxa de Juros

Trabalho de Conclusão de Curso, Matemática Aplicada Bacharelado, submetido por Alisson Tallys Geraldo Fiorentin junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, 28 de julho de 2023

Documento assinado digitalmente
CRISTIANA ANDRADE POFFAL
Data: 04/08/2023 08:17:22-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dra. Cristiana Andrade Poffal

Documento assinado digitalmente
BARBARA DENICOL DO AMARAL RODRIGUE
Data: 07/08/2023 18:42:55-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez

Documento assinado digitalmente
ADILSON DA SILVA NUNES
Data: 04/08/2023 10:23:56-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. Adilson Nunes

Documento assinado digitalmente
RAQUEL DA FONTOURA NICOLETTE
Data: 07/08/2023 14:39:00-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dra. Raquel Nicolette
(Avaliador - FURG)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Julho, 2023

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, demais familiares e amigos.

Agradeço também as minhas orientadoras, Dra. Cristiana Andrade Poffal e Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez.

Resumo

Neste trabalho estudam-se os conceitos matemáticos envolvidos no cálculo do preço, cotação, taxa e na análise dos fluxos de pagamentos dos Títulos Públicos Federais negociados através do Tesouro Direto. Por ser considerado um investimento conservador e de renda fixa, esse tipo de aplicação é conhecida por baixos riscos e com possibilidade de ganho pré-determinado. Como objetos de estudo têm-se os títulos prefixados sem pagamentos antecipados de juros, conhecidos como títulos zero cupom, pois a partir deles que a Estrutura a Termo da Taxa de Juros (ETTJ) é construída, visto que, ela é a base para a precificação de instrumentos de renda fixa e serve como referência para determinar o índice dos demais setores do mercado de dívida. Para a construção da ETTJ usa-se o modelo matemático de previsão de curva de juros proposto por Lars E. O. Svensson, um modelo que usa poucos parâmetros para o ajuste da curva de juros e, por esta razão, é um dos mais utilizados por Bancos Centrais de diversos países, incluindo o Banco Central do Brasil (BCB). Por fim, apresenta-se uma aplicação das taxas dos títulos do Tesouro Direto prefixado, no qual se utiliza o modelo de Svensson e o software RStudio para obter os parâmetros da ETTJ a fim de construir e analisar a curva de juros da taxa à vista do título prefixado.

Palavras-chave: Estrutura a Termo da Taxa de Juros, Títulos Públicos, Investimentos, Mercado Financeiro.

Abstract

This paper studies the mathematical concepts involved in the calculation of price, quotation, rate and in the analysis of payment flows of Federal Government Bonds traded through Treasury Direct. As it is considered a conservative fixed income investment, this type of investment is known for its low risks and possibility of pre-determined gains. As a study object, we have fixed-rate securities without anticipated interest payments, known as zero-coupon bonds, because it is from them that the Term Structure of the Interest Rate (TSIR) is built, since it is the basis for the pricing of fixed-income instruments and serves as a reference to determine the index of the other sectors of the debt market. For the construction of the TSIR it is used the mathematical model of yield curve forecast proposed by Lars E. O. Svensson, a model that uses few parameters for the adjustment of the yield curve and for this reason is one of the most used by Central Banks of many countries, including the Central Bank of Brazil (BCB). Finally, it is presented an application of the rates of the fixed-rate Treasury Direct bonds, in which the Svensson model and the software RStudio are used to obtain the TSIR parameters in order to build and analyze the yield curve of the spot rate of the fixed-rate bond.

Key-words: Term Structure of Interest Rates, Government Bonds, Investments, Financial Market.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

ANBIMA Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais

B3 Brasil, Bolsa, Balcão

BCB Banco Central do Brasil

COPOM Comitê de Política Monetária

CVM Comissão de Valores Mobiliários

EDO Equação Diferencial Ordinária

EQM Erro Quadrático Médio

ETTJ Estrutura a Termo da Taxa de Juros

GOV Governo Federal

GUI *Graphical User Interface*

IBOVESPA Índice da Bolsa de Valores de São Paulo

IDE *Integrated Development Environment*

IPCA Índice de Preços ao Consumidor Amplo

LFT Letra Financeira do Tesouro

LTN Letra do Tesouro Nacional

NTN-B Nota do Tesouro Nacional série B

NTN-B1 Nota do Tesouro Nacional série B1

NTN-F Notas do Tesouro Nacional série F

NYSE *New York Stock Exchange*

PA Progressão Aritmética

PG Progressão Geométrica

SELIC Sistema Especial de Liquidação e Custódia

VN Valor Nominal

VNA Valor Nominal Atualizado

Sumário

Introdução

A Estrutura a Termo da Taxa de Juros (ETTJ) ou curva de juros, é uma representação gráfica que mostra a relação entre as taxas de juros de títulos financeiros de diferentes prazos. A ETTJ é amplamente utilizada para entender as expectativas dos investidores em relação à evolução futura das taxas de juros e suas implicações para os mercados financeiros. No contexto brasileiro, os Títulos Públicos Federais desempenham um papel central na formação da ETTJ. Emitidos pelo Tesouro Nacional em colaboração com a Brasil, Bolsa, Balcão (B3), eles representam a dívida do governo brasileiro, tendo sido utilizados para captar recursos junto a investidores para financiar suas atividades e projetos. Esses títulos são vistos como investimentos de renda fixa, por oferecerem um retorno preestabelecido ao investidor.

Os Títulos Públicos Federais do Brasil são caracterizados por sua ampla diversidade, que inclui títulos prefixados e pós-fixados. Os títulos prefixados possuem uma taxa de juros pré-determinada, enquanto os pós-fixados estão atrelados a um índice de referência, como o Sistema Especial de Liquidação e Custódia (SELIC) e o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA). Essa variedade de títulos oferece aos investidores diferentes opções de investimento, levando a uma complexa estrutura a termo da taxa de juros no mercado brasileiro. As taxas dos Títulos Públicos referem-se às taxas de juros pagas pelos títulos. No caso dos títulos prefixados, essa taxa é definida no momento da compra e permanece fixa ao longo da vida do título. Já nos títulos pós-fixados, a taxa varia conforme o índice de referência ao qual o título está atrelado.

O preço de um Título Público Federal refere-se ao seu valor de mercado. Esse valor pode flutuar diariamente devido a vários fatores, como as condições econômicas, as expectativas de inflação, a oferta e demanda no mercado financeiro e as mudanças nas taxas de juros. Geralmente, os títulos são negociados com base em uma porcentagem de seu Valor Nominal (VN), o qual é o valor de face do título. A cotação de um Título Público é a representação do seu preço em termos percentuais, ela é expressa como uma porcentagem do valor nominal do título. A rentabilidade dos títulos públicos está relacionada aos pagamentos de juros e ao valor de resgate do título. Os títulos podem oferecer diferentes formas de rentabilidade, dependendo de sua categoria. Títulos prefixados têm sua taxa de juros determinada no momento da emissão, o que permite que o investidor saiba antecipadamente quanto receberá ao final do prazo. Já os títulos pós-fixados têm sua rentabilidade atrelada a algum índice de referência, como a taxa SELIC e o IPCA. Nesse caso, a rentabilidade é conhecida apenas no momento do resgate do título.

A ETTJ brasileira reflete as expectativas dos participantes do mercado em relação à política monetária do Banco Central do Brasil (BCB), bem como a percepção do risco e outros fatores econômicos relevantes. Através da análise da ETTJ, os investidores e analistas financeiros podem obter insights sobre as condições financeiras e as expectativas de inflação no país, auxiliando na tomada de decisões de investimento e na gestão de risco. No presente trabalho, abordam-se os títulos prefixados sem pagamentos antecipados de juros, conhecidos como títulos zero cupom por serem a base da construção da ETTJ. A taxa de juros de um título zero cupom é conhecida como taxa à vista ou taxa *spot*. Essa taxa representa o retorno efetivo proporcionado pelo título. Por outro lado, a taxa futura, também chamada de taxa *forward* ou taxa a termo, refere-se à taxa à vista que estará em vigor em um período futuro.

Para estimar as taxas futuras, é possível utilizar a curva de taxas à vista como referência. A curva de taxas à vista mostra as diferentes taxas de juros para diferentes maturidades. Com base nessa curva, é possível extrapolar ou estimar as taxas à vista para períodos futuros, conhecidas como taxas futuras. A obtenção das taxas futuras é importante tanto para investidores quanto para instituições financeiras, por permitir avaliar as expectativas do mercado em relação às taxas de juros futuras. Essas taxas futuras podem ser utilizadas para precificar instrumentos financeiros, como contratos a termo ou futuros, que dependem das taxas de juros em datas futuras.

O objetivo deste trabalho é demonstrar os cálculos dos preços, taxas, rentabilidades e cotações dos Títulos Públicos Federais, além de construir e analisar a ETTJ obtida para títulos zero cupom. Para isso, no capítulo 1 realiza-se uma breve revisão bibliográfica para embasar a fundamentação teórica. A seguir, no capítulo 2, abordam-se os fundamentos matemáticos, revisando os principais conceitos da matemática financeira, do cálculo diferencial e integral, das equações diferenciais e regressões lineares. No capítulo 3, desenvolvem-se os conceitos do mercado financeiro e dos Títulos Públicos Federais, abordando sua precificação, cotação, rentabilidade e taxação. No capítulo 4, apresentam-se as relações matemáticas entre as taxas à vista e as taxas futuras, e discute-se a ETTJ, assim como os modelos de Nelson e Siegel (NELSON; SIEGEL, 1987) e Svensson (SVENSSON, 1994). No capítulo 5, apresenta-se o Software de Computação Estatística, o R, bem como suas operações básicas, estruturação de dados e os pacotes utilizados para obter os resultados. No capítulo 6, analisam-se e discutidos os resultados e simulações obtidos por meio da otimização utilizando o software RStudio no modelo de Svensson (SVENSSON, 1994), no qual serão obtidos os parâmetros que minimizam o modelo, a fim de construir a ETTJ. Utilizam-se dados dos títulos públicos do Tesouro Prefixado oferecidos pelo Tesouro Direto. Por fim, no capítulo 7, apresenta-se a conclusão deste trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

1 Revisão Bibliográfica

Neste capítulo apresenta-se uma breve revisão bibliográfica, na qual este trabalho foi baseado.

Espinosa (2011) estuda a ETTJ, com foco no modelo de Nelson e Siegel (1987) e faz simulações com amostras obtidas em um certo período para replicar o modelo estudado. Além disso, aborda os conceitos sobre curvas de juros e sobre o mercado de renda fixa brasileiro.

Broco (2013) estuda o modelo de Nelson e Siegel (1987) para a construção da curva de juros, utilizando os métodos dos mínimos quadrados ordinários para obter seus parâmetros. Utiliza também a inferência bayesiana e máxima verossimilhança para verificar os resultados obtidos. O autor define os conceitos de taxas de juros, bem como os regimes de capitalização simples, composta e contínua. Além de demonstrar as relações entre a taxa à vista e o fator de desconto. Por fim, aplica os conceitos e métodos apresentados em títulos do Tesouro Direto (NTN-B).

Rosa (2013) aborda a ETTJ e sua modelagem dando ênfase ao modelo de Nelson e Siegel (1987) se estendendo à dinâmica de Diebold e Li (2006), em que essa dinâmica ficou conhecida como Dynamic Nelson-Siegel (DNS), que foi desenvolvida para capturar a forma da curva de juros em um único momento no tempo. No entanto, a DNS permite que os parâmetros evoluam ao longo do tempo, tornando-a adequada para modelar a dinâmica das taxas de juros. Neste contexto, Rosa (2013) as aplica em Títulos do Tesouro Americano com vencimentos de 1 mês, 2 meses, 6 meses, 1 ano, 2 anos, 3 anos, 5 anos, 7 anos, 10 anos e 20 anos e analisa seus resultados.

Moreira (2014) discute o método de precificação dos ativos de renda fixa utilizados na modelagem da ETTJ, efetua exposição do conceito e da importância da ETTJ para os mais diferentes setores da economia, onde aborda o modelo de Svensson (1994) e o modelo *Spline* Exponencial da Merrill Lynch, onde os aplica em títulos do tesouro direto utilizando o software matemático MatLab, para obter os vértices para a construção e análise da ETTJ.

O trabalho de Ponaht (2015) apresenta conceitos básicos e elementares de matemática financeira, tais como: taxas, porcentagem, juros, progressões aritméticas e geométricas, os quais são empregados para demonstrar os cálculos realizados em investimentos nos títulos públicos federais, incluindo a caderneta de poupança.

Frota (2017) assim como Espinosa (2011), aborda a ETTJ e os conceitos matemáticos envolvidos, demonstrando as relações entre as taxas de juros à vista, futura e instantânea. Frota (2017) estuda os modelos de Nelson e Siegel (1987) e Svensson (1994), analisa seus parâmetros para obter um modelo de previsão de curva de juros e apura em títulos do Tesouro Direto.

Nascimento (2019) define conceitos fundamentais da matemática financeira, como: fluxo de caixa, juros e taxas, aplicando-os em exemplos de investimentos públicos federais, tal como no Tesouro Direto. Escreve um breve histórico sobre a caderneta de poupança e apresenta suas principais características. Explica os conceitos de mercados de capitais e aborda assuntos tais como retorno, risco e liquidez nos cenários de investimentos no Brasil.

O trabalho de Ferreira (2021) esclarece conceitos econômicos aplicados na matemática financeira analisando o preço de mercado dos títulos públicos federais, especialmente dos títulos do Tesouro Direto, prefixados e indexados ao Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA). Também descreve fundos de investimentos de renda fixa e fundos de previdência. Aborda a teoria matemática por meio do estudo de variações nas taxas de juros e compara os resultados.

Dentro deste contexto, nesse trabalho mostram-se as operações matemáticas envolvidas nos cálculos do preço, cotação, taxas e rentabilidade dos títulos públicos federais atualmente, bem como, utiliza-se o software R para obter os parâmetros do modelo de Svensson (1994) a fim de analisar e construir a ETTJ.

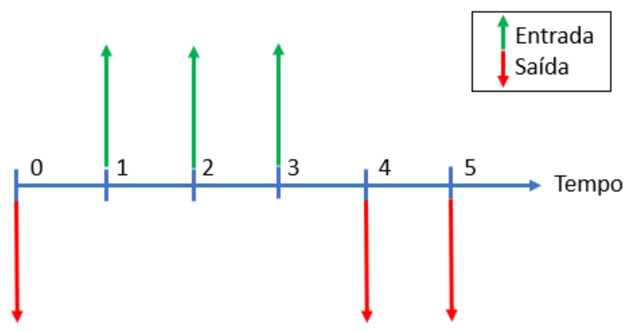
2 Fundamentação Matemática

Neste capítulo, são desenvolvidos os conceitos matemáticos fundamentais para melhor compreensão deste trabalho. Em primeiro lugar, são realizadas considerações sobre fluxo de caixa, progressão aritmética e capitalização simples, progressão geométrica e capitalização composta. Em seguida, sobre as taxas de juros e capitalização contínua. Por fim, são apresentadas as definições de funções, limites e derivadas de uma e várias variáveis reais, integral, equações diferenciais e regressão linear.

2.1 Fluxo de Caixa

O fluxo de caixa é uma ferramenta financeira que visa analisar e acompanhar os movimentos de entrada e saída de recursos monetários relacionados a um determinado investimento ao longo do tempo. Ele fornece uma visão clara das transações financeiras envolvidas no investimento, permitindo avaliar a sua viabilidade, rentabilidade e riscos. Geralmente é apresentado em forma de diagramas, gráficos ou tabelas, com colunas representando os diferentes períodos (por exemplo, meses ou anos) e linhas indicando as diferentes categorias de fluxo de caixa, como receitas, despesas, investimentos iniciais e fluxos de caixa líquidos. Observe a Figura 1 que ilustra um diagrama de um fluxo de caixa onde nos meses 1, 2 e 3 há entrada de capital (representado pelas setas verdes apontadas para cima) e nos meses 0, 4 e 5 há saída de capital (representado pelas setas vermelhas apontadas para baixo).

Figura 1 – Fluxo de Caixa.



Fonte: Elaborada pelo autor

A análise do fluxo de caixa em investimentos permite aos investidores avaliar a rentabilidade e a viabilidade financeira de um projeto ou empreendimento, identificar possíveis problemas de liquidez, estimar o retorno do investimento e realizar comparações entre diferentes opções de investimento.

2.2 Progressões

Progressões são sequências numéricas que seguem um padrão específico. Em outras palavras, são sequências de números onde cada termo seguinte é obtido a partir do anterior, seguindo uma determinada regra. As progressões são importantes em matemática com diversas aplicações em áreas como a física, engenharia, economia e computação, entre outras.

2.2.1 Progressão Aritmética (PA)

Uma progressão aritmética é uma sequência de números onde a diferença entre qualquer termo e o anterior, é uma constante, iniciando com o segundo termo.

Então, para qualquer número a_1, o primeiro termo da sequência, adiciona-se um número r, chamado de razão, obtendo, assim, o segundo termo a_2. Para o segundo termo a_2, adiciona-se a razão r para obter o terceiro termo a_3 e assim sucessivamente (IEZZI, 2018). Desta forma, tem-se:

a_1

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$

...

$a_n = a_{n-1} + r = [a_1 + (n-2) \cdot r] + r = a_1 + (n-1) \cdot r.$

A equação do n-ésimo termo de uma PA é dada por:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r. \tag{2.1}$$

2.2.2 Capitalização Simples

O regime de capitalização simples se comporta como uma progressão aritmética (PA), aumentando os juros linearmente ao longo do tempo. Neste regime, os juros são calculados apenas sobre o valor inicial do capital aplicado e não sobre o saldo de juros acumulado. Desse modo, tomando a_1 e igualando ao capital inicial C e a razão r igual ao juros J, tem-se:

$$J = C \cdot i. \tag{2.2}$$

Para calcular o montante M após a aplicação do capital C com taxa i por um período n, escreve-se em termos de uma PA:

$a_1 = C$

$a_2 = C + C \cdot i = C(1 + i)$

$a_3 = C + C \cdot i + C \cdot i = C(1 + 2 \cdot i)$

$a_4 = C + C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i = C(1 + 3 \cdot i)$

...

$a_n = C + \underbrace{C \cdot i + C \cdot i + \cdots + C \cdot i}_{n\ termos} = C(1 + n \cdot i).$

Representando a_n como o montante M sendo o capital inicial acrescidos dos juros do período, obtém-se:

$$M = C(1 + n \cdot i). \tag{2.3}$$

A partir da equação (2.2), utiliza-se a mesma ideia anterior para o cálculo do juros (J):

$J_1 = C \cdot i$

$J_2 = C \cdot i + C \cdot i = 2 \cdot C \cdot i$

$J_3 = C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i = 3 \cdot C \cdot i$

$J_4 = C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i = 4 \cdot C \cdot i$

...

$J_n = \underbrace{C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i + \cdots + C \cdot i}_{n\ parcelas} = n \cdot C \cdot i,$

onde J_n representa o total de juros após um período de n aplicações.

Dessa forma, o cálculo do regime de capitalização simples é:

$$J = n \cdot C \cdot i, \tag{2.4}$$

em que J representa o valor resultante dos juros expresso em unidades monetárias, C é o capital, isto é, o valor aplicado inicialmente, i a taxa de juros expressa no formato unitário e n descreve o tempo de aplicação (NETO, 2012).

2.2.3 Progressão Geométrica (PG)

Uma progressão geométrica é uma sequência numérica de termos não nulos no qual o quociente entre um termo qualquer, a partir do segundo, e o termo anterior é uma constante (IEZZI, 2018).

Dado a_1, o primeiro termo da sequência. Multiplicando-se a_1 por uma constante q, obtém-se o segundo termo a_2, q é dita a razão da PG. Uma vez mais, multiplicando-se a constante q pelo segundo termo, a_2, tem-se o terceiro termo, a_3, da PG. Seguindo esse pensamento, obtém-se:

a_1

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$

$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^3$

...

$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_q \cdot \underbrace{q \cdot ... \cdot q}_{n\text{-}1\ fatores} = a_1 \cdot q^{n-1}.$

Logo, o n-ésimo termo é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \tag{2.5}$$

A taxa de crescimento i de cada termo seguinte de uma PG é constante. E pode ser calculada por: $i = \dfrac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}}$, em que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ e $a_{n-1} = a_1 \cdot q^{n-2}$ (PONAHT, 2015). Assim, tem-se:

$$i = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{a_1 \cdot q^{n-1} - a_1 \cdot q^{n-2}}{a_1 \cdot q^{n-2}} = \frac{1 - q^{-1}}{q^{-1}} = (1 - \frac{1}{q}) \cdot q = q - 1. \tag{2.6}$$

Portanto, a razão de uma progressão geométrica dada em função de sua taxa de crescimento i é:

$$q = 1 + i. \tag{2.7}$$

2.2.4 Capitalização Composta

O regime de capitalização composta inclui no capital não apenas os juros de cada período, mas também o retorno dos juros acumulados até o momento anterior. Trata-se de um comportamento proporcional a uma progressão geométrica (PG), onde os juros são sempre calculados sobre o saldo verificado no início do respectivo período. Este processo de formação de juros difere daquele descrito para os juros simples, onde o capital gera apenas juros, sem retorno, que se formavam em períodos anteriores. Teoricamente, os juros compostos são mais eficientes aos juros simples, principalmente por sua capacidade de separar os vencimentos. No regime de juros compostos, a equivalência de capital pode ser determinada em qualquer dia, refletindo melhor a realidade das operações reais do que o juros simples (NETO, 2012).

Por exemplo, quando se trata de investimentos financeiros, a PG e a capitalização de juros compostos estão relacionadas enquanto o rendimento de um investimento cresce, sendo calculado utilizando-se a fórmula da capitalização composta.

Assim, tomando o primeiro termo a_0 e igualando ao capital inicial C e a razão q igual $q = 1 + i$, tem-se:

$$a_n = a_0 \cdot q^n = C(1+i)^n. \tag{2.8}$$

Nessa fórmula, o montante M produzido no final da capitalização de um investimento é dado por:

$$M = C(1+i)^n, \tag{2.9}$$

onde M é o montante, C é o capital inicial, i é a taxa de juros e n é o número de períodos.

2.3 Capitalização Contínua

O regime de capitalização contínua é um método de cálculo de juros nos quais os juros são calculados e incorporados ao principal continuamente ao longo do tempo. Nesse sistema, a taxa de juros é aplicada ao saldo atual da dívida ou investimento em intervalos muito pequenos, geralmente de forma diária, resultando em um crescimento exponencial do capital.

Esse método de capitalização é amplamente utilizado em investimentos financeiros, como contas de poupança e investimentos em renda fixa, onde os juros são pagos regularmente ao longo do tempo e calculados com base no saldo atual da conta. A capitalização contínua também é usada em empréstimos de longo prazo, como hipotecas, onde os juros são calculados diariamente com base no saldo da dívida (NETO, 2012).

Para o cálculo da capitalização contínua, usa-se:

$$M = C \cdot \left[\lim_{t\to\infty} \left(1 + \frac{i}{t}\right)^t\right] = C \cdot e^{i\cdot t}, \tag{2.10}$$

em que M é o montante, C é o capital inicial, i é a taxa e t é o tempo.

Esse caso é obtido com o limite fundamental, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

2.4 Taxas de Juros

A taxa de juros i é o fator que determina o valor dos juros J, ou seja, a remuneração do elemento de capital utilizado por um determinado período. Ela sempre se refere a uma unidade de tempo (mês, semestre, ano, etc.) sendo representada, de forma análoga, de duas maneiras: taxa percentual e taxa unitária.

A taxa percentual refere-se aos centos do capital, isto é, a valor dos juros para cada centésima parte do capital. Já a taxa unitária concentra-se na unidade de capital, onde reflete o desempenho de cada unidade de capital em um determinado período (NETO, 2012). A conversão da taxa percentual em unitária é tratada simplesmente pela divisão do percentual por 100.

2.4.1 Taxas Proporcionais e Taxas Equivalentes

As taxas proporcionais (ou lineares) são definidas como aquelas cujos quocientes e os períodos de capitalização, quando colocados na mesma unidade de tempo, são iguais, e podem ser expressas em diferentes unidades de tempo, que quando aplicadas ao mesmo capital, no mesmo período, geram o mesmo montante ao final desse período. Já as taxas equivalentes, no regime de juros simples, podem ser consideradas idênticas às taxas proporcionais.

2.4.2 Taxas Equivalentes

A ideia de taxas de juros equivalentes no regime de juros compostos segue uma capitalização exponencial, em que, para Frota (2017), a expressão desta taxa é a média geométrica da taxa de juros do período inteiro, assim:

$$i_q = \sqrt[q]{1+i} - 1, \tag{2.11}$$

em que q é o número de períodos da capitalização (FROTA, 2017).

2.4.3 Taxa Efetiva e Taxa Nominal

A taxa efetiva é o processo de formação da taxa de juros do regime composto ao longo do período de capitalização, ou seja, é a taxa de juros apurada durante todo o prazo n, onde é formada exponencialmente através do período de capitalização (NETO, 2012). A taxa efetiva é

$$i_f = (1+i)^q - 1. \tag{2.12}$$

Segundo Neto (2012), a taxa nominal (i_N) é a taxa contratada ou declarada em uma operação financeira. Por exemplo, se um banco lhe oferece um fundo de investimento que remunera 15% ao ano, esta é a taxa nominal, e pode ser calculada por:

$$i_N = \frac{J}{VN}, \tag{2.13}$$

onde VN é o valor nominal (podendo ser o valor de um empréstimo ou investimento).

2.5 Cálculo Diferencial e Integral

O Cálculo Diferencial e Integral é uma área fundamental da matemática que estuda o comportamento de funções e suas variações ao longo do tempo ou do espaço. Ele se concentra em duas operações fundamentais: a diferenciação e a integração. A diferenciação é usada para obter a taxa de variação instantânea de uma função em um determinado ponto, enquanto a integração é usada para determinar a área sob uma curva ou para calcular a soma acumulada de uma função. O Cálculo tem aplicações em várias áreas da ciência e da engenharia, sendo considerado um dos pilares da matemática moderna (FLEMMING, 2006).

Estudos mais aprofundados podem ser consultados em Lima (2004), Flemming (2006), Lima (2006), Vilches (2012).

2.5.1 Funções de Uma Variável Real

Uma função de uma variável real é uma relação matemática que descreve uma relação entre um conjunto de valores de entrada, chamados de domínio, e um conjunto correspondente de valores de saída, chamados de contra-domínio. Essas funções são geralmente representadas por uma expressão matemática que relaciona a variável de entrada com a variável de saída.

A função é definida pela notação $f(x)$, onde f representa a função e x é a variável de entrada. A função atribui a cada valor de x um valor correspondente de saída, sendo geralmente representado por $f(x)$ (LIMA, 2006).

Existem diferentes tipos de funções de uma variável, como funções lineares, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, entre outras. Cada tipo de função possui características específicas que descrevem seu comportamento e propriedades matemáticas (IEZZI, 2013).

2.5.2 Limites de Funções de Uma Variável Real

Os limites de funções de uma variável real permitem estudar o comportamento de uma função à medida que a variável se aproxima de um determinado valor. Um limite descreve o valor que a função se aproxima à medida que sua variável independente se aproxima de um certo valor (LIMA, 2006).

Definição 2.5.1. Seja $f(x)$ uma função de valor real definida em um subconjunto A dos números reais. Seja a um ponto de acumulação de A e seja L um número real. Diz-se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \tag{2.14}$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que, para todo $x \in A$, se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Em outras palavras, a definição diz que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é L se, para qualquer intervalo em torno de L, por menor que seja (dado por ε), sempre pode-se encontrar um intervalo em torno de a, por menor que seja (dado por δ), de modo que os valores da função $f(x)$ estejam contidos no intervalo em torno de L (FLEMMING, 2006).

O estudo dos limites envolve uma série de propriedades e técnicas que permitem determinar valores precisos de limites de funções matemáticas.

2.5.3 Continuidade de Funções de Uma Variável Real

A continuidade de funções reais de uma variável é um tema importante na análise matemática que descreve o comportamento suave e contínuo de uma função em um determinado intervalo (LIMA, 2006).

Definição 2.5.2. Diz-se que $f(x)$ é contínua em a se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, para todo x pertencente a A.

Em termos de continuidade em um intervalo, uma função $f(x)$ é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ se ela for contínua em todos os pontos do intervalo, ou seja, f é contínua em c para todo c pertencente ao intervalo $[a, b]$ (FLEMMING, 2006).

Existem vários tipos de descontinuidades que podem ocorrer em funções reais de uma variável, tais como descontinuidades removíveis, descontinuidades de salto e descontinuidades infinitas.

2.5.4 Derivadas de Funções de Uma Variável Real

As derivadas em matemática permitem determinar a taxa de variação instantânea de uma função em relação à sua variável independente.

Definição 2.5.3. Seja $f(x)$ uma função diferenciável definida em um intervalo I contendo um ponto $x = a$. A derivada de $f(x)$ em relação à x, denotada por $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$, é definida por:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \quad (2.15)$$

Essa definição representa o limite da razão de variação da função $f(x)$ quando x se aproxima de a, onde h representa uma pequena variação em x, próximo a a. A derivada $f'(a)$ indica a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(a, f(a))$ (FLEMMING, 2006; LIMA, 2006).

As derivadas têm várias aplicações importantes na matemática e em outras áreas, como física, economia e engenharia. Elas são usadas para determinar taxas de variação, encontrar máximos e mínimos de funções, resolver equações diferenciais, modelar fenômenos naturais e muito mais. Na economia, as derivadas são amplamente aplicadas para analisar o comportamento das variáveis econômicas, como no cálculo da taxa de crescimento de taxas de juros, elasticidade de preço e demanda, maximização de lucros e análise de custos.

2.5.5 Integral de Funções de Uma Variável Real

A integral desempenha um papel importante no Cálculo, sendo uma ferramenta fundamental na matemática. Ela permite calcular a área sob uma curva, bem como a acumulação de quantidades ao longo de um intervalo.

Formalmente, a integral de uma função $f(x)$ em relação à variável x é definida como o limite de uma soma infinitesimal da área de infinitos retângulos. Essa soma é obtida ao dividir o intervalo de integração em subintervalos decrescentes e, em seguida, calcular a área de cada retângulo formado pela altura da função $f(x)$ no subintervalo multiplicada pela largura do subintervalo (FLEMMING, 2006).

A integral indefinida é utilizada para encontrar uma antiderivada ou primitiva da função $f(x)$, ou seja, uma função $F(x)$ cuja derivada é igual a $f(x)$. O resultado de uma integral indefinida é uma família de funções, por existir uma constante arbitrária adicionada à solução (VILCHES, 2012).

Definição 2.5.4. Uma função $F(x)$ é chamada de primitiva da função $f(x)$ no intervalo I se para todo $x \in I$, tem-se:

$$F'(x) = f(x). \quad (2.16)$$

Definição 2.5.5. Seja $F(x)$ a primitiva da função $f(x)$ no intervalo I. A expressão $F(x) + c, c \in \mathbb{R}$ é chamada a integral indefinida da função $f(x)$, e denotada por:

$$\int f(x)dx = F(x) + c. \tag{2.17}$$

Já a integral definida, calcula o valor numérico da área sob a curva da função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$. O resultado é um número real que representa o valor acumulado da quantidade contínua representada pela função (VILCHES, 2012).

Definição 2.5.6. Sejam $f(x)$ uma função definida no intervalo $[a, b]$, P uma partição qualquer do intervalo $[a, b]$ e c_i um ponto qualquer em cada subintervalo definido pela partição. A integral definida de $f(x)$ de a até b é:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i. \tag{2.18}$$

Para Lima (2006) uma partição de um intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito de pontos $P = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\} \subset [a, b]$ tal que $a \in P$ e $b \in P$.

Teorema 2.5.1. Se a função $f(x)$ é contínua em $[a, b]$, então é integrável em $[a, b]$.

A integração pode ser realizada utilizando várias técnicas, tais como integração por substituição, integração por partes e integração por frações parciais. Além disso, existem diversas regras e propriedades que facilitam a avaliação de integrais.

Na Economia, o conceito de integral se refere a uma medida que considera a soma contínua de pequenas partes de uma variável ao longo de um intervalo de tempo ou espaço. Essa medida permite entender a acumulação de quantidades ao longo do tempo e, consequentemente, as mudanças no comportamento econômico. Por exemplo, utiliza-se a integral para determinar o valor presente líquido de um projeto de investimento, que envolve somar os fluxos de caixa futuros descontados por uma taxa de juros (VILCHES, 2012).

2.5.6 Funções de Várias Variáveis Reais

As funções de várias variáveis são uma parte importante da matemática e da análise multivariada. Essas funções envolvem mais de uma variável independente e podem ter uma ou mais variáveis dependentes. A função de várias variáveis atribui um valor a cada combinação de valores das variáveis independentes. Essa função pode ser representada matematicamente como $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as variáveis independentes e $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é a função (LIMA, 2004).

Uma das aplicações das funções de várias variáveis reais é na otimização. As funções de várias variáveis são utilizadas para calcular os valores máximos ou mínimos de uma função, sujeitos a certas restrições. Essas técnicas são aplicadas para resolver problemas em áreas como economia, logística, física e engenharia. Para Vilches (2012), elas também desempenham um papel importante na análise de dados e aprendizado de máquina. As técnicas de regressão múltipla usam funções de várias variáveis para modelar as relações entre várias variáveis independentes e uma variável dependente. Esses modelos são usados para fazer previsões e tomar decisões em áreas como finanças, marketing e saúde.

Neste trabalho, realiza-se a análise da ETTJ onde as funções de várias variáveis desempenham um papel importante. A ETTJ refere-se à relação entre as taxas de juros de diferentes vencimentos para um mesmo instrumento financeiro, como títulos de dívida ou empréstimos. As funções de várias variáveis são utilizadas para modelar e entender essa relação complexa. Essas funções geralmente consideram variáveis como o prazo até o vencimento, a taxa de juros de curto prazo, a volatilidade do mercado, entre outras.

2.5.7 Limites de Funções de Várias Variáveis Reais

Os limites de funções de várias variáveis reais são uma extensão dos conceitos de limites de funções de uma variável real. Quando se trabalha com funções de várias variáveis, em vez de uma única variável, a noção de limite também é estendida para capturar o comportamento da função à medida que se aproxima de um ponto específico no domínio (LIMA, 2004).

Definição 2.5.7. Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e (a, b) um ponto de acumulação de A. Diz-se que o limite de $f(x, y)$, quando (x, y) se aproxima de (a, b) é um número real L se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$, tal que $|f(x, y) - L| < \varepsilon$, sempre que $\|(x, y) - (a, b)\| < \delta$, para todo $(x, y) \in A$.

O limite de uma função de várias variáveis é definido de forma análoga ao caso unidimensional. Diz-se que o limite de uma função $f(x, y)$ existe quando (x, y) se aproxima de (a, b) no domínio da função, e escreve-se:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L. \tag{2.19}$$

As funções de várias variáveis reais têm diversas aplicações na economia, especialmente em áreas como a teoria da produção, a teoria do consumidor, a teoria dos jogos, entre outras. Os limites dessas funções também são importantes na análise econômica, por ajudarem a determinar comportamentos e a prever resultados (VILCHES, 2012).

2.5.8 Continuidade de Funções de Várias Variáveis Reais

Uma função de várias variáveis reais é considerada contínua em um ponto se, intuitivamente, pequenas variações nos valores das variáveis resultam em pequenas variações nos valores da função.

Definição 2.5.8. Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de n variáveis reais, definida em um conjunto A. Diz-se que f é contínua em um ponto $(a_1, a_2, cdots, a_n) \in A$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo ponto $(x_1, x_2, cdots, x_n) \in A$, se $\|(x_1, x_2, cdots, x_n) - (a_1, a_2, cdots, a_n)\| < \delta$, então $|f(x_1, x_2, cdots, x_n) - f(a_1, a_2, cdots, a_n)| < \varepsilon$.

Essa definição pode ser estendida para a continuidade em um conjunto, onde uma função é considerada contínua em um conjunto A se for contínua em cada ponto de A. Além disso, uma função $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é considerada contínua em todo o seu domínio se for contínua em cada ponto do seu domínio (LIMA, 2004), em que essas explicações formais estabelecem os critérios para determinar a continuidade de uma função de várias variáveis reais em pontos individuais, em conjuntos ou em todo o seu domínio.

Na economia, a continuidade é especialmente importante em modelos econômicos que envolvam maximização de lucros, minimização de custos e na análise de equilíbrio de mercado. A partir da continuidade das funções, é possível garantir que esses modelos possuam soluções únicas e estáveis, facilitando a análise e o planejamento de políticas econômicas (VILCHES, 2012).

2.5.9 Derivadas Parciais

As derivadas parciais são uma ferramenta importante na matemática, sendo utilizadas para obter as taxas de variação de uma função em relação a uma variável específica, mantendo as demais variáveis constantes.

Definição 2.5.9. Dada uma função multivariável $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a derivada parcial de f em relação à variável x_i, para $i = 1, 2, 3 \ldots n$, denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, é definida como o limite da taxa de variação de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ com respeito a x_i à medida que a variação em x_i se torna infinitesimal, mantendo as demais variáveis constantes, isto é:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \cdots x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\Delta x_i}, \tag{2.20}$$

onde Δx_i representa uma pequena variação em x_i.

O resultado da derivada parcial de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em relação a x_i é uma nova função que descreve a taxa de variação instantânea de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ com relação a x_i em cada ponto do domínio. Isso permite analisar como a função f responde às mudanças em uma variável específica enquanto as outras são mantidas constantes. As derivadas parciais também podem ser usadas para determinar pontos críticos, calcular gradientes e determinar a direção de máxima variação de uma função multivariável (LIMA, 2004).

As derivadas parciais são usadas em muitas áreas da matemática, economia, física e engenharia para modelar e analisar sistemas complexos com várias variáveis. Elas são uma ferramenta fundamental na otimização de funções de várias variáveis e na solução de equações diferenciais parciais.

2.6 Equações Diferenciais

As equações diferenciais são ferramentas matemáticas essenciais para a modelagem e resolução de problemas que envolvem taxas de mudança. Elas descrevem a relação entre uma função desconhecida e suas derivadas, representando a variação instantânea de uma grandeza ao longo do tempo ou do espaço. Essas equações possuem aplicações em diversas áreas, como física, engenharia, economia e biologia, permitindo a compreensão e previsão de fenômenos naturais e processos dinâmicos (VILCHES, 2012).

Uma equação diferencial é uma expressão matemática que relaciona uma função desconhecida com suas derivadas. Ela é definida em termos das variáveis independentes e dependentes, e seu objetivo é encontrar a função desconhecida que satisfaz essa relação. A solução de uma equação diferencial consiste em determinar uma função que satisfaça a equação em todo o seu domínio (BOYCE, 2015).

Existem diferentes tipos de equações diferenciais, dependendo das características das derivadas envolvidas. As equações diferenciais ordinárias envolvem apenas derivadas em relação a uma variável independente, enquanto as equações diferenciais parciais incluem derivadas parciais em relação a várias variáveis independentes. Além disso, as equações diferenciais podem ser classificadas como lineares ou não lineares, dependendo da linearidade da função desconhecida e de suas derivadas (LIMA, 2006).

A solução de equações diferenciais pode ser obtida de várias maneiras, dependendo da complexidade da equação e da disponibilidade de métodos analíticos ou numéricos. Métodos analíticos, como a separação de variáveis e os métodos de coeficientes a determinar, são usados para encontrar soluções exatas. No entanto, muitas equações diferenciais não possuem soluções analíticas conhecidas, exigindo o uso de métodos numéricos, como o método de Euler, o método de Runge-Kutta ou o método de elementos finitos, para obter soluções aproximadas (LIMA, 2006).

2.6.1 Equações Diferenciais Ordinárias

As equações diferenciais ordinárias (EDOs) são equações que envolvem derivadas de uma ou mais variáveis em relação a uma variável independente. Elas são amplamente utilizadas para modelar fenômenos físicos, biológicos, econômicos e outros sistemas dinâmicos (FLEMMING, 2006). Uma EDO é uma equação que relaciona uma função desconhecida y com suas derivadas em relação a uma variável independente x. A forma geral de uma EDO é dada por:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0, \tag{2.21}$$

onde y' denota a primeira derivada de y em relação a x, y'' denota a segunda derivada e y^n denota a enésima derivada. A função F representa a relação entre x, y e suas derivadas (ZILL, 2001).

As equações diferenciais ordinárias podem ser classificadas em diferentes categorias com base na sua linearidade ou não e por sua ordem. Uma EDO é considerada linear quando todos os termos envolvendo a função desconhecida e suas derivadas são lineares. Em outras palavras, a função incógnita e suas derivadas aparecem apenas elevadas à potência 1 e multiplicadas por termos constantes ou variáveis (BOYCE, 2015). Por exemplo, uma EDO linear de primeira ordem pode ser representada por:

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x), \tag{2.22}$$

onde $y(x)$ é a função incógnita, $y'(x)$ é a primeira derivada de y em relação à x, e $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ são conhecidas. Já uma EDO linear de segunda ordem pode ser representada por:

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x), \tag{2.23}$$

onde $y(x)$ é a função desconhecida, $y''(x)$ é a segunda derivada de y em relação à x, $y'(x)$ é a primeira derivada de y em relação à x, e $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ e $f(x)$ são funções conhecidas de x.

Uma EDO é considerada não linear se qualquer termo que envolva a função desconhecida ou suas derivadas for elevado a uma potência diferente de 1, ou multiplicado por coeficientes que dependem da função desconhecida (ZILL, 2001). Por exemplo, uma EDO não linear de segunda ordem pode ser expressa como:

$$y''(x) + f(x, y(x), y'(x)) = 0, \tag{2.24}$$

onde $y''(x)$ é a segunda derivada de y em relação a x e $f(x, y(x), y'(x))$ é uma função não linear que envolve a função desconhecida e suas derivadas.

Já quanto a sua ordem, uma EDO é determinada pela maior ordem das derivadas que aparecem na equação. Ela indica o número de vezes que a função desconhecida é diferenciada. Por exemplo, uma EDO de primeira ordem tem a forma:

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0, \tag{2.25}$$

onde $y(x)$ é a função desconhecida e $y'(x)$ é a primeira derivada de y em relação a x. Desse modo, uma EDO de segunda ordem tem a forma:

$$G(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0, \tag{2.26}$$

onde $y''(x)$ é a segunda derivada de y em relação a x.

A homogeneidade das equações diferenciais ordinárias (EDOs) refere-se à propriedade de uma equação em relação à escala das variáveis envolvidas. Uma EDO é considerada homogênea se todos os termos envolvendo a função desconhecida e suas derivadas têm a mesma dimensão ou escala. Já as equações diferenciais ordinárias não homogêneas são equações diferenciais no qual o termo não homogêneo está presente (BOYCE, 2015). A forma geral de uma equação diferencial ordinária não homogênea de primeira ordem é dada por:

$$\frac{dx}{dy} + P(x)y = Q(x). \tag{2.27}$$

Resolver uma EDO envolve determinar a função $y(x)$ que satisfaz a equação. Existem várias técnicas e métodos para resolver EDO, incluindo métodos analíticos, como a substituição, a transformada de Laplace e os métodos numéricos, Euler, Runge-Kutta e de diferenças finitas (ZILL, 2001).

Neste trabalho, estudam-se as EDOs lineares não homogêneas de segunda ordem com raízes reais diferentes e raízes reais iguais, portanto, a solução das demais EDOs é omitida, pois não faz parte do escopo deste trabalho.

A solução geral de uma EDO linear não homogênea de segunda ordem pode ser obtida pelo método da substituição, sendo composta pela soma de uma solução homogênea $y_h(x)$ e uma solução particular $y_p(x)$ (BOYCE, 2015). Suponha-se que se tenha a equação diferencial:

$$ay'' + by' + cy = k. \tag{2.28}$$

onde a, b, c e k são constantes e $a \neq 0$.

Para resolver essa equação, primeiramente é necessário determinar a solução homogênea, a qual é uma combinação linear de funções exponenciais. Desse modo, faz-se a substituição $y = e^{\tau x}$, onde τ é uma constante a ser determinada. Derivando y duas vezes em relação à x e substituindo em (2.28), tem-se:

$$a\tau^2 e^{\tau x} + b\tau e^{\tau x} + c e^{\tau x} = 0. \tag{2.29}$$

Dividindo-se (2.29) por $e^{\tau x}$, obtém-se:

$$a\tau^2 + b\tau + c = 0, \tag{2.30}$$

onde (2.30) é uma equação quadrática em τ. Resolvendo-se essa equação, obtêm-se as raízes τ_1 e τ_2 .

Para raízes reais e diferentes ($\tau_1 \neq \tau_2$), a solução homogênea é da forma:

$$y_h(x) = B \cdot e^{\tau_1 x} + C \cdot e^{\tau_2 x}, \tag{2.31}$$

onde B e C são constantes a serem determinadas a partir de condições iniciais e/ou de contorno.

Para raízes reais iguais ($\tau_1 = \tau_2$), a solução homogênea é da forma:

$$y_h(x) = (B + Cx) \cdot e^{\tau x}, \tag{2.32}$$

onde B e C são constantes a serem determinadas a partir de condições iniciais e/ou de contorno.

Para encontrar a solução particular, assume-se a forma $y_p(x) = A$, onde A é uma constante a ser determinada. Essa forma é adequada quando a equação diferencial possui um termo constante (ZILL, 2001).

Substituindo-se $y_p(x) = A$ em (2.28):

$$a(0) + b(0) + c \cdot A = k, \tag{2.33}$$

onde, $y'(A) = y''(A) = 0$ e chega-se a $c \cdot A = k$, portanto, $A = \dfrac{k}{c}$.

Então, a solução particular considerando $y_p(x) = A$, onde A é uma constante, é:

$$y_p(x) = A = \frac{k}{c}. \tag{2.34}$$

Logo, a solução geral é dada por:

$$y = A + B \cdot e^{\tau_1 x} + C \cdot e^{\tau_2 x}, \text{para raízes reais e diferentes,} \tag{2.35}$$

$$y = A + B \cdot e^{\tau x} + Cx \cdot e^{\tau x}, \text{para raízes reias e iguais.} \tag{2.36}$$

Lembre-se de que essas soluções particulares são válidas quando $f(x)$ é uma função constante. Para outros tipos de funções $f(x)$, como funções polinomiais ou exponenciais, são necessárias abordagens diferentes para calcular a solução particular. Se forem fornecidas condições iniciais, podem-se usar essas condições para determinar os valores das constantes A, B e C. Substituindo-se as condições iniciais na solução geral e resolvendo-se o sistema resultante de equações para encontrar os valores das constantes (BOYCE, 2015).

Para a solução das equações diferenciais ordinárias homogêneas, pode-se utilizar diferentes métodos, dependendo da forma das funções envolvidas. Alguns métodos comuns incluem o método da variação de parâmetros, o método dos coeficientes a determinar e o método de fator integrante (ZILL, 2001).

2.7 Regressões Lineares

A regressão linear é uma técnica estatística utilizada para modelar a relação entre uma variável dependente contínua e uma ou mais variáveis independentes. Ela visa estabelecer uma equação matemática que representa essa relação, permitindo a previsão ou estimativa do valor da variável dependente com base nos valores das variáveis independentes (GUJARATI, 2011). Podendo ser separada em dois tipos, regressão linear simples e regressão linear multivariada.

2.7.1 Regressão Linear Simples

A regressão linear simples é um método estatístico utilizado para modelar a relação entre duas variáveis, uma variável dependente e uma variável independente, via uma linha reta. Essa linha reta é chamada de linha de regressão sendo determinada pelos coeficientes de regressão.

O objetivo da regressão linear simples é obter a melhor linha de regressão que minimize a soma dos quadrados dos resíduos, ou seja, a diferença entre os valores observados e os valores previstos pelo modelo. Para estimar os coeficientes da regressão, são utilizados métodos de mínimos quadrados (GUJARATI, 2011).

O método de mínimos quadrados tem em vista encontrar os valores dos coeficientes de regressão que minimizam a soma dos quadrados dos resíduos. O coeficiente de regressão para a variável independente é chamado de coeficiente angular (β_1), e o coeficiente de regressão para a variável dependente é chamado de coeficiente linear (β_0) (WOOLDRIDGE, 2006).

A estimativa do coeficiente angular (β_1) é calculada dividindo-se a covariância entre a variável independente e a variável dependente pela variância da variável independente (GUJARATI, 2011). Essa estimativa é dada pela equação:

$$\beta_1 = \frac{cov(X,Y)}{var(X)}, \tag{2.37}$$

onde $cov(X,Y)$ é a covariância entre X (variável independente) e Y (variável dependente), e $var(X)$ é a variância da variável independente.

A covariância entre duas variáveis, X e Y, pode ser calculada utilizando:

$$cov(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{(n-1)}, \tag{2.38}$$

onde X_i e Y_i são os valores observados das variáveis X e Y, $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ são as médias das variáveis X e Y, respectivamente e n o número total de observações.

A covariância entre X e Y indica como essas duas variáveis variam em conjunto. Se a covariância for positiva, isso sugere haver uma relação direta entre as variáveis, o que significa que, em geral, quando os valores de X aumentam, os valores de Y também aumentam. Por outro lado, se a covariância for negativa, isso indica uma relação inversa, ou seja, quando os valores de X aumentam, os valores de Y tendem a diminuir (GUJARATI, 2011).

Para determinar a variância da variável independente ($var(X)$), calcula-se a média dos valores da variável independente e, em seguida, calcula-se a soma dos quadrados das diferenças entre cada valor da variável independente e a média. Essa soma dos quadrados é dividida pelo número total de observações menos 1. A fórmula para encontrar a variância ($var(X)$) é:

$$var(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{(n-1)}, \tag{2.39}$$

onde X_i é o valor observado da variável X, $\bar{X}$ é a média da variável X e n o número total de observações da variável independente. Vale ressaltar que a variância é uma medida da dispersão dos dados ao redor da média e que fornece uma indicação da variabilidade dos valores da variável independente na amostra (WOOLDRIDGE, 2006).

A estimativa do coeficiente linear (β_0) é calculada subtraindo o produto do coeficiente angular pela média da variável independente da média da variável dependente. Essa estimativa é dada pela equação:

$$\beta_0 = \bar{Y} - \beta_1\bar{X}, \tag{2.40}$$

onde $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ são as médias das variáveis X e Y e β_1 é o coeficiente angular estimado.

Uma vez que os coeficientes de regressão são estimados, é possível utilizar a equação da linha de regressão para fazer previsões para novos valores da variável independente (WOOLDRIDGE, 2006). A equação da linha de regressão é dada por:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X, \tag{2.41}$$

onde Y é a variável dependente, X é a variável independente, β_0 é o coeficiente linear estimado e β_1 é o coeficiente angular estimado.

A regressão linear simples é amplamente utilizada em diversas áreas, como economia, ciências sociais, engenharia e finanças, para analisar e prever o comportamento de uma variável em função de outra variável (GUJARATI, 2011).

2.7.2 Regressão Linear Multivariada

A regressão linear multivariada é uma técnica estatística utilizada para modelar a relação entre múltiplas variáveis independentes e uma variável dependente contínua. Ao contrário da regressão linear simples, que considera apenas uma variável independente, a regressão linear multivariada considera a influência conjunta de várias variáveis independentes (WOOLDRIDGE, 2006).

Para Wooldridge (2006), o objetivo da regressão linear multivariada é encontrar uma equação que represente a relação linear entre as variáveis independentes e a variável dependente. Essa equação é expressa como:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_n X_n + \epsilon, \tag{2.42}$$

onde Y é a variável dependente, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são as variáveis independentes, β_0 é o coeficiente de intercepção (ou coeficiente linear), $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ são os coeficientes de regressão correspondentes às variáveis independentes, e ϵ é o termo de erro.

Assim como na regressão linear simples, o método mais comum para estimar os coeficientes na regressão linear multivariada é o método dos mínimos quadrados. Esse método visa calcular os valores dos coeficientes que minimizam a soma dos quadrados dos resíduos, ou seja, a diferença entre os valores observados da variável dependente e os valores previstos pela equação de regressão (WOOLDRIDGE, 2006).

Os coeficientes estimados são calculados utilizando-se técnicas matemáticas que envolvem a inversão de matrizes. O processo de estimativa envolve a obtenção das matrizes de covariância e covariância-covariância, bem como a solução do sistema de equações normais (WOOLDRIDGE, 2006).

Dados n pares de observações $(y_i, x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{pi})$, onde y_i é a variável dependente, $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{pi}$ são as p variáveis independentes e i varia de 1 a n. Os coeficientes estimados são encontrados utilizando-se:

$$\beta = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y, \tag{2.43}$$

onde β é um vetor de coeficientes estimados, X^T representa a transposta[1] da matriz X, $(X^T \cdot X)^{-1}$, é a matriz inversa[2] do produto entre a transposta de X e X, $X^T \cdot Y$ é o produto entre a transposta de X e o vetor Y. O resultado é o vetor β, que contém os coeficientes estimados para a regressão linear multivariada.

A matriz X é uma matriz de dimensão n x $(p+1)$, n linhas e $(p+1)$ colunas, onde a primeira coluna é preenchida com uns, representando o termo de intercepção, e as colunas restantes são preenchidas com os valores das variáveis independentes (WOOLDRIDGE, 2006). Assim, obtém-se:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{p1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{p2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{pn} \end{bmatrix}. \tag{2.44}$$

O vetor Y é um vetor coluna de dimensão 1 x n, 1 linha e n colunas, contendo os valores da variável dependente:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}. \tag{2.45}$$

A regressão linear multivariada é amplamente utilizada em várias áreas, como economia, ciências sociais, ciências da saúde e engenharia, para modelar e prever o comportamento de variáveis dependentes complexas, considerando múltiplas variáveis independentes. Essa técnica fornece *insights* sobre as relações entre as variáveis e pode ser usada para fazer previsões e tomar decisões informadas com base nos resultados do modelo (WOOLDRIDGE, 2006).

No próximo capítulo, apresentam-se os conceitos relacionados ao mercado financeiro e dos Títulos do Tesouro Direto.

---

[1] A matriz transposta de uma matriz A é obtida ao trocar as linhas pelas colunas de A. Denota-se a matriz transposta de A como A^T Para uma matriz de dados X de dimensão n x $(p+1)$, a matriz transposta ^{T} terá dimensão $(p+1)$ x n, onde as linhas de X se tornam colunas em X^T.

[2] A matriz inversa de uma matriz quadrada A, denotada como A^{-1}, é uma matriz que, quando multiplicada por A, resulta na matriz identidade. Em termos matemáticos tem-se, $A^{-1} \cdot A = I$ onde I é a matriz identidade.

3 Mercado Financeiro

Em Economia, um mercado financeiro é o ambiente onde ocorre a compra e venda de ativos como títulos, moedas, ações, derivativos, *commodities*, mercadorias e outros ativos com algum valor financeiro.

A função dos mercados financeiros é permitir que compradores e vendedores se encontrem. Assim, nesse ambiente, a troca de mercadorias ocorre livremente, sem grandes interferências externas. Geralmente, os participantes nos mercados financeiros são divididos em dois grupos: investidores que fornecem capital e mutuários que levantam capital em troca de juros ou parte dos lucros de um acordo com os acionistas.

Normalmente, cada país tem seu próprio ambiente financeiro. Por exemplo, a Bolsa de Valores de Nova York (NYSE), com o mercado de câmbio, é um dos maiores representantes do mercado financeiro do planeta (REIS, 2022). Lá, trilhões de dólares são negociados diariamente. No mercado financeiro brasileiro, esse mesmo papel é desempenhado pela B3 (Brasil, Bolsa, Balcão), a Bolsa de Valores de São Paulo, cujo principal índice é o IBOVESPA (REIS, 2022).

3.1 Títulos Públicos Federais

O Governo Federal (GOV) (FEDERAL, 2022) emite títulos públicos para levantar capital para financiar suas operações e quitar suas obrigações mobiliárias (assim chamadas, porque decorrem da emissão de títulos). O órgão responsável pela emissão, controle e administração da dívida mobiliária federal é a Secretaria do Tesouro Nacional.

Conforme a Comissão de Valores Mobiliários (CVM) (MOBILIÁRIOS, 2022) existem muitos tipos de títulos públicos, cada um com suas características próprias em termos de vencimento e rendimento. Estão disponíveis obrigações a juros pré-fixados, pós-fixados e mistos. Alguns são atualizados pela taxa de câmbio, enquanto outros, pela inflação, atualizados pela taxa SELIC (definida pelo Comitê de Política Monetária do COPOM, do Banco Central do Brasil), etc.

A Taxa SELIC é a taxa básica de juros da economia. É o principal instrumento de política monetária utilizado pelo Banco Central do Brasil (BCB) para controlar a inflação. Ela influencia todas as taxas de juros do país, isto é, as taxas de juros dos empréstimos, de financiamentos e das aplicações financeiras (FEDERAL, 2022).

3.2 Tesouro Direto

Segundo Federal (2022), o Tesouro Direto é um programa do Tesouro Nacional desenvolvido em parceria com a Brasil, Bolsa, Balcão (B3) para vender títulos públicos federais a pessoas físicas pela Internet. Idealizado em 2002, esse programa foi criado visando democratizar o acesso aos títulos públicos. Antes dos Fundos Diretos, as aplicações em títulos públicos por pessoas físicas só eram possíveis indiretamente, por meio de fundos de renda fixa. A cobrança de altas taxas de administração, principalmente para investimentos de baixo valor, reduziu a atratividade desse tipo de investimento. O Tesouro Direto tem contribuído para a diversificação e complementação das opções alternativas de investimento disponíveis no mercado, oferecendo títulos com diferentes tipos de rentabilidade (prefixada, ligada à variação da inflação ou à variação da taxa de juros básica da economia — SELIC), de prazos de vencimento e de fluxos de remuneração (FEDERAL, 2022).

A seguir listam-se os títulos públicos federais atualmente em negociação no mercado, e a fim de manter o padrão de notação, nos cálculos usam-se as mesmas notações utilizadas pelo Banco Central do Brasil (BC) para os títulos do Tesouro Direto (DIRETO, 2008).

3.2.1 Títulos Prefixados

São títulos do governo com rendimento fixo no momento da compra. Os investidores sabem exatamente quanto receberão, se mantiverem os títulos até a data de vencimento. São títulos prefixados: o Tesouro Prefixado (LTN) e o Tesouro Prefixado com juros semestrais (NTN-F) (DIRETO, 2008).

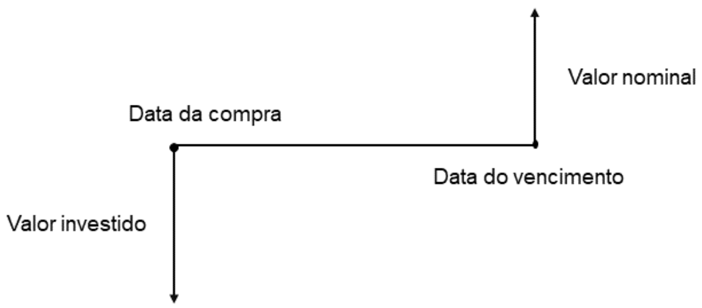
3.2.2 Tesouro Prefixado (LTN)

O tesouro prefixado é emitido pelo Tesouro Nacional para cobertura de deficit orçamentário, bem como para realização de operações de crédito por antecipação da receita. Possui um processo de liquidação simples, ou seja, o investidor realiza uma aplicação e recebe o valor nominal (valor do investimento mais rendimento) na data de vencimento do título (MOBILIÁRIOS, 2022). A Figura 2 demonstra o fluxo de pagamento simples do tesouro prefixado (LTN).

O cálculo do preço e da rentabilidade do tesouro LTN no momento da compra, segundo o Tesouro Direto (DIRETO, 2008) é:

$$\text{Rentabilidade} = \frac{\text{VN}}{\text{Preço}} - 1. \tag{3.1}$$

Figura 2 – Fluxo de pagamento do LTN.



Fonte: Elaborada pelo autor

$$\text{Preço} = \frac{VN}{(1 + taxa)^{\frac{du}{252}}}, \tag{3.2}$$

onde VN é seu valor nominal no vencimento no qual é sempre R\$1.000,00, a $taxa$ é a taxa de juros a qual é negociada no momento da compra e du é o número de dias úteis entre a data de liquidação (inclusive) e a data de vencimento (exclusive). É importante ressaltar que a data de liquidação é sempre o primeiro dia útil após a data da compra.

Para entender como se calcula a taxa de rentabilidade (a.a) do Tesouro Prefixado (LTN), apresenta-se a seguir um exemplo. Suponha que o investidor tenha feito uma compra no Tesouro Direto nas seguintes condições:

Tabela 1 – Tesouro Prefixado 2029 disponível no Tesouro Direto.

Data de Vencimento:	01/01/2029
Data da Liquidação:	03/05/2023
Dias úteis entre a data da liquidação e a data de vencimento:	1425
Quantidade:	1,0
Preço do título na data da compra:	R$ 520,24

Fonte: Elaborada pelo autor

Para iniciar, consideraremos um ano-base de 252 dias uteis. O padrão de 252 dias uteis para um ano e 21 dias uteis para um mês foi estabelecido pelo Banco Central do Brasil (BRASIL, 1997) em 1997, por meio da Circular 2.761/1997.

Para calcular a taxa de rentabilidade (a.a) da aplicação, basta usar (3.2), válida para todos os títulos que não fazem pagamento de cupom de juros. Assim, tem-se:

$$520,24 = \frac{1.000,00}{(1 + taxa)^{\frac{1425}{252}}}. \tag{3.3}$$

$$taxa = 12,25\%(\text{a.a}). \tag{3.4}$$

Para calcular a rentabilidade bruta da aplicação, basta usar (3.1):

$$\text{Rentabilidade} = \frac{1.000,00}{520,24} - 1 \approx 0,92218 \approx 92,21\% \text{ ao período.} \tag{3.5}$$

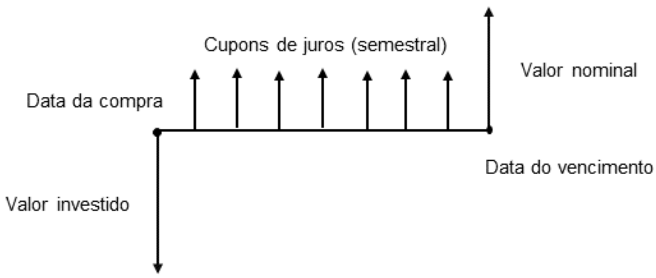
Portanto, a taxa efetiva que indica a rentabilidade bruta do investidor foi de 92,21% para todo o período em que o investidor ficou com o título, 1425 dias úteis, com uma rentabilidade anual de 12,25%, ou seja, quanto menor for o tempo que o investidor manter sua aplicação, menor será a rentabilidade do título.

3.2.3 Tesouro Prefixado com Juros semestrais (NTN-F)

Estes títulos são emitidos para fornecer os recursos necessários para cobrir o deficit orçamentário ou para realizar atividades de crédito antes da cobrança do orçamento (DIRETO, 2008). Os juros do investimento são recebidos pelo investidor ao longo do período, através do pagamento de juros semestrais (cupons de juros)[1] e no vencimento do título, como pode-se observar o fluxo de pagamento na Figura 3. Atualmente a taxa de cupons de juros semestrais é uma taxa efetiva de 10% a.a. Os cupons de juros semestrais são pagos a cada seis meses, a partir da data de vencimento do título. O fluxo de cupons semestrais aumenta a liquidez, permitindo o reinvestimento (FEDERAL, 2022).

Por serem títulos prefixados, seu rendimento é nominal, ou seja, não considera a taxa de inflação, indicado para o investidor que acredita que a taxa prefixada será maior que a taxa de juros básica da economia (SELIC).

Figura 3 – Fluxo de pagamento do NTN-F.



Fonte: Elaborada pelo autor

Segundo o Tesouro Direto (DIRETO, 2008), para títulos com pagamentos de cupons semestrais, deve ser descontado cada fluxo de pagamento à taxa de juros para se obter o preço, assim:

[1] Cupons de juros são pagamentos periódicos feitos por um emissor de títulos de dívida, como títulos do governo ou títulos corporativos, aos detentores desses títulos. Esses pagamentos representam o interesse acumulado sobre o valor nominal dos títulos.

$$\text{Preço} = \left[\frac{1.000}{(1+taxa)^{\frac{du_n}{252}}}\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1.000\cdot(\sqrt{1+cupom}-1)}{(1+taxa)^{\frac{du_i}{252}}}\right]. \tag{3.6}$$

onde *cupom* é a taxa do cupom de juros semestrais, a *taxa* é a taxa de juros negociada no momento da compra, e du_i para $i = 1, 2, \ldots, n$ representa a quantidade de dias úteis entre a data de liquidação (inclusive) e a data de vencimento do cupom ou do valor nominal (exclusive). É importante ressaltar que a data de liquidação é sempre o primeiro dia útil após a data da compra. A data de pagamento dos cupons de juros podem ser acessados no site do Tesouro Direto (DIRETO, 2023b).

Para compreender melhor como se calcula o preço do Tesouro Prefixado com Juros Semestrais (NTN-F), na Tabela 2 apresenta-se um exemplo. Suponha que o investidor tenha feito uma compra no Tesouro Direto nas seguintes condições:

Tabela 2 – Tesouro Prefixado com Juros Semestrais 2033 disponíveis no Tesouro Direto.

Data de Vencimento:	01/01/2033
Data da Liquidação:	03/05/2023
Dias úteis entre a data da liquidação e a data de vencimento:	2432
Quantidade:	1,0
Taxa Anual:	12,33%

Fonte: Elaborada pelo autor

Para calcular o preço da aplicação, basta usar (3.6). Assim, obtém-se:

$$\text{Preço} = \left[\frac{1.000}{(1,1233)^{\frac{2432}{252}}}\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1.000\cdot(\sqrt{1,10}-1)}{(1,1233)^{\frac{du_i}{252}}}\right] = \text{R\$}908,82, \tag{3.7}$$

onde du_i para $i = 1, 2, \ldots, n$ representa a quantidade de dias úteis entre a data de liquidação (inclusive) e a data de vencimento do cupom ou do valor nominal (exclusive).

Portanto, para o investidor receber o valor nominal mais os valores acrescidos dos juros semestrais, o investidor pagará pelo título o valor de R$908,82 se o manter até a data do vencimento.

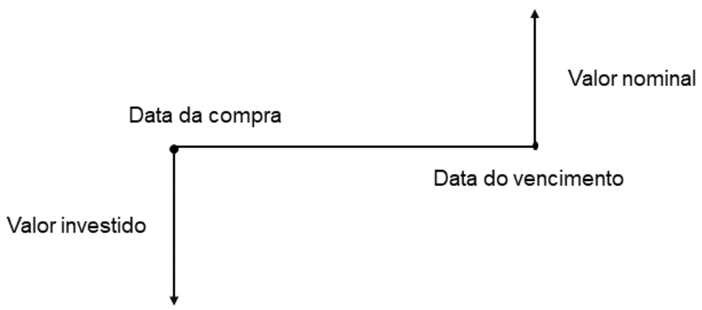
3.2.4 Títulos Pós-fixados

São títulos públicos cujo valor é ajustado pelo seu indexador. Portanto, o retorno de um título depende tanto do desempenho de seu índice quanto da taxa contratada no momento da compra. Existem dois títulos de taxa flutuante em Tesouro Direto, são eles: IPCA e SELIC (FEDERAL, 2022).

3.2.5 Tesouro IPCA+ (NTN-B Principal)

Assim como o tesouro prefixado LTN, tem um processo de liquidação simples, como pode-se observar na Figura 4, ou seja, o investidor realiza um investimento e resgata o valor nominal (valor investido mais rentabilidade) no vencimento do título, sendo que a sua rentabilidade está atrelada à variação do IPCA mais a taxa de juros apurada no momento da compra, proporcionando ao investidor um retorno real, uma vez que seu valor nominal é corrigido pela inflação (DIRETO, 2008).

Figura 4 – Fluxo de pagamento do NTN-B Principal.



Fonte: Elaborada pelo autor

O cálculo do preço (valor pago na liquidação do título), segundo (DIRETO, 2008) é:

$$\text{Preço} = \text{Cotação (\%)} \cdot VNA_{projetado}. \tag{3.8}$$

Para isso, calcula-se o VNA (valor nominal atualizado) o qual é atualmente fixado em R$1.000,00 em 15/07/2000 (data-base) de acordo com (DIRETO, 2023a), onde é multiplicado pelo Var_{IPCA}, fator de variação do IPCA entre 15/07/2000 e o dia 15 do mês anterior da compra. Assim, obtém-se:

$$\mathit{VNA} = 1.000 \cdot Var_{IPCA}. \tag{3.9}$$

O cálculo do fator de variação do IPCA (Var_{IPCA}) pode ser obtido por:

$$Var_{IPCA} = \frac{\text{n°-índices IPCA ref. ao 15° dia do mês anterior da compra}}{\text{n°-índices IPCA 15/07/2000}}, \tag{3.10}$$

onde os respectivos números-índices da série são disponibilizadas pelo (IBGE, 2023).

Para o cálculo do $VNA_{projetado}$ é necessário obter o valor do $IPCA_{projetado}$ para o mês da compra, sendo possível encontrá-lo no site do (IBGE, 2023). Então, a expressão do $VNA_{projetado}$ é:

$$VNA_{projetado} = VNA \cdot (1 + IPCA_{projetado})^{x}, \tag{3.11}$$

em que x é a razão entre o número de dias corridos entre a data de liquidação e o último dia 15, e o número de dias corridos entre o próximo dia 15 e o último dia 15, ou seja:

$$x = \frac{\text{n° de dias corridos entre a data de liquidação e dia 15 do mês atual}}{\text{n° de dias corridos entre o dia 15 do mês da compra e o dia 15 do mês seguinte}}. \tag{3.12}$$

Agora deve-se obter a cotação, que reflete o ágio ou o deságio do título:

$$\text{Cotação (\%)} = \frac{100}{(1 + taxa)^{\frac{du}{252}}}, \tag{3.13}$$

onde $taxa$ é a taxa interna de retorno; du é o número de dias úteis entre a data de liquidação (inclusive) e a data de vencimento (exclusive).

O exemplo da Tabela 3, ilustra a compra de um título, cujas principais características e metodologia de cálculo do preço são demonstradas na sequência.

Tabela 3 – Tesouro IPCA+ 2045 disponível no Tesouro Direto.

Data de Vencimento:	15/05/2045
Data da Liquidação:	03/05/2023
Dias úteis entre a data da liquidação e a data de vencimento:	5537
Quantidade:	1,0
Taxa Anual:	6,03%

Fonte: Elaborada pelo autor

Para calcular o preço da aplicação, obtém-se:

$$Var_{IPCA} = \frac{6.609,67}{1.614,62} = 4,093638131572. \tag{3.14}$$

Substituindo (3.14) em (3.9), tem-se:

$$VNA = 1.000 \cdot 4,093638131572 = 4.093,638131572. \tag{3.15}$$

O $IPCA_{projetado}$ é a projeção do IPCA calculada pelo mercado, e pode ser encontrado no site da (ANBIMA, 2023b), no qual para o mês de maio de 2023, o $IPCA_{projetado}$ é 0,47%.

Retomando a expressão (3.11) e substituindo (3.15), obtém-se:

$$VNA_{projetado} = 4.093,638131572 \cdot (1 + 0,0047)^{\frac{18}{30}} = 4.105,17136. \tag{3.16}$$

Para a cotação, tem-se:

$$\text{Cotação}(\%) = \frac{100}{(1 + 0,0603)^{\frac{5537}{252}}} = 27,62317\%. \tag{3.17}$$

Por fim, substituindo (3.17) e (3.16) em (3.8), obtém-se o preço do investimento:

$$\text{Preço} = 0,2762317 \cdot 4.105,17136 = \text{R\$}1.133,97. \tag{3.18}$$

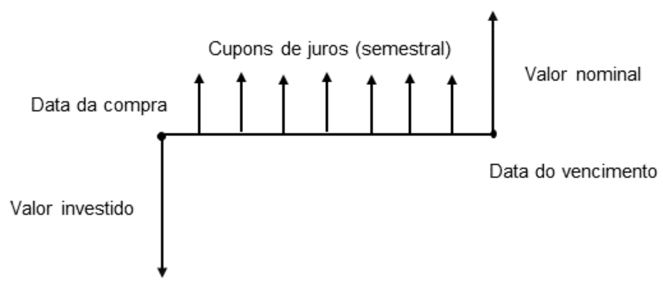
Logo, o título apresenta uma cotação de 27,62317% ao período e um preço pago de R$1.133,97.

3.2.6 Tesouro IPCA+ com Juros semestrais (NTN-B)

O rendimento dessa aplicação é recebido pelo investidor ao longo do investimento, por meio do pagamento de juros semestrais, e na data de vencimento do título, quando do resgate do valor de face (valor investido mais rentabilidade) e pagamento do último cupom de juros (FEDERAL, 2022). A Figura 5 representa o fluxo de pagamento por meio de juros semestrais.

Proporciona retornos reais, ou seja, o investidor fica protegido das variações do IPCA durante a duração do investimento. Atualmente a taxa de cupons de juros semestrais é uma taxa efetiva de 6% a.a. Ele geralmente tem o período de aplicação mais longo, indicado para investidores que desejam economias de médio/longo prazo, incluindo aposentadoria, compra da casa própria e outros.

Figura 5 – Fluxo de pagamento do NTN-B.



Fonte: Elaborada pelo autor

Em relação ao seu VNA, sua data-base é 15/07/2000, quando seu valor, por definição, foi estabelecido em R$1.000,00. Desde então, mensalmente tal valor é atualizado pela variação mensal do IPCA, divulgada entre os dias 10 e 15 de cada mês pelo IBGE.

Para o Tesouro Direto (DIRETO, 2008), o cálculo do preço (valor pago na data de liquidação do título) para o Tesouro NTN-B é igual ao do Tesouro NTN-B Principal, diferenciando-se apenas no cálculo da cotação, isto é:

$$\text{Cotação}(\%) = \left[\frac{1}{(1+taxa)^{\frac{du_n}{252}}}\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(\sqrt{1+cupom}-1)}{(1+taxa)^{\frac{du_i}{252}}}\right], \tag{3.19}$$

onde $taxa$ é a taxa interna de retorno; du_i para $i = 1, 2, \ldots, n$ representa a quantidade de dias úteis entre a data de liquidação (inclusive) e a data de vencimento do cupom ou do valor nominal (exclusive).

Para exemplificar o cálculo do preço e cotação, utilizam-se os dados da Tabela 4, que ilustra a compra de um título NTN-B:

Tabela 4 – Tesouro IPCA+ com Juros Semestrais 2040 disponível no Tesouro Direto.

Data de Vencimento:	15/08/2040
Data da Liquidação:	03/05/2023
Dias úteis entre a data da liquidação e a data de vencimento:	4346
Quantidade:	1,0
Taxa Anual:	5,92%

Fonte: Elaborada pelo autor

Para o cálculo do preço do título, usam-se as expressões (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12). Assim, tem-se:

$$Var_{IPCA} = \frac{6.609,67}{1.614,62} = 4,093638131572. \tag{3.20}$$

Substituindo (3.20) em (3.9), obtém-se:

$$VNA = 1.000 \cdot 4.093638131572 = 4.093,638131572. \tag{3.21}$$

O $IPCA_{projetado}$ para o mês de maio é 0,47%. Tendo os valores do Var_{IPCA}, VNA e $IPCA_{projetado}$, e substituindo-os na expressão (3.11), tem-se:

$$VNA_{projetado} = 4.093,638131572 \cdot (1+0,0047)^{\frac{18}{30}} = 4.105,17136. \tag{3.22}$$

Para obter a cotação, usa-se a expressão (3.19):

$$\text{Cotação}(\%) = \left[\frac{1}{(1,0575)^{\frac{4346}{252}}}\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(\sqrt{1,06}-1)}{(1,0575)^{\frac{du_i}{252}}}\right] = 102,228\% \tag{3.23}$$

onde du_i para $i = 1, 2, \ldots, n$ representa a quantidade de dias úteis entre a data de liquidação (inclusive) e a data de vencimento do cupom ou do valor nominal (exclusive)

E para se obter o preço, substitui-se (3.23) e (3.22) em (3.8).

$$Preço = 102,228\% \cdot 4.093,638131572 = \text{R\$}4.184,84. \tag{3.24}$$

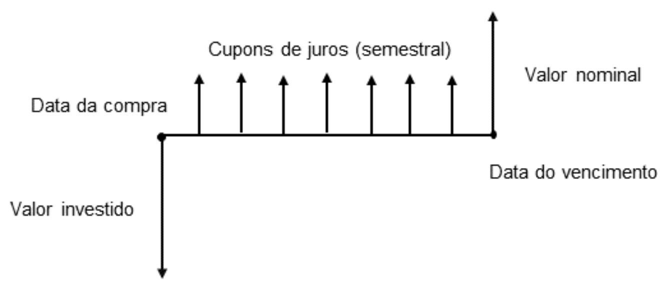
Então, o valor investido na data da compra é de R$4.184,84.

3.2.7 Tesouro Renda+ (NTN-B1)

O Tesouro Renda+ é um título híbrido, que combina características de títulos pós-fixados e pré-fixados. Ele possui uma rentabilidade fixa ao longo de todo o prazo de investimento, mas essa rentabilidade pode ser ajustada a cada ano com base em uma taxa de juros prefixada. Além disso, possui a particularidade de não pagar seu principal em uma única parcela na data de vencimento. Nesse caso, o principal é pago em 240 parcelas mensais que se iniciam na "data de conversão" e terminam de ser pagas na data de vencimento. A rentabilidade é dada pela taxa anual de juros mais a variação do indexador até o vencimento (DIRETO, 2023a).

Dessa forma, o Tesouro Renda+ oferece ao investidor a segurança de uma rentabilidade previsível, mas também permite que ele se beneficie de eventuais aumentos nas taxas de juros ao longo do tempo. Além disso, ele tem liquidez diária, o que significa que o investidor pode resgatar seu dinheiro a qualquer momento. A Figura 6 ilustra o fluxo de pagamentos do Tesouro Renda+.

Figura 6 – Fluxo de pagamento do NTN-B1.



Fonte: Elaborada pelo autor

O cálculo do preço (valor pago na data de liquidação do título) para o Tesouro Renda+ (NTN-B1) é igual ao do Tesouro IPCA+ (NTN-B). Diferenciando-se apenas no cálculo da cotação.

$$\text{Cotação}(\%) = \left[\frac{0,416826}{(1+taxa)^{\frac{du_n}{252}}}\right] + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{0,416666}{(1+taxa)^{\frac{du_i}{252}}}\right], \tag{3.25}$$

onde a $taxa$ é a taxa contratada no momento da compra; du_i para $i = 1, 2, \ldots, n$ se referem aos dias úteis entre a data de liquidação e a data do pagamento da n-ésima amortização e n é a quantidade de parcelas a serem recebidas.

O exemplo da Tabela 5, ilustra a compra de um título, cujas principais características e metodologia de cálculo do preço são demonstradas na sequência.

Tabela 5 – Tesouro Renda+ Aposentadoria Extra 2030 disponível no Tesouro Direto.

Data de Vencimento:	15/12/2049
Data da Liquidação:	03/05/2023
Dias úteis entre a data da liquidação e a data de vencimento:	6688
Data de amortização:	15/01/2030
Taxa Anual:	5,75%

Fonte: Elaborada pelo autor

Para calcular o preço da aplicação, basta usar as expressões (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12). Assim, obtém-se:

$$Var_{IPCA} = \frac{6.609,67}{1.614,62} = 4,093638131572. \tag{3.26}$$

Substituindo (3.26) em (3.9), tem-se:

$$VNA = 1.000,00 \cdot 4.093638131572 = 4.093,638131572. \tag{3.27}$$

Sabendo que o $IPCA_{projetado}$ para o mês de maio de 2023 é 0,47% e tendo os valores do Var_{IPCA}, VNA e $IPCA_{projetado}$, e substituindo-os na expressão (3.11), tem-se:

$$VNA_{projetado} = 4.093,638131572 \cdot (1 + 0,0047)^{\frac{18}{30}} = 4.105,17136. \tag{3.28}$$

Para obter a cotação, usa-se a expressão (3.25):

$$\text{Cotação}(\%) = \left[\frac{0,416826}{(1.0575)^{\frac{du_n}{252}}}\right] + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{0,416666}{(1.0575)^{\frac{du_i}{252}}}\right] = 40,08949\% \tag{3.29}$$

E para se obter o preço, substitui-se (3.28) e (3.29) em (3.8), obtém-se:

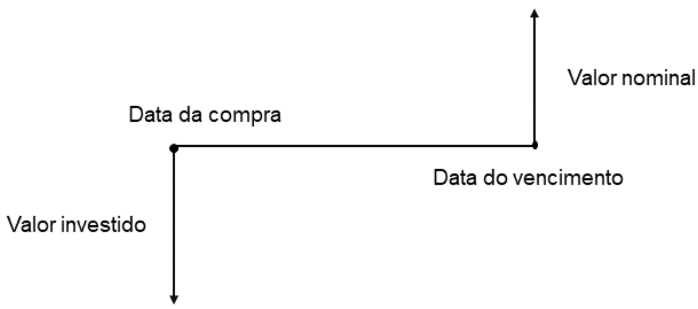
$$\text{Preço} = 40,08949\% \cdot 4.105,1713 = \text{R\$}1.645,74. \tag{3.30}$$

Portando, o preço do título a ser pago na liquidação é de R$1.645,74.

3.2.8 Tesouro SELIC (LFT)

Título cuja emissão é destinada à assunção, pela União, da dívida de responsabilidade dos Estados e do Distrito Federal. Possui um processo de liquidação simples, ou seja, o investidor realiza uma aplicação e recebe o valor nominal (valor do investimento mais rentabilidade) na data de vencimento do título. Sua rentabilidade acompanha a variação da taxa SELIC. Sua remuneração é baseada na variação diária da taxa SELIC observada entre a data de liquidação da compra e a data de vencimento do título, acrescida de prêmio ou desconto no ato da compra, se for o caso. Para (FEDERAL, 2022), o valor de mercado do Tesouro SELIC (LFT) apresenta baixa volatilidade, evitando perdas no caso de venda antecipada. O Tesouro Nacional estabeleceu que uma unidade do Tesouro SELIC (LFT), equivalendo a R$ 1.000,00 em 1º de julho de 2000 (chamada de data-base). A Figura 7 representa o fluxo de pagamento simples do Tesouro SELIC.

Figura 7 – Fluxo de pagamento do LFT.



Fonte: Elaborada pelo autor

O cálculo do preço do tesouro SELIC, segundo o (DIRETO, 2008), é dado por:

$$Preço = \text{Cotação } (\%) \cdot VNA_{projetado}, \tag{3.31}$$

onde o *Preço* é o valor pago na data de liquidação do título.

Para analisar o efeito do ágio no preço, e consequentemente, na rentabilidade do título, deve-se, primeiramente, calcular sua cotação. Para isso, basta efetuar o seguinte cálculo, utilizando, no valor da *taxa*, o ágio ou deságio presente no momento da compra:

$$\text{Cotação } (\%) = \frac{100}{(1 + taxa)^{\frac{du}{252}}}, \tag{3.32}$$

onde a $taxa$ é a taxa de juros (com ágio ou deságio); du é o número de dias úteis entre a data de liquidação (inclusive) e a data de vencimento (exclusive).

Agora, é só obter o Valor Nominal Atualizado projetado para a data da liquidação, a partir da meta para a taxa SELIC definida pelo Banco Central no período:

$$VNA_{projetado} = VNA \cdot (1 + taxa_{SELIC})^{\frac{1}{252}}. \tag{3.33}$$

Para obter o VNA do Tesouro SELIC (LFT) em qualquer data, basta corrigir o VNA em sua data-base (01/07/2000) pelo $fator_{SELIC}$ até a véspera da data de interesse. Neste caso se tem:

$$VNA = 1.000 \cdot fator_{SELIC}, \tag{3.34}$$

onde o $fator_{SELIC}$ é um índice que reflete a rentabilidade de um investimento que acompanha a variação da taxa SELIC ao longo do tempo, podendo ser encontrado no site do Banco Central do Brasil (BCB) (BRASIL, 2023).

Para exemplificar o cálculo do preço e cotação, utilizam-se os dados da Tabela 6, que ilustra a compra de um título LFT:

Tabela 6 – Tesouro SELIC 2029 disponível no Tesouro Direto.

Data de Vencimento:	01/03/2029
Data da Liquidação:	03/05/2023
Dias úteis entre a data da liquidação e a data de vencimento:	1465
Quantidade:	1,0
Taxa Anual:	0,1787%

Fonte: Elaborada pelo autor

Para o cálculo do preço do título, usam-se as expressões (3.32), (3.33) e (3.34). Assim, tem-se:

$$\text{Cotação (\%)} = \frac{100}{(1,001787)^{\frac{1465}{252}}} = 98,96742\%. \tag{3.35}$$

Para calcular o VNA do Tesouro SELIC (LFT), utiliza-se a expressão (3.34):

$$VNA = 1.000,00 \cdot 13,16595348172392 = 13,16595. \tag{3.36}$$

Agora determina-se o Valor Nominal Atualizado projetado para a data da liquidação, a partir da meta para a taxa SELIC definida pelo Banco Central no período:

$$VNA_{projetado} = 13,16595 \cdot (1,1365)^{\frac{1}{252}} = 13,17263. \tag{3.37}$$

Por fim, substituindo (3.35) e (3.37) em (3.31), tem-se:

$$Preço = 98,96742\% \cdot 13.17263 = \text{R\$}13.036,61. \tag{3.38}$$

Sendo assim, o preço a ser pago pelo título na liquidação é de R$13.036,61.

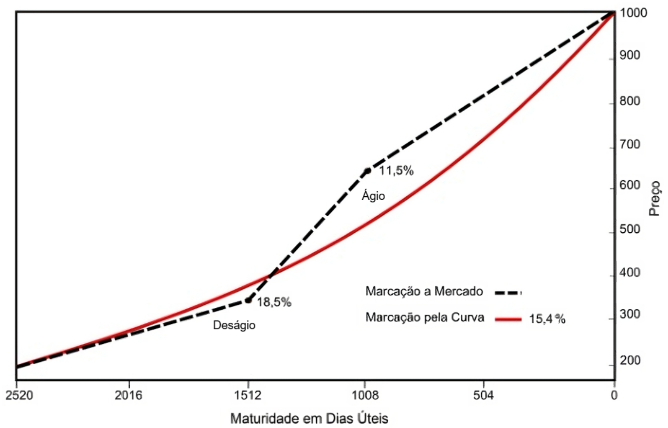
3.3 Marcação a Mercado

A Marcação a Mercado de Títulos Públicos Federais é um procedimento que visa atualizar o valor dos títulos públicos conforme as condições de mercado em determinado momento. Isso significa que o valor do título é recalculado diariamente com base nas cotações de mercado, refletindo as variações nas taxas de juros e outros fatores que podem afetar o seu preço. Ela é especialmente relevante para os títulos prefixados e indexados à inflação, pois seus valores são mais sensíveis às mudanças nas taxas de juros e expectativas inflacionárias. Com a marcação a mercado, o valor do título pode oscilar diariamente, mas os investidores têm a garantia de que, se mantiverem o título até o vencimento, receberão o valor acordado no momento da compra, acrescido dos juros acertados. (NETO, 2012; NETO, 2018)

A Figura 8 apresenta valores hipotéticos de um título de renda fixa denominado "zero cupom", com uma taxa de juros anual de 15,4%. Esse título possui um valor nominal de R$ 1.000,00 e uma maturidade de 10 anos, correspondendo a 2.520 dias úteis.

Para exemplificar, considere um Título Prefixado com vencimento em 01 de janeiro de 2029 e com um preço de R$ 705,00 a uma taxa de juros de 12,4%, se mantida até o final. Suponha-se que um investidor queira antecipar a sua venda para o dia 29 de julho de 2024, no qual o valor deste título é de R$ 870,35 a uma taxa de 15,4%. Observe a Figura 8.

Figura 8 – Marcação a Mercado.



Fonte: Adaptado de (FROTA, 2017).

Note que, quando a taxa de juros aumenta para 18,5%, o preço do título diminui em relação à curva, refletindo um deságio no título; no entanto, quando a taxa de juros diminui para 11,5%, o valor de mercado do título aumenta, no qual é refletido um ágio sobre o título.

No próximo capítulo, apresentam-se as definições e conceitos relacionados a ETTJ e as relações entre a taxa à vista e taxa futura.

4 Estrutura a Termo da Taxa de Juros (ETTJ)

A Estrutura a Termo da Taxa de Juros (também conhecida como *Yield Curve*) é a relação, em um determinado momento, entre as taxas de juros de títulos de renda fixa das mesmas linhas de crédito, mas com vencimentos diferentes. Ela é normalmente formada a partir de títulos que pagam apenas juros no vencimento, ou seja, títulos de cupom zero (ou *zero coupon bonds*). Títulos que pagam juros ao longo do período investido, como, por exemplo, o tesouro NTN-F e NTN-B, não são convenientes, porque estaria embutida a hipótese de reinvestimento dos cupons a mesma taxa, o que dificilmente é verdade (ANBIMA, 2022).

Segundo Frota (2017), a *Yield Curve* ou ETTJ, é extremamente importante para os mercados financeiros, visto que é a base para a precificação de instrumentos de renda fixa, em que, também serve como referência para determinar o índice dos demais setores do mercado de dívida.

A ETTJ pode ser construída a partir das taxas à vista, taxas futuras ou pela função desconto, contudo, como todas estão relacionadas entre si, pode-se a partir de uma, determinar ou estimar as outras (SVENSSON, 1994). Nas últimas décadas, diversos modelos de construção da curva de juros foram desenvolvidos, por exemplo: (DOBBIE; WILKIE, 1978), (NELSON; SIEGEL, 1987), (MCCULLOCH, 1971) e (SVENSSON, 1994).

Neste trabalho estudam-se os modelos de Charle R. Nelson e Andrew F. Siegel (NELSON; SIEGEL, 1987) e Lars E. O. Svensson (SVENSSON, 1994), um dos mais utilizados pelo Banco Central do Brasil e por diversos outros bancos centrais, como os bancos centrais da Bélgica, França, Alemanha, Suécia e Suíça (SETTLEMENTS, 2005).

4.1 Taxa à vista

A taxa à vista, ou taxa *spot*, é a taxa de juros subentendida no preço de um título zero cupom adquirido para uma certa maturidade, essa refere-se ao período em que um título atinge sua data de vencimento, sendo conhecida também como *yield to maturity*. Ou seja, é a taxa à vista que o investidor irá receber ao comprar um título e resgatá-lo ao final da maturidade (FROTA, 2017).

O cálculo do preço $P(t,T)$ no instante t de um título zero cupom que faz um pagamento no tempo T é obtido a partir do desconto da taxa $i(t,T)$ sobre o valor nominal. Então:

$$P(t,T) = e^{-i(t,T)(T-t)}. \tag{4.1}$$

Assim, a taxa à vista $i(t,T)$ pode ser obtida a partir de (4.1):

$$\ln P(t,T) = \ln e^{-i(t,T)(T-t)}. \tag{4.2}$$

Logo,

$$i(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}. \tag{4.3}$$

De acordo com Frota (2017), como $P(t,T)$ é o preço de uma unidade no tempo m, então $P(t,T) < 1$, para todo $t < T$. Isso decorre do fato que a taxa de juros $i(t,T)$ é maior que zero, para todo $t < T$.

4.2 Taxa futura

A taxa futura, taxa a termo ou *forward rate*, implícita pode ser facilmente calculada a partir da taxa à vista para períodos no futuro, ou seja, as taxas futuras indicam o retorno esperado entre duas datas no futuro. Mais precisamente, seja $f(t,s,T)$ a *forward rate* continuamente composta do contrato negociado no tempo t, mas que entrará em vigor entre s e T, com $t < s < T$,. Então, para Frota (2017) a combinação da taxa à vista $i(t,s)$ e a taxa futura $f(t,s,T)$ tenha o mesmo retorno que a taxa à vista $i(t,T)$. Ou seja, a taxa futura $f(t,s,T)$ quando aplicada a um título adquirido no tempo t e liquidado em s por um preço $P(t,s)$, tem de produzir o mesmo retorno de um título com seu preço $P(t,T)$ adquirido no tempo t com maturidade T.

Definição 4.2.1. Taxa futura no intervalo $[t,T]$ determinada no tempo m com $t < s < T$ é denotada por $f(t,s,T)$ e definida como a taxa de juros $f(t,s,T)$ tal que;

$$P(t,T) = P(s,t)e^{-(T-s)f(t,s,T)}. \tag{4.4}$$

A partir de (4.3) e (4.4), obtém-se $f(t,s,T)$ como:

$$f(t,s,T) = \frac{i(t,T)(T-t) - i(t,s)(s-t)}{T-s}. \tag{4.5}$$

De fato, seja $P(t,T)$ o preço de um título no tempo t com maturidade em T e $P(t,s)$ o preço de um título também em t mas com vencimento em s onde $t < s < T$. Note que as taxas à vista $i(t,T)$ e $i(t,s)$ implícitas em $P(t,T)$ e $P(t,s)$ respectivamente, determinam a taxa futura $f(t,s,T)$ no qual, ao obter o título com tempo de maturidade

$s-t$ e ao final de sua maturidade no tempo, s reinvesti-lo no título de maturidade $T-s$ tenha o mesmo retorno do título de maturidade $T-t$ (FROTA, 2017).

Sendo $P(t,T)=e^{-i(t,T)(T-t)}$ e $P(t,s)=e^{-i(t,s)(s-t)}$, pode-se determinar a taxa de juros futura $f(t,s,T)=e^{-f(t,s,T)(T-s)}$ igualando as duas opções de preços dos investimentos (CAPINSKI; ZASTAWNIAK, 2004). Assim

$$e^{-i(t,T)(T-t)} = e^{-i(t,s)(s-t)}e^{-f(t,s,T)(T-s)}. \tag{4.6}$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os membros da equação, tem-se:

$$\ln(e^{-i(t,T)(T-t)}) = \ln(e^{-i(t,s)(s-t)}) + \ln(e^{-f(t,s,T)(T-s)}). \tag{4.7}$$

Portanto,

$$f(t,s,T) = \frac{i(t,T)(T-t) - i(t,s)(s-t)}{T-s}. \quad \square \tag{4.8}$$

Por exemplo, considere dois títulos zero cupom, ambos com o mesmo valor de face. O título A tem maturidade de dois anos e o título B tem maturidade de quatro anos. Seja $i_a = 7\%$ a.a a taxa de juros do título A, e $i_b = 10\%$ a.a, a taxa de juros do título B. Suponha que um investidor queira aplicar seu dinheiro por quatro anos. Ele precisa então analisar qual é a melhor estratégia, comprar o título A com vencimento de dois anos e reinvestir por mais dois anos em um título de mesma maturidade ou comprar o título B de maturidade de quatro anos e mantê-lo até o final.

Supondo que a escolha tenha sido o título A com maturidade de 2 anos, calcula-se qual deve ser a taxa futura $f(0,2,4)$ para o contrato de um título no ano posterior que resulte no mesmo rendimento do título B de maturidade de 4 anos:

$$f(0,2,4) = \frac{4\cdot(0,10) - 2\cdot(0,07)}{4-2} = 0,13. \tag{4.9}$$

Portanto, a taxa para o próximo contrato de dois anos deve ser de 13% a.a para o investidor ter o mesmo retorno nas duas opções.

4.2.1 Taxa Futura Instantânea

A taxa futura instantânea é uma estimativa da taxa de juros esperada para um determinado período no futuro, com base em informações e modelos disponíveis atualmente. Ela desempenha um papel fundamental na análise financeira e na tomada de decisões de investimento, proporcionando *insights* sobre as expectativas do mercado em relação às taxas de juros futuras.

Como definido anteriormente, a taxa futura $f(t, sT)$ é a taxa determinada no tempo t e que atua no intervalo$[s, T]$, com $t < s < T$. Para Frota (2017), quando o tempo para maturidade de um título tender a zero, chama-se o rendimento de taxa futura instantânea. Então, se o intervalo de tempo entre o tempo s e o tempo T tender a zero, então é conveniente usar T como o instante s mais um acréscimo de tempo infinitesimal h, ou seja, $T = s + h$.

Definição 4.2.2. *A taxa futura instantânea em s determinada no tempo t é dada por:*

$$f(t, s) = \lim_{h \to 0} f(t, s, s + h). \tag{4.10}$$

Para finalmente ter todos os elementos necessários para determinar o ETTJ, precisa-se da relação entre a taxa futura instantânea e a taxa à vista. Então, se tiver o preço do título de cupom zero, pode-se conhecer todas as taxas instantâneas futuras para todos os pontos no intervalo $[t, T]$. Da mesma forma, se tiver uma taxa futura instantânea para o período de tempo $[t, T]$, obtém-se a taxa à vista integrando a função da taxa futura, ou seja, interpreta-se a taxa à vista como a média da taxa futura instantânea.

Teorema 4.2.1. Mantidas as notações anteriores e assumindo $i(t, T)$ diferenciável, tem-se

I.

$$f(t, s) = i(t, s) + (s - t)\frac{\partial}{\partial s} i(t, s). \tag{4.11}$$

II.

$$i(t, T) = \frac{1}{T - t} \int_t^T f(t, s)\, ds. \tag{4.12}$$

Demonstração:

Com efeito, demonstra-se o item (**I**), usando a equação (4.8),

$$f(t, s, T) = \frac{i(t, T)(T - t) - i(t, s)(s - t)}{T - s}. \tag{4.13}$$

Substituindo-se T por $s + h$, chega-se a

$$f(t, s, T) = \frac{i(t, s + h)(s + h - t) - i(t, s)(s - t)}{s + h - s}. \tag{4.14}$$

Aplicando-se o limite quando $h \to 0$:

$$f(t, s) = \lim_{h \to 0} f(t, s, s + h) = \lim_{h \to 0} \frac{i(t, s + h)(s + h - t) - i(t, s)(s - t)}{h}.$$

Usando-se a propriedade distributiva, tem-se:

$$f(t,s) = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot i(t,s+h) + i(t,s+h)(s-t) - i(t,s)(s-t)}{h}.$$

Aplicando-se a propriedade da soma e do produto de limites, e resolvendo-os chega-se à:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot i(t,s+h)}{h} + (s-t) \lim_{h \to 0} \frac{i(t,s+h) - i(t,s)}{h} \\
&= i(t,s) + (s-t) \lim_{h \to 0} \frac{i(t,s+h) - i(t,s)}{h} \\
f(t,s) &= i(t,s) + (s-t) \frac{\partial}{\partial s} i(t,s). \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Assim, conclui-se a demonstração do item (**I**).

Demonstra-se o item (**II**). A partir do preço $P(t,T)$ de um título zero cupom, pode-se saber as taxas futuras $f(t,T)$ para todos os valores de t no intervalo $[t,T]$. Desse modo, se as taxas futuras instantâneas do intervalo de tempo são dadas $[t,T]$ pode-se obter as taxas à vista ao integrar a função das taxas futuras, ou seja, pode-se interpretar a taxa à vista como uma média das taxas futuras instantâneas. Portanto, integrando (4.11) no intervalo de t a T tem-se:

$$\int_t^T f(t,s)\, ds = \int_t^T \left[i(t,s) + (s-t) \frac{\partial}{\partial s} i(t,s) \right] ds. \qquad (4.16)$$

$$= \int_t^T \left\{ \frac{\partial}{\partial s} [(s-t) \cdot i(t,s)] \right\} ds. \qquad (4.17)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtém-se:

$$\int_t^T f(t,s)\, ds = (s-t) \cdot i(t,s) \big|_t^T = (T-t) \cdot i(t,T).$$

Portanto,

$$i(t,T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t,s)\, ds. \quad \square \qquad (4.18)$$

Dessa forma, pode-se calcular o preço $P(t,T)$ em função do acúmulo das taxas de juros futuras $f(t,T)$ no intervalo de tempo entre t e T. Então tem-se:

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s) ds}. \qquad (4.19)$$

4.3 O Modelo Nelson e Siegel (1987)

Em seu trabalho *Parsimonious Modeling of Yield Curves*, (NELSON; SIEGEL, 1987) propõem o uso da solução da equação diferencial ordinária linear de segunda ordem com valores reais e raízes diferentes para representar uma previsão das taxas a termo. Por exemplo, se a taxa de juros instantânea na maturidade m, denotada $f(m)$, é dada pela solução de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com valores reais e raízes diferentes, tem-se

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 \cdot e^{\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)} + \beta_2 \cdot e^{\left(\frac{-m}{\tau_2}\right)}, \tag{4.20}$$

onde τ_1 e τ_2 são constantes de tempo associadas à equação, e β_0, β_1 e β_2 são determinadas pelas condições iniciais.

Mais adiante, notaram que a curva se ajustava melhor e de forma mais suave com a solução de equações ordinárias lineares de segunda ordem com raízes da equação característica reais e iguais. Portanto, a equação do modelo de Nelson e Siegel passou a ser:

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 \cdot e^{\left(\frac{-m}{\tau}\right)} + \beta_2 \cdot \left(\frac{m}{\tau}\right) \cdot e^{\left(\frac{-m}{\tau}\right)}. \tag{4.21}$$

O rendimento até a maturidade, denominada $F(m)$, é a média das taxas a termo, dado por:

$$F(m) = \frac{1}{m} \cdot \int_0^m f(m)\, dm. \tag{4.22}$$

Para se obter o rendimento em função da maturidade m para raízes iguais, basta integrar (4.21) de zero a m e dividir por m. Assim, obtém-se:

$$F(m) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \cdot \left[\frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{\tau}\right)}}{\left(\frac{m}{\tau}\right)}\right] - \beta_2 \cdot e^{\left(\frac{-m}{\tau}\right)}. \tag{4.23}$$

O termo τ é um parâmetro de tempo que determina o decaimento exponencial da taxa de juros, em que, para pequenos valores atribuídos a ele, há um decaimento mais rápido na taxa de juros. Esse resultado é o mais apropriado para taxas de juros a curto prazo. E quando τ assume valores maiores, tem-se um decaimento exponencial mais lento, ou seja, é mais apropriado para taxas a longo prazo.

Já os termos β_0, β_1 e β_2 são parâmetros de regressão, que podem ser interpretados como termos de curto, médio e longo prazos.

O parâmetro β_0 é uma constante que define o nível da curva de juros. Para Broco (2013), o nível da curva refere-se a um movimento paralelo (deslocamento para cima ou para baixo) da curva de juros, ou seja, todos os retornos da mesma magnitude se movem na mesma direção.

Quando sua maturidade tende ao infinito, a taxa a termo converge para β_0, ou seja, representa o chamado "fator de longo prazo", tem-se

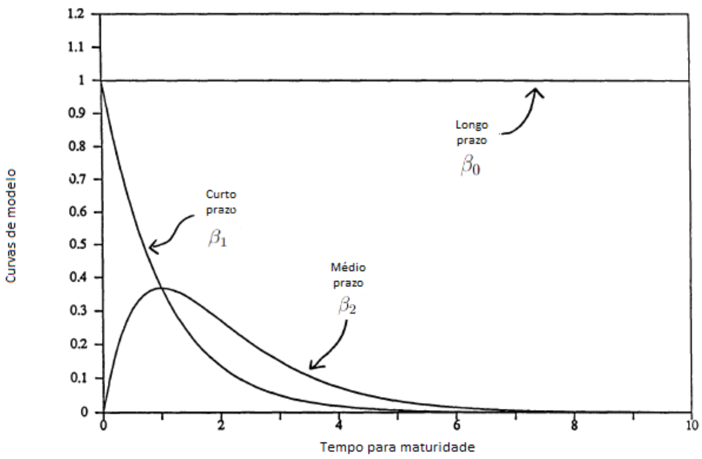
$$\lim_{m\to\infty} f(m) = \lim_{m\to\infty} \left[\beta_0 + \beta_1 \cdot e^{\left(\frac{-m}{\tau}\right)} + \beta_2 \cdot \left(\frac{m}{\tau}\right) \cdot e^{\left(\frac{-m}{\tau}\right)}\right] = \beta_0. \tag{4.24}$$

O termo β_1 é interpretado como a inclinação da curva de juros, ou "fator de curto prazo". Este fator influencia muito as taxas de juros a curto prazo, por convergir rapidamente para zero. O sinal desse coeficiente determina se a curva é crescente ou decrescente, de modo que, se β_1 for negativo, isto é, a função cresce, então, de modo análogo, se β_1 for positivo a função decresce. Quando a maturidade m tende a zero, obtém-se:

$$\lim_{m\to 0} f(m) = \lim_{m\to 0} \left[\beta_0 + \beta_1 \cdot e^{\left(\frac{-m}{\tau}\right)} + \beta_2 \cdot \left(\frac{m}{\tau}\right) \cdot e^{\left(\frac{-m}{\tau}\right)}\right] = \beta_0 + \beta_1. \tag{4.25}$$

Já β_2 é interpretado como curvatura, ou "fator de médio prazo". Está associado às taxas de juros de médio prazo, em que assume valor zero, cresce, e depois converge para zero nas maturidades a longo prazo, e então gera a curva, como pode-se observar na Figura 9.

Figura 9 – Componentes da curva de taxa a termo.



Fonte: Adaptado de (NELSON; SIEGEL, 1987)

Segundo Litterman e Scheinkman (1991) em um estudo realizado em títulos do tesouro dos Estados Unidos. Concluíram que o nível, inclinação e curvatura representam cerca de 97% da movimentação da curva de juros, onde o nível descreve 79%, a inclinação cerca de 13% e a curvatura 5%.

4.4 O Modelo de Svensson (1994)

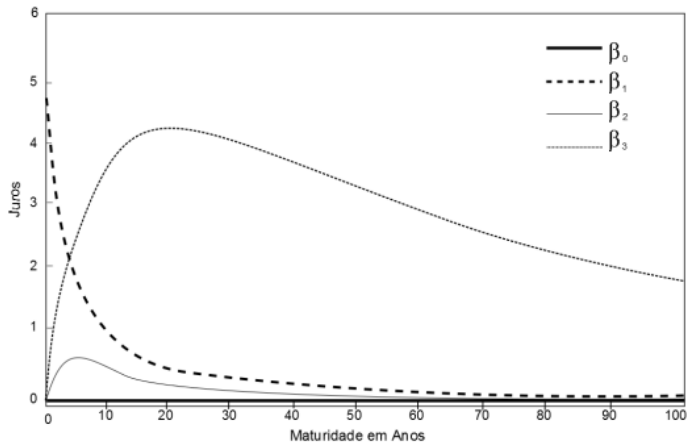
Para a estimativa das taxas à vista e a termo, segundo J.Huston McCulloch (MCCULLOCH, 1971) no ajuste para cada termo em uma data de negociação de uma função de desconto, usa-se a equação (4.21) de Nelson e Siegel (1987), onde assumiram que a taxa a termo instantânea é a solução para a equação ordinária linear de segunda ordem.

Para aumentar a flexibilidade e melhorar o ajuste, Svensson (1994) adicionou um quarto termo à equação de Nelson e Siegel (1987), uma segunda forma com dois parâmetros adicionais, um parâmetro de regressão β_3 e um parâmetro de tempo τ_2 (τ_2 deve ser positivo). Assim a função estendida passa a ter seis parâmetros:

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)} + \beta_2 \left(\frac{m}{\tau_1}\right) e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)} + \beta_3 \left(\frac{-m}{\tau_2}\right) e^{\left(\frac{-m}{\tau_2}\right)}. \tag{4.26}$$

Os componentes de (4.26) mantêm as mesmas características que o modelo de Nelson e Siegel (1987), onde, β_0 é uma constante, o termo exponencial $\beta_1 e^{(\frac{-m}{\tau_1})}$ é monótona decrescente (ou crescente, se β_1 for negativo) em direção a zero em função do tempo de liquidação. O terceiro termo $\beta_2(\frac{m}{\tau_1})e^{(\frac{-m}{\tau_1})}$ gera uma forma de "corcova" (ou uma forma de parábola "U", se β_2 for negativo) em função do tempo de liquidação. Por fim, o quarto termo adicionado por Svensson (1994) $\beta_3(\frac{m}{\tau_2})e^{(\frac{-m}{\tau_2})}$, gera uma forma de "corcova" ou forma de parábola "U", assim como o segundo termo, possibilitando novos formatos de curvas. Observe a Figura 10.

Figura 10 – Parâmetros da curva do modelo de Svensson (1994).



Fonte: (FROTA, 2017).

A taxa *spot* (à vista) poder ser obtida pelo mesmo método utilizado por Nelson e Siegel (1987), ou seja, basta substituir (4.26) em (4.22) e integrar de zero a m e dividir por m. Assim, obtém-se a equação que expressa a taxa à vista segundo o modelo de Svensson (1994):

$$F(m) = \beta_0 + \beta_1 \left[\frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)}}{\left(\frac{m}{\tau_1}\right)} \right] + \beta_2 \left[\frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)}}{\left(\frac{m}{\tau_1}\right)} - e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)} \right] + \beta_3 \left[\frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{\tau_2}\right)}}{\left(\frac{m}{\tau_2}\right)} - e^{\left(\frac{-m}{\tau_2}\right)} \right]. \tag{4.27}$$

No próximo capítulo, apresenta-se o Software de Computação Estatística R, o qual se utiliza para simular aplicações do modelo de Svensson (SVENSSON, 1994) em Títulos Prefixados do Tesouro Direto.

5 Software de Computação Estatística

5.1 O Projeto R para Computação Estatística

O *The R Project* é um ambiente de software livre e gratuito para análise estatística, modelagem de dados e visualização de dados com o uso da linguagem de programação R. A linguagem de programação R é uma linguagem de código aberto e gratuita desenvolvida inicialmente em 1993 por Ross Ihaka e Robert Gentleman, professores da Universidade de Auckland, Nova Zelândia (COMPUTING, 2023).

O R oferece uma ampla gama de ferramentas para análise de dados, incluindo estatísticas descritivas, regressão linear e não linear, análise de séries temporais, análise de dados de sobrevivência, análise de dados de contagem, entre outros. Também oferece recursos avançados de visualização de dados, permitindo que os usuários criem gráficos para entender seus dados. Ele é amplamente utilizado por estatísticos, cientistas de dados, pesquisadores e analistas de dados em uma variedade de áreas, incluindo ciências sociais, biologia, finanças, saúde e muitas outras.

5.1.1 RStudio *Desktop*

O RStudio é um ambiente de desenvolvimento integrado (IDE) gratuito e de código aberto para a linguagem de programação R. Ele foi desenvolvido para facilitar a programação em R, fornecendo recursos avançados de edição de código, depuração, visualização e gerenciamento de projetos. Ele possui uma interface gráfica de usuário (GUI) intuitiva que permite aos usuários interagir com o R de forma mais fácil e eficiente. Ele inclui recursos como realce de sintaxe, autocompletar, depuração interativa, acesso à documentação e pacotes, gerenciamento de arquivos e ambiente, gráficos e visualizações interativas, e muito mais (POSIT, 2023).

O software RStudio *Desktop* pode ser obtido gratuitamente na internet (disponível em: https://posit.co/download/rstudio-desktop/), porém, para seu funcionamento, requer que o usuário tenha instalado em sua máquina o R.

Na próxima seção, apresentam-se instruções preliminares necessárias antes de usar a linguagem R.

5.2 Operações

5.2.1 Operações Aritméticas

As operações aritméticas são aquelas que envolvem cálculos matemáticos básicos, tais como adição, subtração, multiplicação e divisão. Na linguagem R, as operações aritméticas são realizadas utilizando os operadores matemáticos correspondentes, observe na Figura 11 alguns exemplos (BATTISTI, 2019).

I. Adição: o operador $(+)$ é utilizado para realizar a operação de adição.

II. Subtração: o operador $(-)$ é utilizado para realizar a operação de subtração.

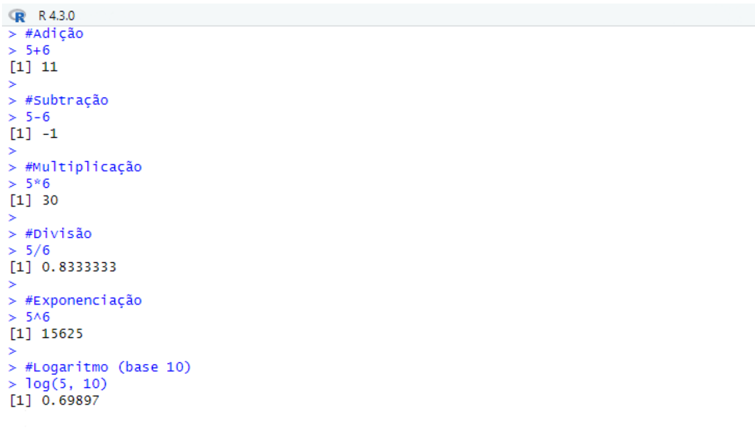
III. Multiplicação: o operador $(*)$ é utilizado para realizar a operação de multiplicação

IV. Divisão: o operador $(/)$ é utilizado para realizar a operação de divisão.

V. Exponenciação: o operador $(\wedge)$ é utilizado para realizar a operação de exponenciação.

VI. Logaritmo: o operador de logaritmo é representado pela função $\log(x, base)$, onde x é o número para o qual o logaritmo será calculado e $base$ é a base do logaritmo.

Figura 11 – Exemplos de Operações Aritméticas no R.



```
R 4.3.0
> #Adição
> 5+6
[1] 11
>
> #Subtração
> 5-6
[1] -1
>
> #Multiplicação
> 5*6
[1] 30
>
> #Divisão
> 5/6
[1] 0.8333333
>
> #Exponenciação
> 5^6
[1] 15625
>
> #Logaritmo (base 10)
> log(5, 10)
[1] 0.69897
```

Fonte: Elaborada pelo autor

5.2.2 Operações Lógicas

As operações lógicas são uma das formas mais básicas e importantes de manipulação de dados em qualquer linguagem de programação, incluindo a linguagem R. As operações lógicas são utilizadas para testar condições e retornar valores booleanos (verdadeiro ou falso). Observe na Figura 12 alguns exemplos (BATTISTI, 2019).

A linguagem R oferece seis operações lógicas básicas.

I. Igualdade (==): retorna *TRUE* se o valor da esquerda for igual ao valor da direita, caso contrário, retorna *FALSE*.

II. Diferença (!=): retorna *TRUE* se o valor da esquerda diferir do valor da direita, caso contrário, retorna *FALSE*.

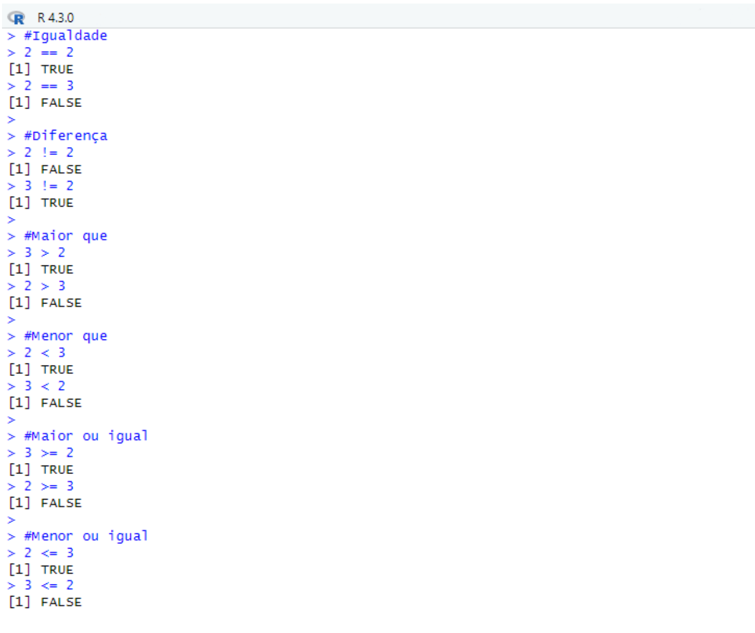
III. Maior que (>): retorna *TRUE* se o valor da esquerda for maior do que o valor da direita, caso contrário, retorna *FALSE*.

IV. Menor que (<): retorna *TRUE* se o valor da esquerda for menor do que o valor da direita, caso contrário, retorna *FALSE*.

V. Maior ou igual a (>=): retorna *TRUE* se o valor da esquerda for maior ou igual ao valor da direita, caso contrário, retorna *FALSE*.

VI. Menor ou igual a (<=): retorna *TRUE* se o valor da esquerda for menor ou igual ao valor da direita, caso contrário, retorna *FALSE*.

Figura 12 – Exemplos de Operações Lógicas no R.



```
R 4.3.0
> #Igualdade
> 2 == 2
[1] TRUE
> 2 == 3
[1] FALSE
>
> #Diferença
> 2 != 2
[1] FALSE
> 3 != 2
[1] TRUE
>
> #Maior que
> 3 > 2
[1] TRUE
> 2 > 3
[1] FALSE
>
> #Menor que
> 2 < 3
[1] TRUE
> 3 < 2
[1] FALSE
>
> #Maior ou igual
> 3 >= 2
[1] TRUE
> 2 >= 3
[1] FALSE
>
> #Menor ou igual
> 2 <= 3
[1] TRUE
> 3 <= 2
[1] FALSE
```

Fonte: Elaborada pelo autor

5.3 Estrutura de Dados

A linguagem R possui diversas estruturas de dados que permitem armazenar e manipular informações de diferentes tipos e formatos (BATTISTI, 2019). As principais estruturas de dados no R são:

I. Vetor: é uma sequência ordenada de valores de um mesmo tipo de dado. Existem dois tipos de vetores no R: vetores numéricos e vetores de caracteres.

II. Matriz: é uma coleção de valores dispostos em uma tabela de linhas e colunas. Todos os elementos de uma matriz devem ser do mesmo tipo de dado.

III. Lista: é uma coleção de objetos de diferentes tipos e tamanhos.

IV. *Data frame*: é uma estrutura de dados bidimensional que permite armazenar dados em forma de tabela, onde cada coluna pode ser de um tipo diferente.

Observe na Figura 13 exemplos de estrutura de dados.

Figura 13 – Exemplos de Estrutura de Dados no R.

```
R 4.3.0
> #Vetor
> c(1,2,3,4,5) #Vetor Numérico
[1] 1 2 3 4 5
> c("a", "b", "c") #Vetor de caracteres
[1] "a" "b" "c"

> #Matriz (3x3)
> matrix(1:9, nrow = 3, ncol = 3) #nrow= 3 linhas, ncol= 3 colunas
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    4    7
[2,]    2    5    8
[3,]    3    6    9

> #Lista
> list(nome = "João", idade = 25, altura = 1.75)
$nome
[1] "João"

$idade
[1] 25

$altura
[1] 1.75


> #Data Frame
> data.frame(nome = c("João", "Maria", "Pedro"),
+ idade = c(25, 30, 35), altura = c(1.75, 1.60, 1.80))
   nome idade altura
1  João    25   1.75
2 Maria    30   1.60
3 Pedro    35   1.80
```

Fonte: Elaborada pelo autor

Além dessas estruturas de dados básicas, a linguagem R também oferece outras estruturas mais avançadas, como *arrays, factors* e *tibbles*. Cada uma dessas estruturas de dados possui características específicas que a tornam mais adequada para determinadas tarefas.

5.4 Pacotes no R

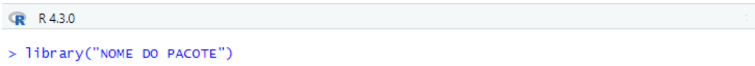
Os pacotes do R são bibliotecas de funções e dados que permitem expandir as funcionalidades da linguagem. Eles são instalados uma única vez e depois podem ser carregados a qualquer momento para serem usados em um determinado *script* ou projeto.

O RStudio torna o gerenciamento de pacotes muito fácil, permitindo que você instale, carregue, descarregue e atualize pacotes com apenas alguns cliques. Você pode acessar a lista de pacotes instalados na guia *Packages* no painel inferior direito do RStudio.

Para instalar um pacote, você pode clicar em *Install* na guia *Packages* e digitar o nome do pacote que deseja instalar. O RStudio irá baixar e instalar o pacote automaticamente (BATTISTI, 2019).

Para carregar um pacote que já está instalado, você pode usar o comando da Figura 14.

Figura 14 – Carregar pacote já instalado no R.



Fonte: Elaborada pelo autor

5.4.1 Pacote *zoo*

O pacote *zoo* é um pacote da linguagem R utilizado para manipulação e análise de séries temporais. O *zoo* fornece uma classe de dados para lidar com séries temporais irregulares, com suporte para indexação baseada em datas e horários, agrupamento de dados, interpolação e outros recursos para análise de séries temporais.

O *zoo* é construído sobre o pacote “base” do R e fornece funções para lidar com dados de séries temporais, como cálculo de médias móveis, desvio padrão, correção automática, entre outras (ZEILEIS, 2023).

Para utilizar o pacote *zoo*, é necessário primeiro instalá-lo e carregá-lo no ambiente R. Você pode fazer isso executando os comandos da Figura 15:

Figura 15 – Comandos para instalação e carregamento do pacote *zoo*.

Fonte: Elaborada pelo autor

5.4.2 Pacote *xts*

O pacote *xts* é um pacote da linguagem R utilizado para manipular e analisar séries temporais. Ele é construído sobre o pacote *zoo*, que fornece uma classe de dados para lidar com séries temporais irregulares.

O *xts* fornece uma classe de dados chamada *xts* que estende a classe *zoo* e adiciona recursos para análise de séries temporais, sendo eles: suporte para séries temporais regulares e irregulares, indexação baseada em datas e horários, operações de agregação, cálculo de média, soma e outras funções estatísticas, suporte para vários fusos horários, funções para cálculo de retornos, volatilidade e outras medidas de desempenho financeiro (RYAN, 2023).

Para utilizar o pacote *xts*, é necessário primeiro instalá-lo e carregá-lo no ambiente R, conforme o exemplo da Figura 16.

Figura 16 – Comandos para instalação e carregamento do pacote *xts*.

```
R 4.3.0
> install.packages("xts")
  library(xts)
```

Fonte: Elaborada pelo autor

O pacote *xts* oferece muitas outras funções úteis para análise de séries temporais, como *period.apply*(), *apply.daily*(), *apply.monthly*(), entre outras. Consulte a documentação oficial do pacote para obter mais informações sobre suas funcionalidades.

5.4.3 Pacote *YieldCurve*

O pacote *YieldCurve* refere-se a um conjunto de ferramentas e funções em linguagem de programação R que permitem aos analistas financeiros e investidores modelar, analisar e visualizar curvas de rendimento (*yield curves*). Além disso, é usado principalmente em análise financeira, gestão de riscos e modelagem de investimentos. Ele pode ajudar a encontrar e traçar curvas de rendimento usando diferentes métodos, como a interpolação, e também pode auxiliar na construção de curvas de rendimento suaves a partir de dados de mercado (GUIRRERI, 2023).

Desse modo, os usuários podem acessar dados históricos de rendimentos de títulos e calcular métricas financeiras, como taxas de juros spot (*spot rates*) e as taxas a termo (*forward rates*). Essas informações são essenciais para a precificação de títulos, avaliação de riscos, análise de mercado e tomada de decisões de investimento informadas.

Para utilizar-se o pacote *YieldCurve*, primeiramente é necessário instalar os pacotes *zoo* e *xts*, então instalá-lo e carregá-lo no ambiente R, conforme o exemplo da Figura 17.

Figura 17 – Comandos para instalação e carregamento do pacote *YieldCurve*.

```
R 4.3.0
> install.packages("YieldCurve")
  library("YieldCurve")
```

Fonte: Elaborada pelo autor

No próximo capítulo, apresentam-se os resultados e simulações obtidos utilizando o software RStudio, com o uso do pacote *YieldCurve* a fim de obter os parâmetros β_0, β_1, β_2, β_3, τ_1 e τ_2 do modelo de Svensson Svensson (1994) para a construção da ETTJ.

6 Resultados e Simulações

Neste capítulo apresenta-se a aplicação do modelo de Svensson com a linguagem R, a partir do emprego da função *Svensson* do pacote *YieldCurve* para obter os parâmetros para a construção da ETTJ de um título do Tesouro Prefixado.

Para calcular os parâmetros do modelo de Svensson, define-se como nosso item de estimação, a taxa à vista de um título do Tesouro Direto Prefixado. Títulos de curta maturidade são menos afetados por mudanças nas taxas de juros em comparação com títulos de maturidades mais longas. Uma pequena flutuação nos preços de títulos de curto prazo pode ter um grande impacto nas taxas de juros. A Tabela 7 contém os títulos do Tesouro Prefixado (LTN) disponíveis no Tesouro Direto no dia 11 de maio de 2023.

Tabela 7 – Tesouro Prefixado (LTN) disponível no Tesouro Direto.

Maturidade em dias	Maturidade em anos	Taxa à Vista (% a.a)
21	0,0833333	13,4959
42	0,166667	13,6580
63	0,25	13,7150
126	0,5	13,5102
252	1	12,6160
504	2	11,5999
756	3	11,5079
1008	4	11,6765
1260	5	11,8662
2.394	9,5	12,3494

Fonte: (ANBIMA, 2023a)

Conforme comentado anteriormente, considera-se um ano-base de 252 dias úteis e 21 dias úteis para um mês, como foi estabelecido pelo Banco Central do Brasil (BRASIL, 1997), por meio da Circular 2.761/1997.

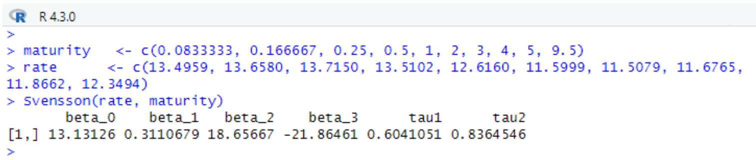
O cálculo dos vértices de um título prefixado é feito pelo Circular 3.361 do Banco Central do Brasil (BRASIL, 2007) e não faz parte do escopo deste trabalho, portanto é omitido. Os vértices de um título público são definidos como o prazo no qual os fluxos de caixa devem ser alocados ou agrupados, conforme o número de dias úteis remanescentes até a data de seu vencimento.

A partir dos dados coletados da Tabela 7, estima-se por meio do software RStudio os parâmetros β_0, β_1, β_2, β_3, τ_1 e τ_2. Para isso, usa-se o pacote $YieldCurve$ com a função "Svensson(*rate*, *maturity*)", onde *rate* (taxa) é o vetor linha com as taxas de juros (a.a) e *maturity* (maturidade) o vetor linha com a maturidade em anos. Desse modo, os valores encontrados foram: $\beta_0 = 13,13126$, $\beta_1 = 0,3110679$, $\beta_2 = 18,65667$, $\beta_3 = -21,86461$,

$\tau_1 = 0,6041051$ e $\tau_2 = 0,8364546$, conforme a Figura 18. Substituindo os parâmetros calculados na equação (4.27) de Svensson (SVENSSON, 1994), obtém-se:

$$
\begin{aligned}
F(m) = 13,13173 + 0,3105974 & \left[\frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{0,604105}\right)}}{\left(\frac{m}{0,604105}\right)} \right] + \\
+18,66107 & \left[\frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{0,604105}\right)}}{\left(\frac{m}{0,604105}\right)} - e^{\left(\frac{-m}{0,604105}\right)} \right] + \\
-21,8708 & \left[\frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{0,8364546}\right)}}{\left(\frac{m}{0,8364546}\right)} - e^{\left(\frac{-m}{0,8364546}\right)} \right].
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Figura 18 – Parâmetros do modelo de Svensson (SVENSSON, 1994) obtidos como o software RStudio



```
R 4.3.0
>
> maturity   <- c(0.0833333, 0.166667, 0.25, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 9.5)
> rate      <- c(13.4959, 13.6580, 13.7150, 13.5102, 12.6160, 11.5999, 11.5079, 11.6765,
11.8662, 12.3494)
> Svensson(rate, maturity)
       beta_0    beta_1   beta_2    beta_3      tau1      tau2
[1,] 13.13126 0.3110679 18.65667 -21.86461 0.6041051 0.8364546
>
```

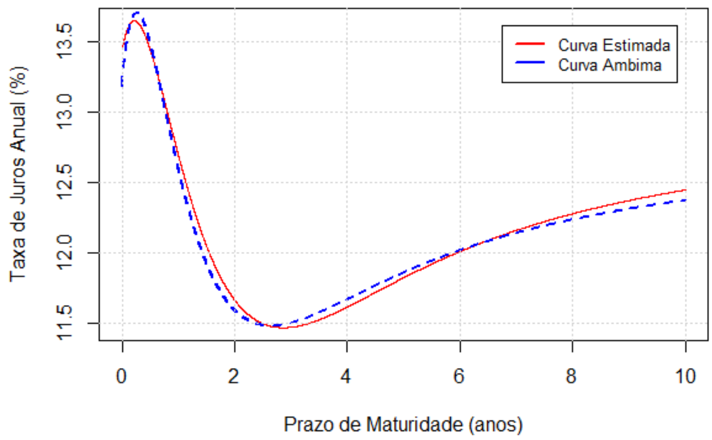
Fonte: Elaborada pelo autor

A ANBIMA, em sua rotina diária, realiza a divulgação em seu portal oficial (ANBIMA, 2023a) os dados de sua ETTJ estimada. Nesse sentido, coleta-se tanto a curva como os parâmetros relacionados divulgados no dia 10/05/2023, permitindo uma comparação com a curva obtida (6.1), conforme ilustrado na Figura 19. Importante salientar que tal comparação revela a presença de um erro quadrático médio (EQM)[1] de 0,3172%.

A Tabela 8 ilustra os Títulos do Tesouro IPCA+ disponíveis no Tesouro Direto no dia 18/05/2023 e a partir de seus dados, utiliza-se o método adotado anteriormente para estimar-se os parâmetros β_0, β_1, β_2, β_3, τ_1 e τ_2. Desse modo, os valores obtidos foram: $\beta_0 = 6,647655$, $\beta_1 = 6,811119$, $\beta_2 = -11,75189$, $\beta_3 = -1,846923$, $\tau_1 = 1,115279$ e $\tau_2 = 13,38328$. Substituindo os parâmetros calculados na equação (4.27) de Svensson (1994), obtém-se:

[1] O Erro Quadrático Médio (EQM) é uma medida comum utilizada para avaliar a qualidade de um modelo de regressão ou previsão em relação aos valores reais dos dados. Ele mede a média dos quadrados das diferenças entre os valores previstos pelo modelo e os valores reais observados.

Figura 19 – Comparação ETTJ ANBIMA com a ETTJ Estimada.



Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 8 – Tesouro IPCA+ (NTN-B) disponível no Tesouro Direto

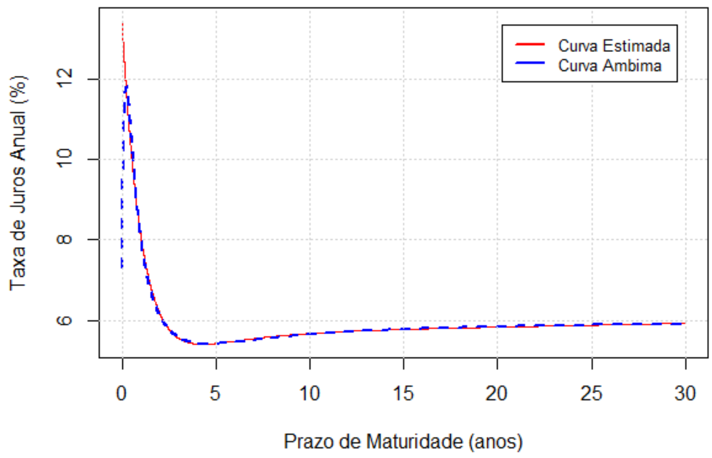
Maturidade em dias	Maturidade em anos	Taxa à Vista (% a.a)
252	1	8,1252
504	2	6,1398
756	3	5,5799
1.008	4	5,4277
1.260	5	5,4179
2.520	10	5,6467
3.780	15	5,7765
5.040	20	5,8432
6.300	25	5,8833
7.560	30	5,91

Fonte: (ANBIMA, 2023a)

$$F(m) = 6,647655 + 6,811119 \left[\frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{1,115279}\right)}}{\left(\frac{m}{1,115279}\right)} \right] + \\ -11,75189 \left[\frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{1,115279}\right)}}{\left(\frac{m}{1,115279}\right)} - e^{\left(\frac{-m}{1,115279}\right)} \right] \\ -1,846923 \left[\frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{13,38328}\right)}}{\left(\frac{m}{13,38328}\right)} - e^{\left(\frac{-m}{13,38328}\right)} \right]. \tag{6.2}$$

Obtendo-se a curva e os parâmetros da ETTJ estimada pela ANBIMA, os quais foram divulgados em 18/05/2023, é possível realizar-se uma comparação entre a curva estimada e a curva obtida (6.2), como apresentado na Figura 20. Nesse contexto, foi observado um erro quadrático médio de 2,0825%.

Figura 20 – Comparação ETTJ IPCA da ANBIMA com a ETTJ IPCA Estimada.



Fonte: Elaborada pelo autor

Tendo em vista que o método utilizado não é ideal para a construção da ETTJ para títulos públicos com pagamentos de cupons de juros, como no Tesouro IPCA+ (NTN-B), observou-se que para maturidades maiores que dois anos, a curva obtida (6.2) tem um boa aproximação sobre a curva coletada da ANBIMA, conforme observado na Figura 20.

6.1 Análise dos Resultados

A curva obtida pela simulação é uma boa aproximação para a curva estimada pela ANBIMA. A diferença entre as duas curvas ocorre pelo método utilizado para obter-se os parâmetros do modelo de Svensson, no qual a ANBIMA utiliza o algoritmo genético criado por Holland (1992). Devido ao prazo da última NTN-F ficar inferior a 10 anos, em dias úteis, o vértice 2.520 divulgado pela ANBIMA (ANBIMA, 2023a), deixou de ter seu ponto de ancoragem para interpolação das taxas que possibilitassem seu cálculo, ou seja, não foi possível obter uma aproximação melhor se comparada a ETTJ divulgada pela ANBIMA.

Para efeitos de validação, utilizam-se os dados do Tesouro Prefixado (LTN) no dia 08/09/2022, anterior a data de retirada do vértice 2.520 pela ANBIMA, os quais estão disponíveis na Tabela 9.

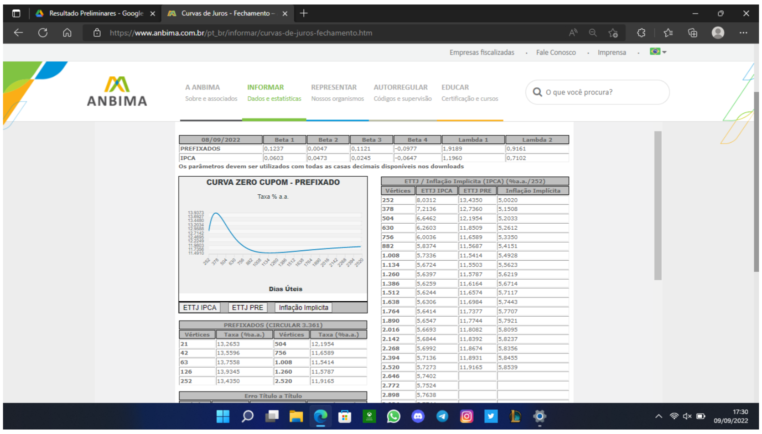
Tabela 9 – Tesouro Prefixado (LTN) disponível no Tesouro Direto em 08/09/2022.

Maturidade em dias	Maturidade em anos	Taxa à Vista (% a.a)
21	0,0833333	13,2653
42	0,166667	13,5596
63	0,25	13,7558
126	0,5	13,9345
252	1	13,4350
504	2	12,1954
756	3	11,6589
1008	4	11,5414
1260	5	11,5787
2.252	10	11,9165

Fonte: (ANBIMA, 2023a)

Para fins de comparação, usa-se a curva e os parâmetros divulgados pela ANBIMA, conforme a Figura 21, na mesma data em questão.

Figura 21 – Curva de Juros - Fechamento dia 08/09/2022 pela ANBIMA.

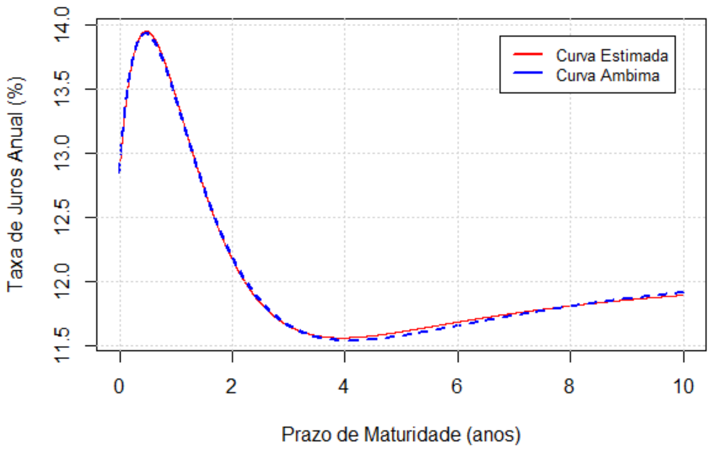


Fonte: Site da ANBIMA no dia 08/09/2022

Como pode-se observar na Figura 22, a curva estimada pelos métodos destes trabalho, é uma ótima aproximação para a curva estimada pela ANBIMA, apresentando um erro quadrático médio (EQM) de 0,057926%.

No próximo capítulo, apresenta-se a conclusão.

Figura 22 – Comparação ETTJ ANBIMA com a ETTJ Estimada em 08/09/2022.



Fonte: Elaborada pelo autor

7 Conclusão

O objetivo central era demonstrar os cálculos dos preços, taxas, rentabilidades e cotações dos Títulos Públicos Federais, além de construir e analisar a ETTJ obtida para títulos zero cupom. Para isso, foram apresentados os conceitos básicos da matemática financeira, como os regimes de capitalização simples, composta e contínua, e taxas de juros. Além disso, foram revisadas as definições de regressões lineares, cálculo diferencial e integral e das equações diferenciais, com enfoque maior nas equações diferencias ordinárias lineares não homogêneas de segunda ordem. Para a construção da ETTJ foram estudados os modelos de Nelson e Siegel e sua extensão proposta por Svensson para a previsão da curva de juros, onde esses modelos são amplamente utilizados pelo BCB, ANBIMA e por diversos bancos centrais de vários países, pelo fato de serem de fácil implementação e por seu ajuste aos diversos formatos de curvas de taxas de juros.

Foram apresentados os Títulos Públicos Federais ofertados pelo Tesouro Nacional e suas características, em que foram demonstrados os cálculos matemáticos envolvidos na precificação, cotação, taxação e rentabilidade dos mesmos. Destacou-se também a relevância da ETTJ nos mercados financeiros, ao servir como base para a precificação de instrumentos de renda fixa e como referência para determinar o índice dos demais setores do mercado de dívida. Apresentam-se também as taxas de juros à vista, futura e instantânea e suas relações matemáticas entre elas.

Utilizando dados do Tesouro Direto sobre as taxas de juros do tesouro prefixado, aplica-se um método computacional utilizando o software RStudio em conjunto com o pacote *YieldCurve* através de regressões lineares que minimizam o modelo de Svensson, para se obter os parâmetros β_0, β_1, β_2, β_3, τ_1 e τ_2 a fim de construir a ETTJ que descreve a curva de juros da taxa à vista, onde, observa-se que essa curva de juros mostra as taxas de juros de diferentes prazos de vencimento, ou seja, o retorno que um investidor receberia ao comprar e manter esses títulos até seus respectivos vencimentos. Essa estrutura permite que os investidores e analistas avaliem as expectativas do mercado em relação às taxas de juros futuras, bem como a percepção de risco e as condições econômicas. Por fim, foram realizadas simulações com base nos resultados, as quais se mostraram em conforme a ANBIMA e observou-se que houve uma excelente aproximação dos resultados obtidos com um EQM de 0,057926%.

Como trabalho futuro sugere-se realizar o estudo de como a inflação nas taxas de juros afeta a ETTJ no curto, médio e longo prazo e demonstrar como são obtidos os vértices dos títulos prefixados que implicam na construção da mesma.

Referências

ANBIMA. *Curvas de Juros - Fechamento*. 2023. <https://www.anbima.com.br/pt_br/informar/curvas-de-juros-fechamento.htm>. Citado 5 vezes nas páginas 64, 65, 66, 67 e 68.

ANBIMA. *Projeções IPCA e IGP-M*. 2023. <https://www.anbima.com.br/pt_br/informar/estatisticas/precos-e-indices/projecao-de-inflacao-gp-m.htm>. Citado na página 41.

ANBIMA, A. B. das Entidades dos Mercados Financeiro e de C. *Estrutura a Termo das Taxas de Juros Estimada*. 2022. <https://www.anbima.com.br/informacoes/est-termo/CZ.asp>. Citado na página 49.

BATTISTI, F. M. d. S. S. I. D. E. *Software R: Análise estatística de dados utilizando um programa livre*. Bagé: Editora Faith, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 59, 60 e 62.

BOYCE, R. C. D. W. E. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Rio de Janeiro: LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 2015. Citado 4 vezes nas páginas 27, 28, 29 e 31.

BRASIL, B. C. do. *CIRCULAR Nº 2.761*. 1997. <https://www.bcb.gov.br/pre/normativos/circ/1997/pdf/circ_2761_v1_o.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 64.

BRASIL, B. C. do. *CIRCULAR Nº 3.361*. 2007. <https://www.bcb.gov.br/pre/normativos/circ/2007/pdf/circ_3361_v3_l.pdf>. Citado na página 64.

BRASIL, B. C. do. *Fatores acumulados*. 2023. <https://www.bcb.gov.br/acessoinformacao/legado?url=https:%2F%2Fwww.bcb.gov.br%2Fhtms%2Fselic%2Fselicacumul.asp>. Citado na página 47.

BROCO, M. B. *Análise Estatística do Modelo de Nelson e Siegel*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal De São Carlos, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 54.

CAPINSKI, M.; ZASTAWNIAK, T. Mathematics for finance : An introduction to financial engineering /. *The American Mathematical Monthly*, v. 111, 12 2004. Citado na página 51.

COMPUTING, T. R. P. for S. *What is R?* 2023. <https://www.r-project.org/about.html>. Citado na página 58.

DIEBOLD, F.; LI, C. Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 130, n. 2, p. 337–364, 2006. Citado na página 13.

DIRETO, T. *Títulos Públicos Federais: Metodologia de Cálculo dos Títulos Públicos Federais Ofertados nos Leilões Primários*. 2008. <https://sisweb.tesouro.gov.br/apex/f?p=2501:9::::9:P9_ID_PUBLICACAO:26310>. Citado 5 vezes nas páginas 36, 38, 40, 42 e 46.

DIRETO, T. *Cálculo da Rentabilidade dos Títulos Públicos Ofertados no Tesouro Direto Tesouro Renda+ (NTN-B1)*. 2023. <https://www.tesourodireto.com.br/lumis/portal/file/fileDownload.jsp?fileId=8A94D4988608850F018660E43AD91E98>. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 44.

DIRETO, T. *Datas De Pagamento Dos Juros Semestrais*. 2023. <https://www.tesourodireto.com.br/titulos/precos-e-taxas.htm>. Citado na página 39.

DOBBIE, G. M.; WILKIE, A. D. The f.t.-actuaries fixed interest indices. *Journal of the Institute of Actuaries*, Cambridge University Press, v. 105, n. 1, p. 15–26, 1978. Citado na página 49.

ESPINOSA, P. C. S. *Estrutura a termo da taxa de juros brasileira: Uma aplicação do modelo NELSON e SIEGEL*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Do Rio Grande Do Sul, Faculdade De Ciências Econômicas, 2011. Citado na página 13.

FEDERAL, G. *Comprar Títulos Públicos Federais*. 2022. <https://www.gov.br/pt-br/servicos/comprar-titulos-publicos-federais>. Citado 6 vezes nas páginas 35, 36, 38, 39, 42 e 46.

FERREIRA, H. N. *Títulos Públicos: Análise Matemática do Preço de Mercado do Tesouro Prefixado e Tesouro IPCA a partir de Variações nas Taxas de Juros*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Sul de Santa Catarina, 2021. Citado na página 14.

FLEMMING, M. B. G. e D. M. *Cálculo A: Funções, limites, derivação e integração*. São Paulo: Pearson, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 21, 22, 23 e 28.

FROTA, S. F. P. *Um Estudo da Estrutura a Termo de Taxas de Juros de Títulos Públicos Prefixados e o Modelo de Svensson*. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2017. Citado 9 vezes nas páginas 13, 14, 20, 48, 49, 50, 51, 52 e 56.

GUIRRERI, S. S. *Package 'YieldCurve'*. 2023. <https://cran.r-project.org/web/packages/YieldCurve/YieldCurve.pdf>. Citado na página 63.

GUJARATI, D. C. P. D. N. *Econometria Básica: 5.Ed*. Porto Alegre, RS: AMGH Editora Ltda., 2011. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 33.

HOLLAND, J. H. *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, Cambridge, 1992. Citado na página 67.

IBGE. *IPCA - Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo*. 2023. <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/economicas/precos-e-custos/9256-indice-nacional-de-precos-ao-consumidor-amplo.html>. Citado na página 40.

IEZZI, C. M. G. *Fundamentos De Matemática Elementar 9.Ed*. São Paulo: SARAIVA S. A. Livreiros Editores, 2013. Citado na página 21.

IEZZI, G. *Matemática: Volume Único*. São Paulo: Atual, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 18.

LIMA, E. L. *Análise Real - V. 2 - Funções de várias Variáveis*. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. Citado 5 vezes nas páginas 21, 24, 25, 26 e 27.

LIMA, E. L. *Análise Real - V. 1 - Funções de uma Variável*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 21, 22, 23, 24 e 27.

LITTERMAN, R.; SCHEINKMAN, J. Common factors affecting bond re-turns. *Journal of Fixed Income*, v. 1, p. 61, 06 1991. Citado na página 55.

MCCULLOCH, J. H. Measuring the term structure of interest rates. *The Journal of Business*, University of Chicago Press, v. 44, n. 1, p. 19–31, 1971. ISSN 00219398, 15375374. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2351832>. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 56.

MOBILIÁRIOS, C. D. V. *Títulos Públicos*. 2022. <https://www.investidor.gov.br/menu/Menu_Investidor/Old/Valores_Mobiliarios/Titulos_publicos.html>. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.

MOREIRA, P. H. de A. *Análise de componentes principais em diferentes modelagens das estruturas a termos das taxas de juros brasileira*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2014. Citado na página 13.

NASCIMENTO, L. O. A. *A Matemática Financeira e as Estratégias de Investimentos: Poupança e Títulos Públicos Federais*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Pará, 2019. Citado na página 14.

NELSON, C. R.; SIEGEL, A. F. Parsimonious modeling of yield curves. *The Journal of Business*, University of Chicago Press, v. 60, n. 4, p. 473–489, 1987. ISSN 00219398, 15375374. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2352957>. Citado 7 vezes nas páginas 12, 13, 14, 49, 53, 55 e 56.

NETO, A. A. *Matemática Financeira e suas aplicações*. São Paulo: Atlas, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 17, 19, 20, 21 e 48.

NETO, A. A. *Mercado Financeiro*. São Paulo: Atlas, 2018. Citado na página 48.

PONAHT, O. *Aplicação da Matemática em Investimentos Financeiros: Cardeneta de Poupança e Títulos Públicos*. Dissertação (Mestrado) — Centro de Ciências Exatas, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 18.

POSIT. *RStudio Desktop*. 2023. <https://posit.co/>. Citado na página 58.

REIS, T. *Tudo sobre o Mercado Financeiro: o que é e como ele funciona?* 2022. <https://www.suno.com.br/guias/mercado-financeiro/>. Citado na página 35.

ROSA, R. A. B. M. da. *Estrutura a termo das taxas de juros: panorama da classe de modelos Nelson-Siegel*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 2013. Citado na página 13.

RYAN, J. M. U. J. A. *Package 'xts'*. 2023. <https://cran.r-project.org/web/packages/xts/xts.pdf>. Citado na página 62.

SETTLEMENTS, B. for I. Zero-coupon yield curves: technical documentation. *BIS Papers*, Bank for International Settlements Press and Communications, v. 60, n. 25, p. 01–55, 2005. ISSN 1682-7651, 92-9197-665-2. Disponível em: <https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1188514>. Citado na página 49.

SVENSSON, M. L. E. O. Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994. *IMF Working Papers*, NATIONAL BUREAU OF ECONOMIC RESEARCH, v. 1, n. 4871, p. 76, 1994. ISSN 1018-5941, 9781451853759. Disponível em: <https://www.elibrary.imf.org/downloadpdf/journals/001/1994/114/001.1994.issue-114-en.xml>. Citado 9 vezes nas páginas 6, 12, 13, 14, 49, 56, 57, 63 e 65.

VILCHES, M. A. *Cálculo para Economia e Administração: V.1*. Rio de Janeiro: UERJ, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 21, 23, 24, 25, 26 e 27.

WOOLDRIDGE, J. M. *Introdução à econometria: uma abordagem moderna*. São Paulo: Thomson, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 31, 32, 33 e 34.

ZEILEIS, G. G. A. *Package 'zoo'*. 2023. <https://cran.r-project.org/web/packages/zoo/zoo.pdf>. Citado na página 62.

ZILL, M. R. C. D. G. *Equações Diferenciais: V. 1 e V.2*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2001. Citado 4 vezes nas páginas 28, 29, 30 e 31.