William Debon Pereira

Teoria da Medida: Uma Comparação entre as Integrais de Riemann e Lebesgue

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Dezembro, 2023

William Debon Pereira

Teoria da Medida:
Uma Comparação entre as Integrais de Riemann e Lebesgue

Trabalho de Conclusão de Curso, Matemática Aplicada Bacharelado, submetido por William Debon Pereira junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Matemática Aplicada Bacharelado

Orientador: Profa. Dra. Luciele Rodrigues Nunes

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Dezembro, 2023

William Debon Pereira

Teoria da Medida:
Uma Comparação entre as Integrais de Riemann e Lebesgue

Trabalho de Conclusão de Curso, Matemática Aplicada Bacharelado, submetido por William Debon Pereira junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, 19 de dezembro de 2023.

Documento assinado digitalmente
LUCIELE RODRIGUES NUNES
Data: 18/01/2024 15:58:04-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Luciele Rodrigues Nunes
(Orientador - FURG)

Documento assinado digitalmente
ANDRE MENEGHETTI
Data: 18/01/2024 15:49:05-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. André Meneghetti
(Avaliador - FURG)

Documento assinado digitalmente
JULIANA DA SILVA RICARDO NUNES
Data: 18/01/2024 14:59:21-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Juliana Ricardo Nunes
(Avaliador - FURG)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Dezembro, 2023

Majestosamente dedico este trabalho à minha família e, em especial, aos meus pais (José Pereira e Fernanda Debon), pois sempre me apoiam nas decisões que opto por seguir em minha vida. Em seguida, à minha namorada (Maria Eduarda Amaral) por todo carinho, amor e suporte emocional a mim fornecido nessa longa trajetória, que culminou na escrita deste trabalho. Por fim, mas não menos importante, à minha professora, orientadora e amiga (Luciele Rodrigues Nunes) por me proporcionar novos conhecimentos matemáticos e incentivar a prosseguir meus estudos.

Agradecimentos

É, pois bem, impreterível registrar os meus sinceros agradecimentos à Deus, afinal, é dEle, para Ele e por Ele que tudo se origina, próspera e perece nesse mundo. Inclusive, é por meio dEle que tenho forças para prosseguir com minha vida, pois é através dEle que confesso/desabafo sobre meus sonhos e medos.

Agradeço profundamente aos meus pais, José da Silva Pereira e Fernanda Asevedo Debon, e ao meu irmão, Charles Debon Pereira, por todo apoio emocional que me foi concedido desde meu nascimento até este momento. Ademais, sou grato aos meus avôs maternos, Aldivo Debon e Neuza Regina Debon, e a minha avó paterna, Marinha Pereira, pelo amor e carinho proporcionado a mim (infelizmente, não tive o privilégio de conhecer meu avô paterno porque já havia perecido quando cheguei a este mundo, mas com certeza ele está/estava a me apoiar e mandar boas vibrações do céu).

Agradeço também aos meus melhores amigos, Lisiane Coutinho e Bruno Oleiro, pelas experiências compartilhadas e palavras de estimulo durante esses anos de convivência. Os seus debates enriquecedores durante as horas de estudos em conjunto permitiram avançar nas disciplinas e reforçaram os laços de amizade!

Sou grato ainda à minha professora, orientadora e amiga Luciele Rodrigues Nunes. Sua dedicação, paciência e orientação foram cruciais para desenvolver este trabalho. Além disso, sempre lembrarei dos seminários acerca da Teoria da Medida e Integração realizados nas tardes das terça-feiras para agregar a minha formação e preparar-me para o mestrado.

Por fim, minha profunda gratidão a todos que conviveram e fizeram parte desta jornada comigo.

“Penso como um gênio, escrevo como um autor distinto e falo como uma criança.”
(Vladimir Vladimirovich Nabokov)

Resumo

A área é um conceito muito antigo e essencial até os dias de hoje que determina a extensão de uma figura plana fechada. Contudo, no passado longínquo, era difícil realizar o cálculo de área de figuras pouco convencionais como o círculo, por exemplo. Conforme o tempo seguia seu rumo natural, a evolução matemática, em geral, progrediu de modo excepcional principalmente no que tangencia o conceito de área; acabou ganhando uma teoria geral sobre áreas chamada de Teoria da Integração, que foi estruturada independentemente pelos matemáticos Isacc Newton e Gottfried Leibniz. Essa teoria procura encontrar a área de regiões abaixo de curvas geradas por funções. Diversos métodos foram construídos dentro dessa teoria, um deles era através das Somas de Riemann desenvolvido pelo matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann e assim surgiu a Integral de Riemann. No século XIX, o matemático Henri Léon Lebesgue notou que a Integral de Riemann possuía lacunas e generalizou-a através do conceito de medida; assim surgiu a Integral de Lebesgue. Nosso objetivo principal com este trabalho é realizar uma discussão acerca da Teoria de Integração, mais especificamente das Integrais de Riemann e Lebesgue evidenciando semelhanças e diferenças entre ambas as integrais.

Palavras-chaves: Integração; Medida; Funções Mensuráveis; Integral de Riemann; Integral de Lebesgue.

Abstract

The concept of area is a very ancient and essential idea that persists to this day, determining the extent of a closed flat figure. However, in the distant past, it was challenging to calculate the area of unconventional figures such as the circle, for example. As time followed its natural course, mathematical evolution, in general, progressed exceptionally, especially concerning the concept of area. It eventually gained a general theory about areas called the Theory of Integration, independently developed by mathematicians Isaac Newton and Gottfried Leibniz. This theory seeks to find the area of regions under curves generated by functions. Various methods were constructed within this theory, one of which was through Riemann Sums developed by the mathematician Georg Friedrich Bernhard Riemann, giving rise to the Riemann Integral. In the 19th century, the mathematician Henri Léon Lebesgue observed that the Riemann Integral had gaps and generalized it through the concept of measure, thus giving rise to the Lebesgue Integral. Our main objective with this work is to engage in a discussion about the Theory of Integration, specifically Riemann and Lebesgue Integrals, highlighting similarities and differences between the two integrals.

Key-words: Integration; Measure; Measurable Functions; Riemann Integral; Lebesgue Integral.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

A área é um conceito muito antigo cuja definição é a medida da extensão de uma figura plana fechada. A área de figuras como, por exemplo, quadrados, retângulos, losangos, trapézios, entre outras figuras elementares já eram conhecidas por antigos povos. No entanto, o círculo era uma adversidade para tais civilizações ao tratar-se da área por conta do contorno não linear desta figura.

> Muitas civilizações primitivas conheciam as fórmulas para a área de polígonos como quadrados, retângulos, triângulos e trapézios. Contudo, os matemáticos primitivos se deparavam com muitas dificuldades para encontrar fórmulas para a área de regiões com contornos curvilíneos, das quais o círculo é o exemplo mais simples. (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014, p. 316).

O matemático grego Arquimedes de Siracusa ($\star$287 a.C. $-$†212 a.C.) foi o primeiro a tratar do problema de área para figuras pouco convencionais. Há indícios, em seus textos, do cálculo de áreas de regiões abaixo da parábola e outras curvas; e o método empregado por ele é chamado de *Método da Exaustão*, que fora concebido por outro matemático grego denominado Eudoxo de Cnido ($\star$408 – †355 a.C.). Esse método, que logo mais será descrito, teve sua origem baseada no problema da *quadratura do círculo*[1], um dos problemas clássicos da geometria grega. Segundo ANTON, BIVENS e DAVIS (2014, p. 316),

> Esse método, quando aplicado ao círculo, consiste na inscrição de uma sucessão de polígonos regulares no círculo, permitindo que o número de lados dos polígonos cresça indefinidamente. À medida que cresce o número de lados, os polígonos tendem a "exaurir" a região do círculo e suas áreas se aproximam cada vez mais da área exata do círculo.

Ainda de acordo com ANTON, BIVENS e DAVIS (2014), embora o Método da Exaustão fosse genial, muitos matemáticos gregos da época evitavam utilizá-lo por se tratar de uma sucessão indefinida (que envolve o conceito de infinito — que na época era visto com desconfiança por não se ter uma formalização precisa). Dessa forma, após vários séculos, o cálculo de área ficou estagnado até que, no século XVII, os matemáticos Isaac Newton ($\star$1643 – †1727) – inglês – e Gottfried Leibniz ($\star$1646 – †1716) – alemão – fizessem a descoberta geral para obter-se áreas de figuras curvilíneas pouco convencionais

[1] O problema consiste em construir, utilizando apenas régua e compasso, um quadrado cuja área seja igual a área de um dado círculo.

dando início ao que hoje chamamos de *Cálculo Diferencial-Integral.*

O método desenvolvido por Newton e Leibniz, de maneira independente, é chamado de *Método da Antiderivação.* Esse método consiste em um processo o qual se baseia em encontrar uma função a partir de sua função derivada (conceito ligado geometricamente a ideia de reta tangente a curva) e, a partir daí, a área abaixo da curva gerada pela função. Isso é possível graças a relação fundamental também descoberta independentemente por esses dois grandes matemáticos, uma relação que envolvia área e derivada (hoje chamado de *Teorema Fundamental do Cálculo*). Cabe destacar que esse teorema evidencia que derivada e integral[2] são operações inversas a menos da constante de integração.

> [...] o progresso no problema da área ficou em um nível rudimentar até a segunda metade do século XVII, quando Isaac Newton e Gottfried Leibniz, independentemente, descobriram uma relação fundamental entre área e derivadas. Em resumo, eles mostraram que, se f é uma função contínua não negativa no intervalo $[a, b]$ e se $A(x)$ denota a área sob o gráfico de f acima do intervalo $[a, x]$, onde x é um ponto qualquer do intervalo $[a, b]$, então $A'(x) = f(x)$. (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014, p. 319).

Não obstante, o Método da Antiderivação, por mais eficiente que fosse, possui alguns empecilhos como, por exemplo, encontrar tal função dada a sua função derivada, nem sempre isso era tão imediato ou simples na época; e para a realização de demonstrações formais de resultados matemáticos. Nesse sentido, precisava-se encontrar um novo método – esse viria a ser o conceito de *Integral de Cauchy* devido ao matemático francês Augustin-Louis Cauchy ($\star$1789 – †1857); que, pela primeira vez, formalizava a integração de *funções contínuas*[3] como limite de somas finitas, chamadas de *Somas de Cauchy* (após o próximo parágrafo, retornaremos a falar precisamente de como Cauchy considerava tais somas). (DOERING, 2021).

Nos meados do século XIX, o matemático alemão chamado Georg Friedrich Bernhard Riemann ($\star$1826 – †1866) aperfeiçoou o conceito de Integral de Cauchy através do que é hoje chamado de *Somas de Riemann.* Ele dividia o intervalo $[a, b]$ do domínio da função f em n subintervalos de comprimento Δx_k (não necessariamente iguais e $k = 1, 2, ..., n$) e, em cada um destes subintervalos, escolhia-se um ponto x_k^*; a partir daí, construía-se n retângulos abaixo da função de comprimento Δx_k e altura $f(x_k^*)$ cuja área

[2] Operação matemática cuja interpretação geométrica é o cálculo de áreas abaixo de curvas definidas por funções.

[3] Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita contínua em $a \in X$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, pode-se encontrar $\delta > 0$ de tal maneira que, para $x \in X$, $|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$.

é dada por $f(x_k^*)\Delta x_k$. Por fim, Riemann somava as áreas destes retângulos obtendo

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \qquad \text{(Somas de Riemann)}.$$

Fazendo o comprimento do maior subintervalo dividido tender a zero (denotado por $\max \Delta x_k \to 0$), fazia com que S_n tendesse à área abaixo da curva no intervalo $[a, b]$.

Destacamos que as Somas de Cauchy eram Somas de Riemann (afinal, Riemann generalizou a Integral de Cauchy) em que x_k^* era o extremo inferior do k-éssimo intervalo subdividido. Além do mais, de acordo com DOERING (2021), esse aperfeiçoamento dado por Riemann possibilitou um número maior de funções a serem integráveis, da mesma forma que simplificou demonstrações de resultados matemáticos da época.

Entretanto, a *Integral de Riemann* possui algumas incapacidades perante algumas funções como, por exemplo, a inexistência da integral para a *Função de Dirichlet* $\mathfrak{D} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida como:

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ x \text{ é irracional} \\ 1, & \text{se } \ x \text{ é racional} \end{cases};$$

e também a impossibilidade de se integrar funções não limitadas como $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{se } \ x \in (0, 1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Nesse sentido, ao final do século XIX, outros matemáticos após Riemann viram a necessidade de aprimorar a Integral de Riemann, até mesmo generalizá-la para que pudesse reparar as incongruências por ela gerada – um desses matemáticos foi o francês Gaston Darboux ($\star 1842 - \dagger 1917$) que, em 1875, definiu a Integral de Riemann utilizando as noções de *ínfimo* e *supremo.* Entretanto, em 1902, o matemático francês Henri Léon Lebesgue ($\star 1875 - \dagger 1941$) foi a principal figura por tal generalização quando ele apresenta sua tese intitulada “Intégrale, longueur, aire” (em português: Integral, medida e área). Seu trabalho fora tão extraordinário ao fugir dos preceitos aceitos a época que levantou, inicialmente, críticas; apesar disso, suas ideias tiveram grande reconhecimento. (BOYER; MERZBACH, 2012).

Lebesgue, ao contrário de Riemann, procurava subdividir a imagem da função f em n subintervalos Δy_k e, em cada um destes [subintervalos], escolhia um valor α_k. Dessa forma, encontrava a “medida” $\mu(E_k)$ do subconjunto E_k do domínio de f os quais os valores de $f(x)$ são próximos do valor α_k escolhido (isto para $x \in E_k$). Por fim, agrupava indivisíveis de tamanhos semelhantes para então somá-los. Em outras palavras, Lebesgue substituíra as Somas de Riemann por o que vieram a ser as *Somas de Lebesgue*:

$$\widetilde{S_n} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(E_k).$$

Quanto mais se divide a imagem de f, mais $\widetilde{S_n}$ se aproxima da área abaixo de f; ou seja, quando n tende ao infinito, $\widetilde{S_n}$ tende a área abaixo da curva gerada por f. (BOYER; MERZBACH, 2012).

A *Integral de Lebesgue*, além de permitir o cálculo de área de uma classe de funções mais amplas perante a Integral de Riemann, é também mais flexível quando tratamos da passagem do limite sobre o sinal da integral. Em síntese, não é necessário que a sequência de funções f_n convirja uniformemente para f como na Integral de Riemann, mas sim convirja pontualmente. Cabe ressaltar aqui que os resultados que tratam dessa passagem do limite são conhecidos como: Teorema da Convergência Monótona (TCM) e Teorema da Convergência Dominada (TCD).

Por todos os motivos elencados anteriormente, introduziremos as integrais de Riemann e Lebesgue expondo e demonstrando os resultados fundamentais de ambas as teorias de integração, bem como os paralelos que as diferencia, expondo exemplos para facilitar a compreensão. Ressaltamos ainda que para isso dividimos esse Trabalho de Conclusão de Curso em 4 capítulos dos quais: **Capítulo 1: Integral de Riemann**, abordará propriamente dito a Integral de Riemann, segundo a definição dada por Darboux, e seus principais resultados; **Capítulo 2: Medida**, que estará voltada a definir medida de conjuntos específicos (*conjuntos mensuráveis*); **Capítulo 3: Integral de Lebesgue**, voltado a introduzir obviamente a Integral de Lebesgue e os teoremas TCM e TCD; e **Capítulo 4: Considerações Finais**, onde faremos um retrospecto dos capítulos anteriores comentando os comparativos entre ambas integrais.

1 Integral de Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann, frequentemente conhecido como Benhard Riemann ou simplesmente Riemann, foi um matemático nascido em 17 de setembro de 1826 em uma aldeia alemã de Hanover e falecendo, ainda "jovem" aos seus 39 anos de idade devido a tuberculose (conhecida com o mal do século), no dia 20 de julho de 1866 no norte da Itália. Ele era filho de um ministro protestante, que lhe forneceu uma boa educação elementar, e ainda com pouca idade, demonstrando exímio talento, interessou-se por Aritmética. (EVES, 2011; ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014).

Riemann, em 1846, ingressou na Universidade de Göttingen com intuito de estudar Teologia e Filosofia, contudo fez a mudança de curso para estudar Matemática orientado por Johann Carl Friedrich Gauss ($\star$1777 – †1855). Ele recebeu, em 1851, seu Ph.D ainda sob orientação de Gauss apresentando "[...] uma brilhante tese no campo da teoria das funções complexas" (EVES, 2011, p. 613) e, pouco tempo depois de obter essa sua titulação (mais especificamente, em 1854), permaneceu na universidade de Göttingen como professor (mas sem remuneração). (EVES, 2011).

No ano de 1857, Riemann torna-se professor assistente na Universidade de Göttingen e sucede Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet ($\star$1805 – †1859) como professor titular apenas em 1859 em uma disciplina que antes fora ocupada pelo seu orientador, Gauss. Já, em 1866, viajou para o norte da Itália a procura de assistência médica e, ainda na Itália, sucumbiu a tuberculose. (EVES, 2011).

Benhard Riemann foi sem dúvidas um matemático extraordinário em seu tempo, pois contribuiu para vários ramos da Matemática como, por exemplo, Geometria e Análise. Nesse último, podemos citar as contribuições por meio das *equações de Cauchy-Riemann* cuja aplicação nos proporciona sabermos se uma função complexa é analítica; e na definição da *Função Zeta de Riemann*, que está interligada com a distribuição dos números primos através da *Hipótese de Riemann* (problema até hoje em aberto).

> Ele certamente exerceu uma influência profunda em vários ramos da matemática, em particular geometria e teoria das funções, e poucos matemáticos deixaram a seus sucessores um legado de ideias tão rico para desenvolvimentos posteriores. (EVES, 2011, p. 613).

Neste capítulo, exibiremos uma das contribuições de Benhard Riemann para a Análise — Integral de Riemann. Salientamos que exporemos a definição apresentada por Darboux e, para tal, nosso texto baseará-se a partir do que as bibliografias (LIMA, 2018; LIMA, 2019; AXLER, 2020; DOERING, 2021; ZAHN, 2022) abordam sobre o tema.

1.1 Ínfimo & Supremo

Nesta seção, discorreremos acerca de alguns conceitos relevantes para compreendermos a Integral de Riemann. Dentre as principais ideias, podemos elencar as noções de cota inferior e superior; elemento mínimo e máximo; ínfimo e supremo; bem como conjunto limitado e função limitada.

Enfatizamos que denotamos de forma usual, como na maioria das literaturas matemática, os conjuntos numéricos (conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$), inteiros ($\mathbb{Z}$), racionais ($\mathbb{Q}$), reais ($\mathbb{R}$) e complexos ($\mathbb{C}$)) e não nos aprofundamos nas teorias de conjuntos e funções para não nos postergar e se perder do escopo desse trabalho (para mais informações a respeito dessas teorias, aconselha-se a consulta de (LIMA, 2019) e (ZAHN, 2022)). Outrossim, para que não haja dúvidas, o conjunto dos números naturais em todo o texto é igual a $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Definição 1.1.1. Considere X um subconjunto do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Um número real a é dito:

(a) *cota inferior de* X quando $a \leqslant x$ para todo $x \in X$;

(b) *cota superior de* X quando $a \geqslant x$ para todo $x \in X$;

(c) *elemento mínimo de* X quando a é cota inferior de X e $a \in X$;

(d) *elemento máximo de* X quando a é cota superior de X e $a \in X$.

Observação 1.1.1. Se X admite cota inferior, essa não é única. De fato, se a é cota inferior de X, então $a \leqslant x$ para todo $x \in X$. Assim, dado $\epsilon > 0$, vê-se que $a - \epsilon \leqslant a \leqslant x$ para todo $x \in X$. Logo, $a - \epsilon$ é também uma cota inferior de X.

Reforçamos ainda que a observação acima é igualmente válida para cota superior e a forma de garantirmos isso é análoga ao que foi feito para cota inferior.

Proposição 1.1.1. Seja X um subconjunto do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O elemento mínimo (respectivamente, elemento máximo) de X, quando existe, é único.

Demonstração. Suponha que a e a' sejam elementos mínimo de X. Então, pelo fato de a ser o elemento mínimo, $a \leqslant a'$; enquanto, por a' também ser elemento mínimo de X, $a' \leqslant a$. Portanto, $a = a'$. Analogamente, demonstra-se que o elemento máximo de X é único. □

Observação 1.1.2. Os elementos mínimo e máximo de X são, respectivamente, denotados por $\min X$ e $\max X$.

Definição 1.1.2. Um subconjunto X do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é dito:

(a) *limitado inferiormente* quando admite uma cota inferior;

(b) *limitado superiormente* quando admite uma cota superior.

Observação 1.1.3. Quando X é limitado inferiormente e superiormente, dizemos que X é *limitado.* Em contrapartida, quando X não é limitado inferiormente ou superiormente, dizemos que X é *ilimitado.*

O próximo resultado nos fornece uma caracterização para que um conjunto de números reais seja limitado.

Proposição 1.1.2. Seja X um subconjunto do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Tem-se que X é limitado se, e somente se, $X \subset [-c, c]$ para algum $c \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Segue abaixo.

Sendo X um conjunto limitado, então X é limitado inferiormente e superiormente. Com isso, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leqslant x \leqslant b$ para todo $x \in X$ (note que a é uma cota inferior e b é uma cota superior de X). Defina o número real $c = \max\{|a|, |b|\}$. Assim, vê-se que $|a| \leqslant c$ donde $-c \leqslant a \leqslant c$; enquanto que $b \leqslant c$ (afinal, $b \leqslant |b|$). Logo, $-c \leqslant x \leqslant c$ para todo $x \in X$, isto é, $X \subset [-c, c]$.

Por outro lado, sendo $X \subset [-c, c]$ para algum $c \in \mathbb{R}$, então $-c \leqslant x \leqslant c$ para todo $x \in X$. Vê-se claramente que $-c$ e c são, respectivamente, uma cota inferior e superior de X. Assim, X é limitado inferiormente e superiormente; logo limitado. □

Proposição 1.1.3. Sejam X e Y conjuntos de números reais tais que $X \subset Y$. Se Y é limitado, então X também o é.

Demonstração. Basta reparar que, como Y é limitado, $Y \subset [-c, c]$ para algum $c \in \mathbb{R}$. Segue pela transitividade da relação de inclusão que $X \subset [-c, c]$ para algum $c \in \mathbb{R}$. Portanto, X é limitado. □

Comentário 1.1.1. É comum escrevermos a Proposição 1.1.2 da seguinte forma: Considere X um conjunto de números reais. Para que X seja limitado é necessário e suficiente que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \leqslant c$ para todo $x \in X$.

Definição 1.1.3. Seja X um subconjunto não-vazio e limitado inferiormente do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O número real a é dito *ínfimo de* X quando:

i) a é cota inferior de X;

ii) Para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x < a + \epsilon$.

Definição 1.1.4. Seja X um subconjunto não-vazio e limitado superiormente do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O número real b é dito *supremo de* X quando:

i) b é cota superior de X;

ii) Para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $b - \epsilon < x$.

Observação 1.1.4. O ínfimo e o supremo de X são, respectivamente, a maior das cotas inferiores e a menor das cotas superiores do conjunto X.

Proposição 1.1.4. O ínfimo (respectivamente, supremo) de um subconjunto X não-vazio e limitado inferiormente (respectivamente, limitado superiormente) do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é único.

Demonstração. Considere o conjunto $\mathcal{C} := \{c \in \mathbb{R}; c \leqslant x, \forall x \in X\}$. É claro que $\mathcal{C} \neq \varnothing$, afinal X é limitado inferiormente (isto é, existe $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que $c_0 \leqslant x$ para todo $x \in X$; logo, $c_0 \in \mathcal{C}$). Sendo a e a' os ínfimos do conjunto X, então $a, a' \in \mathcal{C}$. Pelo ínfimo ser a maior das cotas inferiores de X e pela Proposição 1.1.1, segue que $a = \max \mathcal{C} = a'$. Mostra-se de forma análoga que o supremo de X é único. □

Observação 1.1.5. O ínfimo e o supremo de X são, respectivamente, denotados por $\inf X$ e $\sup X$.

Lema 1.1.1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Então $a \leqslant b$.

Demonstração. Forneceremos, para esse resultado, duas demonstrações diferentes uma da outra. Segue abaixo cada um dos modos.

(1º modo) Suponha por absurdo que $b < a$. Repare que $q = \frac{a+b}{2}$ é de tal forma que $b < q < a$. Por $b < q$, existe $t \in \mathbb{R}_+^*$ de modo que $q = b + t$. Segue por hipótese que $a < q$ (absurdo!). Portanto, $a \leqslant b$.

(2º modo) Suponha por absurdo que $b < a$. Assim, $a - b > 0$. Tomando $\epsilon = a - b$, tem-se que $a < b + (a - b) = a$ (absurdo!). Portanto, $a \leqslant b$. □

Teorema 1.1.1. Sejam X e Y subconjuntos não-vazios do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Se $x \leqslant y$ para todo $x \in X$ e todo $y \in Y$, então $\sup X \leqslant \inf Y$. Além do mais, vale a igualdade se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $y - x < \epsilon$.

Demonstração. Segue abaixo.

(Primeira Afirmação) Inicialmente, veja que X e Y admitem, nessa ordem, supremo e ínfimo; afinal X é limitado superiormente pelos elementos de Y e Y é limitado inferiormente pelos elementos de X. Supondo por contradição que $\inf Y < \sup X$, tem-se que existe $t \in \mathbb{R}_+^*$ de forma que $\sup X = \inf Y + t$. Segue da definição de ínfimo que existe $y_0 \in Y$ tal que $y_0 < \inf Y + t = \sup X$ (absurdo porque $\sup X$ é a menor das cotas superiores de X). Portanto, $\sup X \leqslant \inf Y$.

(Segunda Afirmação) Por conta do supremo de X, dado $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ de tal modo que $\sup X - \frac{\epsilon}{2} < x$. De mesma forma, para o ínfimo de Y, existe $y \in Y$ tal que $y < \inf Y + \frac{\epsilon}{2}$. Somando ambas as desigualdades e reordenando seus elementos, obtém-se

$$\sup X - \inf Y + y - x < \epsilon.$$

Desde que $\sup X = \inf Y$, segue que $y - x < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$.

Reciprocamente, tem-se por hipótese que, para todo $\epsilon > 0$, existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que:

$$y - x < \epsilon \iff y < x + \epsilon.$$

Em particular, sabe-se que $\inf Y \leqslant y$ e $x \leqslant \sup X$. Logo, para todo $\epsilon > 0$,

$$\inf Y < \sup X + \epsilon.$$

Segue do Lema 1.1.1 que $\inf Y \leqslant \sup X$. Como a outra desigualdade é sempre verdadeira por conta da primeira afirmação, segue que $\sup X = \inf Y$. □

Proposição 1.1.5. Sejam X e Y subconjuntos limitados do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. É também limitado o conjunto $X + Y := \{x + y; x \in X, y \in Y\}$. Inclusive, é válido:

- $\inf (X + Y) = \inf X + \inf Y$;
- $\sup (X + Y) = \sup X + \sup Y$.

Demonstração. Segue abaixo.

(Primeira Afirmação) Sendo X e Y limitados, tem-se a partir da Proposição 1.1.2 que $X \subset [-a, a]$ e $Y \subset [-b, b]$ para algum $a, b \in \mathbb{R}$. Com isso, $X + Y \subset [-c, c]$ com $c = a + b$. Pela recíproca da Proposição 1.1.2, $X + Y$ é limitado.

(Segunda Afirmação) Sabe-se que $\inf X \leqslant x$ e $\inf Y \leqslant y$ para todo $x \in X$ e todo $y \in Y$. Logo, $\inf X + \inf Y \leqslant x + y = z$ para todo $z \in X + Y$. Com isso, $\inf X + \inf Y$ é cota inferior de $X + Y$. Resta garantir que é a maior cota inferior de $X + Y$.

Dado $\epsilon > 0$, tem-se que existem $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ tais que:

$$x_0 < \inf X + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad y_0 < \inf Y + \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, $z_0 = x_0 + y_0 < (\inf X + \inf Y) + \epsilon$. Portanto, $\inf (X + Y) = \inf X + \inf Y$.

A outra igualdade do enunciado é demonstrada de forma análoga. □

Proposição 1.1.6. Sejam X um subconjunto limitado do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e $c \in \mathbb{R}$. É também limitado o conjunto $c \cdot X := \{cx; x \in X\}$. Inclusive, é válido:

- Se $c \geqslant 0$, então $\inf(c \cdot X) = c \cdot \inf X$ e $\sup(c \cdot X) = c \cdot \sup X$;
- Se $c < 0$, então $\inf(c \cdot X) = c \cdot \sup X$ e $\sup(c \cdot X) = c \cdot \inf X$.

Demonstração. Segue abaixo.

(Primeira Afirmação) Sendo X limitado, tem-se a partir da Proposição 1.1.2 que $X \subset [-a, a]$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Com isso, $c \cdot X \subset [-b, b]$ com $b = ca$. Pela recíproca da Proposição 1.1.2, $c \cdot X$ é limitado.

(Segunda Afirmação) Se $c = 0$, então $c \cdot X = \{0\}$. Consequentemente,

$$\inf(c \cdot X) = 0 = c \cdot \inf X \quad \text{e} \quad \sup(c \cdot X) = 0 = c \cdot \sup X.$$

Suponha então $c > 0$. Sabe-se que $\inf X \leqslant x$ para todo $x \in X$. Assim, $c \cdot \inf X \leqslant cx = z$ para todo $z \in c \cdot X$. Resta mostrar que $c \cdot \inf X$ é a maior das cotas inferiores de $c \cdot X$.

Dado $\epsilon > 0$, existe $x_0 \in X$ tal que:

$$x_0 < \inf X + \frac{\epsilon}{c} \iff z_0 = cx_0 < c \cdot \inf X + \epsilon.$$

Portanto, $\inf(c \cdot X) = c \cdot \inf X$.

Por outro lado, se $c < 0$; então $c \cdot \inf X \geqslant cx = z$ para todo $z \in c \cdot X$. Além disso, existe $x_0 \in X$ tal que

$$x_0 < \inf X + \frac{\epsilon}{-c} \iff z_0 = cx_0 > c \cdot \inf X - \epsilon.$$

Portanto, $\sup(c \cdot X) = c \cdot \inf X$.

As demais igualdades são demonstradas de forma análoga. $\square$

Proposição 1.1.7. Sejam X, X', Y e Y' conjuntos limitados de números reais. Considere ainda que $X' \subset X$ e $Y' \subset Y$. Se, para cada $x \in X$ e $y \in Y$, existem $x' \in X'$ e $y' \in Y'$ tais que $x' \leqslant x$ e $y \leqslant y'$, então $\inf X' = \inf X$ e $\sup Y' = \sup Y$.

Demonstração. Sabe-se que $\inf X \leqslant x$ para todo $x \in X$. Em particular, $\inf X \leqslant x'$ para todo $x' \in X'$ (afinal, $X' \subset X$). Então, $\inf X$ é cota inferior de X' e por isso $\inf X \leqslant \inf X'$. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que

$$x < \inf X + \epsilon.$$

Por $x \in X$, segue por hipótese que existe $x' \in X'$ de tal modo que $x' \leqslant x$. Assim,

$$x' < \inf X + \epsilon.$$

Pelo Lema 1.1.1, segue que $x' \leqslant \inf X$. Contudo, $\inf X' \leqslant x'$ e, consequentemente, $\inf X' \leqslant \inf X$. Portanto, $\inf X' = \inf X$.

Procedendo de maneira análoga, obtém-se que $\sup Y = \sup Y'$. $\square$

Para encerrarmos essa seção, apresentaremos a noção de função limitada e algumas de suas propriedades para utilização imediata em resultados envolvendo a Integral de Riemann em seções subsequentes.

Definição 1.1.5. Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que f *é limitada* quando o seu conjunto imagem, $f(X) = \{f(x) \in \mathbb{R}; x \in X\}$, é limitado.

Definição 1.1.6. Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada. O *ínfimo* e o *supremo de f* são, respectivamente, $\inf f = \inf f(X)$ e $\sup f = \sup f(X)$.

Corolário 1.1.1. Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções limitadas. São também limitadas as funções $f + g$ e cf para todo $c \in \mathbb{R}$. Inclusive, tem-se:

- $\inf\,(f + g) \geqslant \inf f + \inf g$ e $\sup\,(f + g) \leqslant \sup f + \sup g$;
- Se $c \geqslant 0$, então $\inf cf = c \cdot \inf f$ e $\sup cf = c \cdot \sup f$;
- Se $c < 0$, então $\inf cf = c \cdot \sup f$ e $\sup cf = c \cdot \inf f$.

Demonstração. Segue abaixo.

(Primeira Afirmação) Por hipótese, $f(X)$ e $g(X)$ são conjuntos limitados. Consequentemente, $f(X) + g(X)$ e $c \cdot f(X)$ são limitados por conta, respectivamente, das Proposições 1.1.5 e 1.1.6. Observa-se ainda que:

$$(f + g)(X) \subset f(X) + g(X) \quad \text{e} \quad (cf)(X) = c \cdot f(X),$$

De fato, $(f + g)(X) \subset f(X) + g(X)$ porque, dado $y \in (f + g)(X)$, existe $x \in X$ tal que $(f + g)(x) = y$. Uma vez que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, então $y \in f(X) + g(X)$. Já a igualdade $(cf)(X) = c \cdot f(X)$ é imediata, afinal, $(cf)(x) = c \cdot f(x)$.

Sendo assim, pela Proposição 1.1.3, $(f + g)(X)$ é limitado; enquanto $(cf)(X)$ é limitado por conta da igualdade estabelecida anteriormente. Logo, $f + g$ e cf são funções limitadas.

(Segunda Afirmação) Enfim, para garantir a validade de pelo menos uma das expressões matemáticas enunciadas no resultado, é essencial mostrar que se A e A' são conjuntos limitados de números reais tais que $A' \subset A$, então $\inf A' \geqslant \inf A$ e $\sup A' \leqslant \sup A$.

De fato, repare que $\inf A \leqslant a$ para todo $a \in A$. Em particular, $\inf A \leqslant a'$ para todo $a' \in A'$ (afinal, $A' \subset A$). Como $\inf A'$ é a maior das cotas inferiores de A' e $\inf A$ é cota inferior de A', segue que $\inf A' \geqslant \inf A$. De maneira similar, verifica-se que $\sup A' \leqslant \sup A$.

Segue então das informações anteriores, juntamente da Proposição 1.1.5, que:

$$\inf\,(f + g)\,(X) \geqslant \inf f(X) + \inf g(X) \quad \text{e} \quad \sup\,(f + g)\,(X) \leqslant \sup f(X) + \sup g(X),$$

ou seja,

$$\inf (f+g) \geqslant \inf f + \inf g \quad \text{e} \quad \sup (f+g) \leqslant \sup f + \sup g.$$

Outrossim, por conta da igualdade $(cf)(X) = c \cdot f(X)$, segue da Proposição 1.1.6 as demais expressões matemáticas contidas no enunciado desse resultado. □

Proposição 1.1.8. Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então tem-se que

$$\sup f(X) - \inf f(X) = \sup \{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}.$$

Demonstração. Por f ser uma função limitada, então $f(X)$ é um conjunto limitado e, por conseguinte, $f(X)$ admite ínfimo e supremo.

Considere $x, y \in X$ quaisquer. Suponha ainda, sem perda de generalidade, que $f(y) \leqslant f(x)$. Assim,

$$\inf f(X) \leqslant f(y) \leqslant f(x) \leqslant \sup f(X).$$

Com isso,

$$|f(x) - f(y)| = f(x) - f(y) \leqslant \sup f(X) - \inf f(X).$$

A desigualdade acima garante que $\sup f(X) - \inf f(X)$ é uma cota superior para o conjunto $\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}$ e dessa maneira tal conjunto é limitado superiormente.

Por outro lado, para todo $\epsilon > 0$, existem $x, y \in X$ tais que $f(y) < \inf f(X) + \frac{\epsilon}{2}$ e $\sup f(X) - \frac{\epsilon}{2} < f(x)$. Sendo assim,

$$|f(x) - f(y)| = f(x) - f(y) > [\sup f(X) - \inf f(X)] - \epsilon.$$

Portanto, $\sup \{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\} = \sup f(X) - \inf f(X)$. □

1.2 Integral de Riemann

Apresentaremos, nesta seção, o conceito da Integral de Riemann, que é baseado em outras duas ideias – Integral Inferior e Integral Superior. É claro, entretanto, que para estabelecê-las necessitaremos de conceitos predecessores como, por exemplo, as noções de partição e comprimento de um intervalo fechado, bem como somas inferior e superior de uma função limitada.

Definição 1.2.1. Uma *partição* $\mathcal{P}$ do intervalo fechado $I = [a, b]$ é um subconjunto finito de I que contém os extremos desse intervalo. Em outras palavras, pondo $t_0 = a$ e $t_n = b$; e escolhendo ainda $t_1, t_2 \ldots, t_{n-1} \in I$ dois a dois distintos, tem-se que

$$\mathcal{P} = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$$

é uma partição do intervalo I.

Observação 1.2.1. É comum escrever $\mathcal{P}$ da seguinte maneira:

$$\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b\}.$$

Assim, diz-se que a partição $\mathcal{P}$ é *ordenadamente crescente*.

A partir de agora quando nos referirmos a uma partição de um intervalo fechado, sempre estaremos considerando ela ordenadamente crescente para evitar demasiadas repetições no texto.

Veja uma representação da partição $\mathcal{P} = \{t_0 = a, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = b\}$ do intervalo fechado $I = [a, b]$ na Figura 1 abaixo.

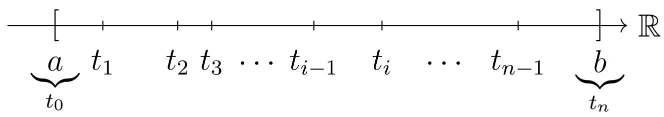

Figura 1 – Representação geométrica da partição $\mathcal{P}$ do intervalo $I = [a, b]$.

Definição 1.2.2. Considere uma partição $\mathcal{P} = \{t_0 = a, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = b\}$ do intervalo $I = [a, b]$. O *comprimento do i-éssimo intervalo fechado* $[t_{i-1}, t_i]$ *da partição* $\mathcal{P}$ é o número real $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$.

Observação 1.2.2. Se $\mathcal{P} = \{t_0 = a, t_1, t_2 \ldots, t_{n-1}, t_n = b\}$ é uma partição de $I = [a, b]$, então

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = b - a.$$

De fato, repare que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \Delta_i &= \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_{n-1} + \Delta_n \\
&= (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \cdots + (t_{n-1} - t_{n-2}) + (t_n - t_{n-1}) \\
&= (\cancel{t_1} - t_0) + (\cancel{t_2} - \cancel{t_1}) + \cancel{\cdots} + (\cancel{t_{n-1}} - \cancel{t_{n-2}}) + (t_n - \cancel{t_{n-1}}) \\
&= t_n - t_0 \\
&= b - a.
\end{aligned}$$

Definição 1.2.3. Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ partições do intervalo fechado $I = [a, b]$. Diz-se que $\mathcal{Q}$ *refina* $\mathcal{P}$ quando $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$.

Exemplo 1.2.1. Uma partição do intervalo fechado $I = [0, 1]$ é:

$$\mathcal{P} = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}.$$

Outras partições do mesmo intervalo são:

$$\mathcal{P}' = \left\{0, \frac{1}{1.000}, \frac{1}{100}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1\right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}^* = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right\}.$$

O comprimento do intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ das partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ é $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Já o comprimento do intervalo $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ da partição $\mathcal{P}^*$ é $\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

Além disso, veja que $\mathcal{P}'$ refina $\mathcal{P}$ porque $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$; entretanto, $\mathcal{P}^*$ não refina $\mathcal{P}$ e muito menos $\mathcal{P}'$ porque $\mathcal{P} \not\subset \mathcal{P}^*$ e $\mathcal{P}' \not\subset \mathcal{P}^*$.

Definição 1.2.4. Sejam $\mathcal{P} = \{t_0 = a, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = b\}$ uma partição do intervalo fechado $I = [a, b]$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ da partição $\mathcal{P}$, o *ínfimo* e o *supremo de* f são, nessa ordem, dados por

$$m_i = \inf\{f(x); x \in [t_{i-1}, t_i]\} \quad \text{e} \quad M_i = \sup\{f(x); x \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

Definição 1.2.5. Sejam $\mathcal{P} = \{t_0 = a, t_1, t_2 \ldots, t_{n-1}, t_n = b\}$ uma partição do intervalo fechado $I = [a, b]$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Em relação à partição $\mathcal{P}$, a *soma inferior de* f e a *soma superior de* f são, respectivamente, dadas por

$$s(f; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i \quad \text{e} \quad S(f; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i.$$

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função limitada não-negativa[1], então percebe-se que $m_i \Delta_i$ é a área do retângulo $[t_{i-1}, t_i] \times [0, m_i]$ abaixo da curva descrita por f. Com isso, somando todos os $m_i \Delta_i$'s, obtém-se a soma inferior de f que nada mais é do que a área aproximada por falta da região abaixo da curva de f. Veja a Figura 2.

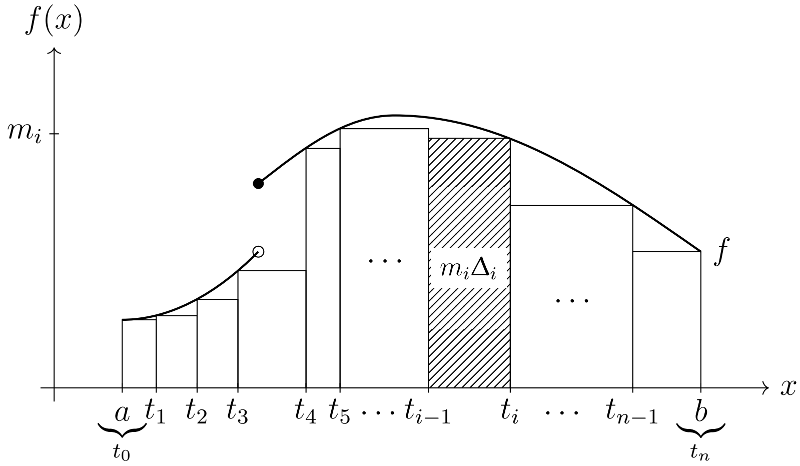

Figura 2 – Representação da soma inferior de f em relação a partição $\mathcal{P}$.

De maneira análoga, vê-se que a soma superior de f é a aproximação por excesso da área abaixo da curva descrita por f. Veja a Figura 3.

[1] Uma função é dita não-negativa quando o seu conjunto imagem está contido em $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant 0\}$.

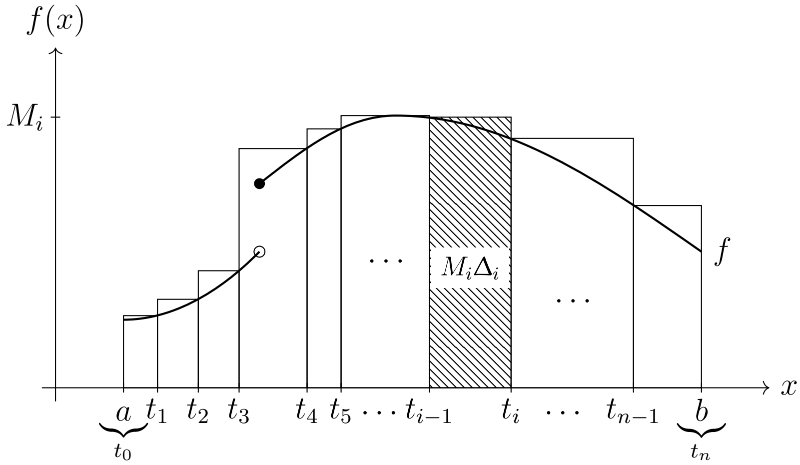

Figura 3 – Representação da soma superior de f em relação a partição $\mathcal{P}$.

Quando f é negativa ($f(x) < 0$ para todo $x \in [a,b]$), tem-se que as somas inferior e superior de f são, na devida ordem, a aproximação por falta e excesso da área abaixo da curva de f com o sinal oposto.

Lema 1.2.1. Seja $\mathcal{P} = \{t_0 = a, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = b\}$ uma partição do conjunto domínio da função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Então,

$$s(f;\mathcal{P}) \leqslant S(f;\mathcal{P}).$$

Demonstração. Repare que $m_i = \inf\{f(x); x \in [t_{i-1}, t_i]\} \leqslant \sup\{f(x); x \in [t_{i-1}, t_i]\} = M_i$ e $\Delta_i = t_i - t_{i-1} > 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Com isso, $m_i\Delta_i \leqslant M_i\Delta_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Somando membro a membro as n desigualdades anteriores, obtém-se

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i,$$

ou seja,

$$s(f;\mathcal{P}) \leqslant S(f;\mathcal{P}).$$

□

Lema 1.2.2. Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, duas partições do domínio de f tais que $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$. Então,

$$s(f;\mathcal{P}) \leqslant s(f;\mathcal{Q}) \leqslant S(f;\mathcal{Q}) \leqslant S(f;\mathcal{P}).$$

Demonstração. Seja $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$. Suponha, em um primeiro momento, que $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \{r\}$. Digamos que $t_{i-1} < r < t_i$ para algum $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ponha ainda m' e m'' os ínfimos de f nos intervalos $[t_{i-1}, r]$ e $[r, t_i]$, respectivamente. Evidentemente,

$$m_i \leqslant m' \quad \text{e} \quad m_i \leqslant m'',$$

afinal, $[t_{i-1}, r], [r, t_i] \subset [t_{i-1}, t_i]$. Além disso, $t_{i-1} - t_i = (t_i - r) + (r - t_{i-1})$.

Portanto,

$$\begin{aligned} s(f;\mathcal{Q}) - s(f;\mathcal{P}) &= m''(t_i - r) + m'(r - t_{i-1}) - m_j(t_i - t_{i-1}) \\ &= m''(t_i - r) + m'(r - t_{i-1}) - \{m_j[(t_i - r) + (r - t_{i-1})]\} \\ &= (m'' - m_i)(t_i - r) + (m' - m_i)(r - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Uma vez que $m' - m_i \geqslant 0$ e $m'' - m_i \geqslant 0$ (bem como os comprimentos dos intervalos $[t_{i-1}, r]$ e $[r, t_i]$), segue que

$$s(f;\mathcal{Q}) - s(f;\mathcal{P}) \geqslant 0 \Longleftrightarrow s(f;\mathcal{Q}) \geqslant s(f;\mathcal{P}).$$

Para obter o resultado geral, em que $\mathcal{Q}$ resulta de $\mathcal{P}$ acrescido de k elementos, usa-se k-vezes o que foi provado acima. A desigualdade central é imediata e a última desigualdade prova-se de forma análoga ao que fora feito acima! $\square$

O Lema 1.2.2 nos garante que, ao refinarmos uma dada partição, as somas inferior e superior, nessa dada ordem, não diminui e nem aumenta. Assim, quando refinamos cada vez mais uma partição, aumentamos o número de retângulos e, consequentemente, fazemos com que a defasagem entre a soma inferior (respectivamente, soma superior) e a área exata abaixo da curva da função seja diminuída; ou seja, a aproximação fica cada vez mais precisa/próxima da área real.

Definição 1.2.6. Sejam o conjunto $\Lambda := \{\mathcal{P}; \mathcal{P}$ é partição de $[a, b]\}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. A *integral inferior de* f e a *integral superior de* f são, respectivamente,

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(f;\mathcal{P}); \mathcal{P} \in \Lambda\} \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f = \inf\{S(f;\mathcal{P}); \mathcal{P} \in \Lambda\}.$$

Exemplo 1.2.2. Considere a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$, onde c é um número real fixado. É claro que f é limitada, pois $f([a, b]) = \{c\}$ é limitado. A partir daí, considere $\mathcal{P} = \{t_0 = a, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = b\}$ uma partição qualquer de $[a, b]$. Veja que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tem-se $m_i = M_i = c$ uma vez que $f([t_{i-1}, t_i]) = \{c\}$. Com isso,

$$s(f;\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} c\Delta_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = c(b - a)$$

e

$$S(f;\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} c\Delta_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = c(b - a).$$

Portanto,

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = c(b - a).$$

Exemplo 1.2.3. Seja a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$. Veja que f é limitada! De fato, dado $x \in [0,1]$, então $0 \leqslant x \leqslant 1$ donde $0 \leqslant 2x \leqslant 2$, ou seja, $0 \leqslant f(x) \leqslant 2$. Uma vez que os números 0 e 2 são, respectivamente, cotas inferior e superior para $f([0,1])$, então $f([0,1])$ é limitado, ou melhor, f é limitada.

- *Afirmação*: $\underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f = 1.$

Com efeito, seja $\mathcal{P} = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = 1\}$ uma partição qualquer do intervalo fechado $[0,1]$. Para $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, tem-se $m_i = 2t_{i-1}$ e $M_i = 2t_i$ (pois f é uma função crescentemente contínua no conjunto compacto[2] $[t_{i-1}, t_i]$). Com isso,

$$\begin{aligned}
s(f;\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} 2t_{i-1}(t_i - t_{i-1}) &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left[2t_{i-1}(t_i - t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1})^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})(2t_{i-1} + t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})(t_i + t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (t_i^2 - t_{i-1}^2) \\
&= (t_1^2 - t_0^2) + (t_2^2 - t_1^2) + \ldots + (t_n^2 - t_{n-1}^2) \\
&= (\cancel{t_1^2} - t_0^2) + (\cancel{t_2^2} - \cancel{t_1^2}) + \cancel{\ldots} + (t_n^2 - \cancel{t_{n-1}^2}) \\
&= t_n^2 - t_0^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Logo, 1 é cota superior do conjunto $A := \{s(f;\mathcal{P}); \mathcal{P}$ é partição de $[0,1]\}$. Resta mostrar que $\sup A = 1$.

De fato, para todo $\epsilon > 0$ dado, considere a partição do intervalo $[0,1]$ descrita por $\mathcal{P}_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ com $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{\epsilon}$. Veja que, para cada $i \in \{1,2,\ldots,n\}$,

$$m_i = 2 \cdot \frac{i-1}{n}, \quad M_i = 2 \cdot \frac{i}{n} \quad \text{e} \quad \Delta_i = \frac{1}{n}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
s(f;\mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(2 \cdot \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) &= 2 \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (i-1) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\
&= \frac{n-1}{n} \\
&= 1 - \frac{1}{n} \\
&> 1 - \epsilon.
\end{aligned}$$

[2] Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito compacto quando toda sequência de pontos de X possui uma subsequência que converge para um ponto de X.

Portanto, $\underline{\int_0^1} f = 1$.

Usando um procedimento análogo, garante-se que $\overline{\int_0^1} f = 1$.

Corolário 1.2.1. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Tem-se que

$$s(f;\mathcal{P}) \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant S(f;\mathcal{P}),$$

onde $\mathcal{P}$ é uma partição qualquer de $[a,b]$.

Demonstração. Considere o conjunto $\Lambda = \{\mathcal{P}; \mathcal{P} \text{ é partição de } [a,b]\}$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Pelo Lema 1.2.1, segue que $s(f;\mathcal{P}) \leqslant S(f;\mathcal{P})$ seja qual for a partição $\mathcal{P}$ do domínio de f. Então, pelo Teorema 1.1.1, tem-se

$$\sup\{s(f;\mathcal{P}); \mathcal{P} \in \Lambda\} \leqslant \inf\{S(f;\mathcal{P}); \mathcal{P} \in \Lambda\},$$

ou seja,

$$\underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f.$$

As desigualdades externas apresentadas no resultado são triviais. □

Veremos, no próximo exemplo, um caso em que a desigualdade central do Corolário 1.2.1 é estrita, afinal, até o momento observamos dois exemplos em que ocorria a igualdade entre as integrais inferior e superior.

Exemplo 1.2.4. Seja a Função de Dirichlet $\mathfrak{D} : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é irracional} \\ 1, & \text{se } x \text{ é racional} \end{cases}.$$

É claro que $\mathfrak{D}$ é limitada, pois $\mathfrak{D}([0,1]) = \{0,1\}$ é limitado. Agora, considerando uma partição $\mathcal{P} = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = 1\}$ qualquer de $[0,1]$, tem-se que $m_i = 0$ e $M_i = 1$ para $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. De fato, para $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, vê-se que em $[t_{i-1}, t_i]$ sempre se encontra um número racional e outro irracional por conta dos conjuntos dos números racionais e irracionais serem densos na reta real. Com isso, $\mathfrak{D}([t_{i-1},t_i]) \supset \mathfrak{D}([0,1])$, mas por outro lado sempre se tem que $\mathfrak{D}([0,1]) \supset \mathfrak{D}([t_{i-1},t_i])$. Logo, $\mathfrak{D}([t_{i-1},t_i]) = \mathfrak{D}([0,1])$ donde $m_i = 0$ e $M_i = 1$. A partir daí,

$$s(\mathfrak{D};\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_i = 0 \quad \text{e} \quad S(\mathfrak{D};\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i = 1.$$

Uma vez que $\mathcal{P}$ é uma partição qualquer de $[0,1]$, segue que

$$\underline{\int_0^1} \mathfrak{D} = 0 < 1 = \overline{\int_0^1} \mathfrak{D}.$$

Definição 1.2.7. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Diz-se que f é *integrável a Riemann* quando

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Nesse caso, a esse valor, chamamos de *integral* e o denotamos por $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.

A partir dos Exemplos 1.2.2 e 1.2.3, percebemos que

$$\int_a^b c\, dx = c(b-a) \quad \text{e} \quad \int_0^1 2x\, dx = 1.$$

Com relação ao Exemplo 1.2.4, vemos que a Função de Dirichlet não é integrável à Riemann. Entretanto, no Capítulo 3, veremos que essa função é integrável à Lebesgue.

Vejamos outros exemplos!

Exemplo 1.2.5. Seja a função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$, se $x \in [-1, 0)$; e $f(x) = \frac{1}{2}$, se $x \in [0, 1]$. É claro que f é limitada, afinal $f([-1, 1]) = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$. Além disso, observe que f não é contínua. Considere, para $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$,

$$\mathcal{P}_n = \left\{-1, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 1\right\}$$

uma partição de $[-1, 1]$.

Assim,

$$\begin{aligned} s(f; \mathcal{P}_n) &= 1\left(-\frac{1}{n} + 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S(f; \mathcal{P}_n) &= 1\left(-\frac{1}{n} + 1\right) + 1\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Pelo Corolário 1.2.1,

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2n} \leqslant \underline{\int_{-1}^1} f \leqslant \overline{\int_{-1}^1} f \leqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}.$$

Logo, pelo *Teorema das Sucessões Enquadradas*[3], quando $n \to \infty$, conclui-se que

$$\int_{-1}^{1} f = \frac{3}{2}.$$

Exemplo 1.2.6. Considere a função limitada $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 1$. Além disso, para $n \in \mathbb{N}$, seja

$$\mathcal{P}_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

uma partição de $[0,1]$.

A partir daí, vê-se que

$$\begin{aligned}
s(f;\mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(i-1)^2 - n^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}\right]\\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}[(i-1)^2 - n^2]\\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 - \sum_{i=1}^{n} n^2\right]\\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\left[\frac{n(2n-1)(n-1)}{6} - n^3\right]\\
&= -1 + \frac{(2n-1)(n-1)}{6n^2}\\
&= -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\\
&= -\frac{2}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
S(f;\mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{i^2 - n^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}\right]\\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}[i^2 - n^2]\\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} n^2\right]\\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\left[\frac{n(2n+1)(n+1)}{6} - n^3\right]\\
&= -1 + \frac{(2n+1)(n+1)}{6n^2}\\
&= -1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\\
&= -\frac{2}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}
\end{aligned}$$

[3] **Enunciado**: Sejam a_n, b_n e c_n sequências de números reais tais que:

i) $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$.

Então, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

Pelo Corolário 1.2.1,

$$-\frac{2}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\leqslant \underline{\int_0^1} f\leqslant \overline{\int_0^1} f\leqslant -\frac{2}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}.$$

Logo, pelo Teorema das Sucessões Enquadradas, quando $n\to\infty$, conclui-se que

$$\int_0^1 f=-\frac{2}{3}.$$

1.3 Condições de Integrabilidade à Riemann

Estaremos, a partir de agora, interessados em saber quando uma função limitada é ou não integrável à Riemann porque evita a realização de cálculos desnecessários para encontrar o valor da integral, que é inexistente caso a função venha ser não integrável. Nesse sentido, apresentaremos os principais resultados que versão sobre as condições que precisam ser satisfeitas/garantidas para que uma função seja ou não integrável à Riemann.

Teorema 1.3.1 (Condição Imediata de Integrabilidade)**.** Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada. São equivalentes as seguintes afirmações:

i) f é integrável;

ii) Dado $\epsilon>0$, existem partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ de $[a,b]$ tais que $S(f;\mathcal{P})-s(f;\mathcal{Q})<\epsilon$;

iii) Dado $\epsilon>0$, existe uma partição $\mathcal{P}'$ de $[a,b]$ tal que $S(f;\mathcal{P}')-s(f;\mathcal{P}')<\epsilon$.

Demonstração. Segue abaixo.

- *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Suponha que f é integrável, ou seja,

$$\underline{\int_a^b} f=\sup\{s(f;\mathcal{P});\mathcal{P}\in\Lambda\}=\inf\{S(f;\mathcal{P});\mathcal{P}\in\Lambda\}=\overline{\int_a^b} f,$$

onde $\Lambda=\{\mathcal{P};\mathcal{P}$ é partição de $[a,b]\}$.

Pela segunda parte do Teorema 1.1.1, existem $\mathcal{P},\mathcal{Q}\in\Lambda$ tais que

$$S(f;\mathcal{P})-s(f;\mathcal{Q})<\epsilon,$$

para todo $\epsilon>0$ dado.

- *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* Dado $\epsilon>0$, existem duas partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ de $[a,b]$ tais que

$$S(f;\mathcal{P})-s(f;\mathcal{Q})<\epsilon.$$

Tomando a partição $\mathcal{P}'=\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$, segue do Lema 1.2.2 que

$$s(f;\mathcal{Q})\leqslant s(f;\mathcal{P}')\leqslant S(f;\mathcal{P}')\leqslant S(f;\mathcal{P}).$$

Decorre das desigualdades acima que

$$S(f;\mathcal{P}')-s(f;\mathcal{P}')\leqslant S(f;\mathcal{P})-s(f;\mathcal{Q})<\epsilon.$$

- $iii) \Rightarrow i)$ Dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $\mathcal{P}'$ de $[a,b]$ tal que $S(f;\mathcal{P}') - s(f;\mathcal{P}') < \epsilon$. Logo, segue do Teorema 1.1.1 que:

$$\sup\{s(f;\mathcal{P});\mathcal{P}\in\Lambda\} = \inf\{S(f;\mathcal{P});\mathcal{P}\in\Lambda\},$$

isto é,

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Portanto, f é integrável.

Assim, fica mostrado o resultado. □

Comentário 1.3.1. No item *iii*) do Teorema 1.3.1, é comum escrever

$$S(f;\mathcal{P}') - s(f;\mathcal{P}') = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta_i,$$

onde $\omega_i = M_i - m_i$ é chamado de *oscilação de f no i-éssimo intervalo da partição $\mathcal{P}'$.*

Teorema 1.3.2. Para a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ser integrável é suficiente que essa seja contínua.

Demonstração. Pela continuidade da função f no conjunto compacto $[a,b]$, temos que f é limitada e uniformemente contínua. Por f ser uniformemente contínua, segue que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $x, y \in [a,b]$,

$$|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Tome $\mathcal{P} = \{t_0 = a, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ uma partição de $[a,b]$ de tal modo que $\Delta_i < \delta$ para todo $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Além disso, no conjunto compacto $[t_{i-1}, t_i]$ da partição $\mathcal{P}$, f admite elementos de mínimo e máximo; ou seja; existem $x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tais que $m_i = f(x_i)$ e $M_i = f(y_i)$. Uma vez que $|x_i - y_i| \leqslant \Delta_i$ (afinal, $t_{i-1} \leqslant x_i, y_i \leqslant t_i$),

$$|x_i - y_i| < \delta \implies |m_i - M_i| = |M_i - m_i| = M_i - m_i < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

A partir daí,

$$\begin{aligned} S(f;\mathcal{P}) - s(f;\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta_i \\ &< \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a}\Delta_i \\ &= \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i \\ &= \frac{\epsilon}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 1.3.1, f é integrável. □

Comentário 1.3.2. Observe que não é necessário que a função seja contínua para que essa seja integrável como nos mostra o Exemplo 1.2.5.

Teorema 1.3.3. Para a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ser integrável é suficiente que essa seja monótona.

Demonstração. Suponha, sem perder a generalidade do resultado, que f seja uma função decrescente, isto é, dados $x, y \in [a, b]$ tais que $x > y$, então $f(x) < f(y)$. Veja também que f é limitada, afinal, $f(b) \leqslant f(x) \leqslant f(a)$ para todo $x \in [a, b]$. Ademais, nota-se que $f(a)$ e $f(b)$ são, na posta ordem, os elementos de máximo e mínimo de f.

Para garantir que f seja integrável, deve-se, para todo $\epsilon > 0$ dado, encontrar uma partição de $[a, b]$ cuja diferença entre as somas superior e inferior seja menor do que o dado ϵ.

Tome a partição $\mathcal{P} = \{t_0 = a, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ de tal forma que

$$\Delta_i = t_i - t_{i-1} < \frac{\epsilon}{f(a) - f(b)}.$$

Além disso, no conjunto compacto $[t_{i-1}, t_i]$, f admite elemento de mínimo e máximo nos extremos de tal intervalo (pois f é decrscente), isto é, $m_i = f(t_i)$ e $M_i = f(t_{i-1})$.

Com isso,

$$\begin{aligned}
S(f; \mathcal{P}) - s(f; \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(f(t_{i-1}) - f(t_i) \right) \Delta_i \\
&< \sum_{i=1}^{n} \left(f(t_{i-1}) - f(t_i) \right) \frac{\epsilon}{f(a) - f(b)} \\
&= \frac{\epsilon}{f(a) - f(b)} \sum_{i=1}^{n} \left(f(t_{i-1}) - f(t_i) \right) \\
&= \frac{\epsilon}{\cancel{f(a) - f(b)}} \cancel{(f(a) - f(b))} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 1.3.1, f é integrável. □

O próximo resultado nos determina de uma vez por todas quando uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável, pois nos fornece a condição, não apenas suficiente, mas necessária!

Teorema 1.3.4 (Borel-Lebesgue)**.** Considere a função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. A condição necessária e suficiente para que f seja integrável é que o seu conjunto D de pontos de descontinuidade tenha *medida nula*[4].

Demonstração. Vide (LIMA, 2018, p. 132-133). □

1.4 Propriedades da Integral de Riemann

Encontrar o valor da integral de uma função integrável nem sempre é simples, em virtude de que podemos ter funções cujos elementos que compõem sua lei de formação são operações entre outras estruturas matemáticas que podem ser complexas. Em vista disso, iremos apresentar, nesta última seção, algumas propriedades intrínsecas à Integral de Riemann que visam facilitar os cálculos para obter tal valor.

Teorema 1.4.1. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis. Então a soma $f + g$ é integrável e vale

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Demonstração. Como f e g são integráveis, segue do item $iii)$ do Teorema 1.3.1 que, dado $\epsilon > 0$, existem as partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ de $[a, b]$ tais que

$$S(f; \mathcal{P}) - s(f; \mathcal{P}) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad S(g; \mathcal{P}') - s(g; \mathcal{P}') < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando a partição $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$, tem-se ainda por conta do Lema 1.2.2 que:

$$S(f; \mathcal{Q}) - s(f; \mathcal{Q}) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad S(g; \mathcal{Q}) - s(g; \mathcal{Q}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pondo que m_i', m_i'' e m_i são, respectivamente, os ínfimos de f, g e $f + g$; e M_i', M_i'' e M_i são, na posta ordem, os supremos de f, g e $f + g$ no i-éssimo intervalo da partição $\mathcal{Q}$, tem-se $m_i \geqslant m_i' + m_i''$ e $M_i \leqslant M_i' + M_i''$ pelo Corolário 1.1.1. Multiplicando ambas as desigualdades anteriores por Δ_i, faz-se $m_i\Delta_i \geqslant (m_i' + m_i'')\Delta_i$ e $M_i\Delta_i \leqslant (M_i' + M_i'')\Delta_i$. Daí,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} (m_i' + m_i'')\Delta_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} (M_i' + M_i'')\Delta_i,$$

[4] Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem medida nula quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe uma família de intervalos limitados da reta $(I_k)_{k \in L}$, onde L é uma conjunto enumerável, tal que

$$X \subset \bigcup_{k \in L} I_k \quad \text{e} \quad \sum_{k \in L} |I_k| < \epsilon,$$

onde $|I_k|$ é o comprimento do intervalo I_k — que é igual ao módulo da diferença entre os extremos do intervalo.

ou melhor,

$$s(f+g;\mathcal{Q}) \geqslant s(f;\mathcal{Q}) + s(g;\mathcal{Q}) \quad \text{e} \quad S(f+g;\mathcal{Q}) \leqslant S(f;\mathcal{Q}) + S(g;\mathcal{Q}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} S(f+g;\mathcal{Q}) - s(f+g;\mathcal{Q}) &\leqslant [S(f;\mathcal{Q}) + S(g;\mathcal{Q})] - [s(f;\mathcal{Q}) + s(g;\mathcal{Q})] \\ &= [S(f;\mathcal{Q}) - s(f;\mathcal{Q})] + [S(g;\mathcal{Q}) - s(g;\mathcal{Q})] \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 1.3.1, $f+g$ é integrável.

Por outro lado, considerando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ partições quaisquer de $[a,b]$ e o refinamento $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$ de tais partições, segue pelo Corolário 1.2.1 que

$$s(f;\mathcal{Q}) \leqslant \int_a^b f \leqslant S(f;\mathcal{Q}) \quad \text{e} \quad s(g;\mathcal{Q}) \leqslant \int_a^b g \leqslant S(g;\mathcal{Q}).$$

Assim,

$$s(f;\mathcal{Q}) + s(g;\mathcal{Q}) \leqslant \int_a^b f + \int_a^b g \leqslant S(f;\mathcal{Q}) + S(g;\mathcal{Q}).$$

Uma vez que $s(f;\mathcal{Q}) + s(g;\mathcal{Q}) \leqslant s(f+g;\mathcal{Q}), S(f+g;\mathcal{Q}) \leqslant S(f;\mathcal{Q}) + S(g;\mathcal{Q})$ e

$$s(f+g;\mathcal{Q}) \leqslant \int_a^b (f+g) \leqslant S(f+g;\mathcal{Q}),$$

tem-se

$$s(f;\mathcal{P}) + s(g;\mathcal{P}') \leqslant \int_a^b (f+g) \leqslant S(f;\mathcal{P}) + S(g;\mathcal{P}').$$

Logo, aplicando convenientemente duas vezes o Teorema 1.1.1 e em seguida a Proposição 1.1.5,

$$\int_a^b f + \int_a^b g \leqslant \int_a^b (f+g) \leqslant \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Portanto,

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

□

Teorema 1.4.2. Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis. Então o produto fg é integrável.

Demonstração. Como f e g são funções integráveis, então f e g são limitadas. Logo, existem números reais M e M' tais que

$$|f(x)| \leqslant M \quad \text{e} \quad |g(x)| \leqslant M',$$

para todo $x \in [a, b]$.

Tome $K = \max\{M, M'\}$ e, assim,

$$|f(x)| \leqslant K \quad \text{e} \quad |g(x)| \leqslant K,$$

para todo $x \in [a, b]$.

Dada uma partição $\mathcal{P} = \{t_0 = a, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = b\}$ qualquer, sejam ω_i', ω_i'' e ω_i as oscilações de f, g e fg no i-éssimo intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ dessa partição.

Repare que, para quaisquer $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$,

$$\begin{aligned}
|(fg)(y) - (fg)(x)| &= |f(y)g(y) - f(x)g(x)| \\
&= |f(y)g(y) - f(x)g(x) + f(x)g(y) - f(x)g(y)| \\
&= |(f(y) - f(x))g(y) + (g(y) - g(x))f(y)| \\
&\leqslant |(f(y) - f(x))g(y)| + |(g(y) - g(x))f(x)| \\
&= |f(y) - f(x)||g(y)| + |g(y) - g(x)||f(x)| \\
&\leqslant |f(y) - f(x)|K + |g(y) - g(x)|K \\
&= K\left(|f(y) - f(x)| + |g(y) - g(x)|\right).
\end{aligned}$$

Uma vez que as oscilações de f e g no i-éssimo intervalo da partição $\mathcal{P}$ são, respectivamente, as diferenças entre o supremo e ínfimo de f e g nesse intervalo, segue da Proposição 1.1.8 que

$$K\left(|f(y) - f(x)| + |g(y) - g(x)|\right) \leqslant K(\omega_i' + \omega_i'').$$

Como consequência, tem-se $|(fg)(y) - (fg)(x)| \leqslant K(\omega_i' + \omega_i'')$.

Vê-se assim que $K(\omega_i' + \omega_i'')$ é cota superior de $\{|(fg)(y) - (fg)(x)|; x, y \in [t_{i-1}, t_i]\}$. Logo, $\omega_i \leqslant K(\omega_i' + \omega_i'')$. Multiplicando essa desigualdade por Δ_i, reordenando-a e somando membro a membro para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, obtém-se

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta_i \leqslant K\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i' \Delta_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i'' \Delta_i\right),$$

que é

$$S(fg; \mathcal{P}) - s(fg; \mathcal{P}) \leqslant K\left[(S(f; \mathcal{P}) - s(f; \mathcal{P})) + (S(g; \mathcal{P}) - s(g; \mathcal{P}))\right].$$

Uma vez que f e g são integráveis, segue que, para todo $\epsilon > 0$ dado, existem partições $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$ de $[a, b]$ tais que

$$S(f; \mathcal{P}') - s(f; \mathcal{P}') < \frac{\epsilon}{2K} \quad \text{e} \quad S(g; \mathcal{P}'') - s(g; \mathcal{P}'') < \frac{\epsilon}{2K}.$$

Tomando o refino $\mathcal{Q} = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''$, decorre pelo que foi visto anteriormente que

$$\begin{aligned} S(fg;\mathcal{Q}) - s(fg;\mathcal{Q}) &\leqslant K\left[(S(f;\mathcal{Q}) - s(f;\mathcal{Q})) + (S(g;\mathcal{Q}) - s(g;\mathcal{Q}))\right] \\ &< K\left(\frac{\epsilon}{2K} + \frac{\epsilon}{2K}\right) \\ &= \cancel{K} \cdot \frac{\epsilon}{\cancel{K}} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 1.3.1, fg é integrável. □

Comentário 1.4.1. Se f e g são integráveis, não é verdade que se tenha

$$\int_a^b fg = \int_a^b f \cdot \int_a^b g.$$

Para ver isso, note que já sabemos pelo Exemplo 1.2.6 o valor de

$$\int_0^1 (x^2 - 1)\ dx = -\frac{2}{3},$$

mas

$$\int_0^1 (x+1)\ dx \cdot \int_0^1 (x-1)\ dx = -\frac{3}{4}.$$

Contudo, se g for uma função constante (digamos $g(x) = c$ para todo $x \in [a,b]$) vale o seguinte:

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f.$$

Para a demonstração desse fato, vide (LIMA, 2018, p. 128).

É natural nos perguntarmos se o quociente entre as funções integráveis f e g é integrável, já que o produto o é. Pois bem, o próximo resultado nos dirá exatamente que tal afirmação é verídica e para demonstrá-la basta garantirmos que $1/g$ seja integrável quando g é integrável com $0 < k \leqslant |g(x)|$ para todo $x \in [a,b]$, afinal, $f/g = f \cdot 1/g$.

Teorema 1.4.3. Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Se $0 < k \leqslant |g(x)|$ para todo $x \in [a,b]$, então o quociente f/g é integrável.

Demonstração. Vide (LIMA, 2018, p. 128). □

Teorema 1.4.4. Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Se $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

Demonstração. Seja $\mathcal{P} = \{t_0 = a, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = b\}$ uma partição qualquer de $[a, b]$. Tem-se que $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $[t_{i-1}, t_i]$. Pondo m_i e m'_i, respectivamente, os ínfimos de f e g enquanto M_i e M'_i são, nessa ordem, os supremos de f e g no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$; segue do Teorema 1.1.1 que $M_i \leqslant m'_i$. Assim, $m_i \leqslant M_i \leqslant m'_i \leqslant M'_i$. Logo, $s(f; \mathcal{P}) \leqslant s(g; \mathcal{P})$ e $S(f; \mathcal{P}) \leqslant S(g; \mathcal{P})$. Consequentemente, pelo Teorema 1.1.1 novamente, $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$. □

Teorema 1.4.5. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então $|f|$ é integrável e vale

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

Demonstração. Vide (LIMA, 2018, p. 128). □

Para finalizar, demonstraremos um resultado que fala sobre a passagem do limite sob o sinal da integral para podermos comparar a validade com resultados similares voltados a Integral de Lebesgue, que será introduzida em capítulos subsequentes.

Definição 1.4.1. Uma sequência de funções $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *converge pontualmente/simplesmente* para a função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quando, para todo $\epsilon > 0$ e $x \in X$ dados, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de x e de ϵ) tal que $n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Definição 1.4.2. Uma sequência de funções $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *converge uniformemente* para a função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende exclusivamente de ϵ) tal que, para todo $x \in X$, $n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

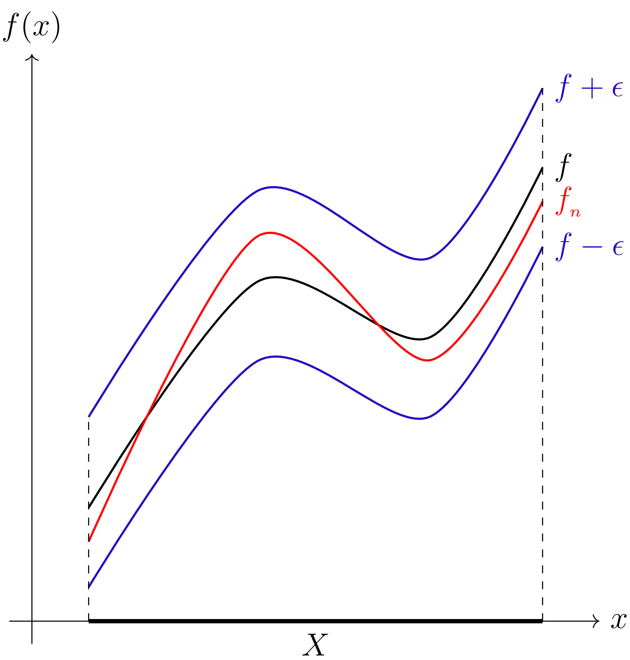

Figura 4 – Exemplo de uma representação geométrica da convergência uniforme.

Teorema 1.4.6 (Passagem ao limite sob o sinal da integral)**.** Seja $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções integráveis. Se f_n converge uniformemente para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, então f é integrável e vale

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n \right).$$

Demonstração. Como f_n converge uniformemente para f, então, dado $\epsilon > 0$, existe o número natural n_0 tal que

$$n > n_0 \implies |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{4(b-a)},$$

para todo $x \in [a,b]$.

Fixe o número natural m tal que $m > n_0$. Por f_m ser integrável, existe pelo item *iii*) do Teorema 1.3.1 uma partição $\mathcal{P} = \{t_0 = a, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = b\}$ de $[a,b]$ tal que, escrevendo ω_i' como a oscilação de f_m no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de $\mathcal{P}$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i' \Delta_i < \frac{\epsilon}{2}.$$

Contudo, para $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$ quaisquer,

$$\begin{aligned}
|f(y) - f(x)| &= |f(y) - f(x) + f_m(x) - f_m(x) + f_m(y) - f_m(y)| \\
&= |(f(y) - f_m(y)) + (f_m(x) - f(x)) + (f_m(y) - f_m(x))| \\
&\leqslant |f(y) - f_m(y)| + |f_m(x) - f(x)| + |f_m(y) - f_m(x)| \\
&< \frac{\epsilon}{4(b-a)} + \frac{\epsilon}{4(b-a)} + \omega_i' \\
&= \frac{\epsilon}{2(b-a)} + \omega_i'.
\end{aligned}$$

Denotando por ω_i a oscilação de f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ da partição $\mathcal{P}$, tem-se por conta da Proposição 1.1.8 e da Definição 1.1.4 que

$$\omega_i \leqslant \omega_i' + \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta_i &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i' \Delta_i + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2\cancel{(b-a)}} \cancel{(b-a)} \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Logo, f é integrável.

Agora, para $n > n_0$, veja que

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| = \left|\int_a^b (f - f_n)\right| &\leqslant \int_a^b |f - f_n| \\
&\leqslant \int_a^b \frac{\epsilon}{4(b-a)} \\
&= \frac{\epsilon}{4(b-a)} \int_a^b 1 \\
&= \frac{\epsilon}{\cancel{4(b-a)}} \cancel{(b-a)} \\
&= \frac{\epsilon}{4} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n\right).$$

□

Exemplo 1.4.1. Considere a sequência de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$. Cada f_n é integrável porque são funções contínuas (funções lineares). Veja que $|f_n(x)| \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in [0,1]$. Com efeito, dado $x \in [0,1]$ qualquer, então se tem $0 \leqslant x \leqslant 1$. Daí, é claro que $-1 \leqslant x \leqslant 1$ se, e só se, $|x| \leqslant 1$. Por fim, $|f_n(x)| = \dfrac{|x|}{n} \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 1$.

Para todo $\epsilon > 0$ dado, tome $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Assim,

$$n > n_0 \implies |f_n(x)| = \frac{|x|}{n} < |x|\epsilon \leqslant \epsilon.$$

Portanto, f_n converge uniformemente para a função identicamente nula. Pelo Teorema 1.4.6, decorre que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 0 &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.4.2. Seja $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ uma enumeração dos números racionais do intervalo $[0,1]$. Defina $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = 1$, se $x \in \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$; e $f_n(x) = 0$, caso contrário. Repare que cada f_n é integrável, pois o conjunto D_n dos pontos de descontinuidade de f_n tem medida nula. Com efeito, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f_n é $D_n = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$. Dado $\epsilon > 0$, tome $I_j = (r_j - \frac{\epsilon}{2^j}, r_j + \frac{\epsilon}{2^j})$ (de comprimento $\frac{\epsilon}{2^{j-1}}$) para $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Veja que

$$D_n \subset \bigcup_{j=1}^n I_j \qquad \text{e} \qquad \sum_{j=1}^n \frac{\epsilon}{2^{j-1}} = \epsilon - \frac{\epsilon}{2^n} < \epsilon.$$

Logo, D_n tem medida nula e, pelo Teorema 1.3.4, f_n é integrável. Além disso, f_n converge pontualmente para a Função de Dirichlet, mas não uniformemente. Sendo assim, não vale a igualdade estabelecida pelo Teorema 1.4.6 (até porque a Função de Dirichlet não é integrável à Riemann).

2 Medida

A Teoria da Medida tem seu desenvolvimento em um período que os matemáticos estavam interessados em mensurar conjuntos não tão habituais como eram os intervalos da reta real, os reticulados retangulares do plano e até mesmo os blocos retangulares do espaço euclidiano tridimensional. Esses conjuntos habituais tinham seu tamanho definido através do que chamamos de comprimento (para intervalos da reta), área (para reticulados retangulares do plano) e volume (para blocos retangulares do espaço tridimensional). A ideia principal com essa teoria foi então de generalizar o tamanho de conjuntos através do que já se conhecia e estava bem posto/definido. (TAYLOR, 1966).

Essa teoria embora teve uma evolução gigantesca no final do século XIX e início do século XX, há indícios de métodos para o cálculo de medida de conjuntos singulares muito antigos. Os gregos primitivos já progrediam "[...] como parte do desenvolvimento de um sistema numérico." (SION, 1990 apud MIRANDA; GRISI, 2022, p. 240, tradução do autor). Além disso, destacamos de acordo com TAYLOR (1966) que a relação entre medida de conjuntos no plano com a área abaixo de uma curva gerada por uma função real de uma variável surge já com um certo grau de generalidade devido o conceito de integral, desenvolvido na segunda metade do século XVII por Newton e Leibniz.

> Uma teoria mais sistemática apareceu na forma de integração no cálculo de Newton e Leibniz, na segunda metade do século 17. Nesta teoria o gráfico de uma função f é usado para descrever a fronteira de um conjunto cuja medida é a integral de f. (SION, 1990 apud MIRANDA; GRISI, 2022, p. 240, tradução do autor).

A partir dos meados do século XIX, segundo SION (1990 apud MIRANDA; GRISI, 2022), as expressões eram cada vez mais complicadas para se integrar e isto acabou na re-examinação de ideias como, por exemplo, derivada e integral. Coube ao matemático Bernhard Riemann uma definição mais precisa da noção de integral, todavia percebeu-se que diversos teoremas relacionados às operações de limite envolvendo a Integral de Riemann exigiam demasiadas hipóteses para serem validados, sem contar as funções não integráveis (como vimos no Capítulo 1). Em virtude desses contrapontos, no início do século XX, Henri Lebesgue desenvolve sua Teoria da Medida e Integração generalizando assim as ideias de E. Borel (Medida) e B. Riemann (Integral).

Exibiremos, neste capítulo, a definição de medida positiva, que será intensamente utilizada na elaboração da Integral de Lebesgue no Capítulo 3. Enfatizamos ainda que nosso texto será baseado nas literaturas: (AXLER, 2020; RUDIN, 1987; TAYLOR, 1966).

2.1 Espaços Topológicos & Métricos

Nesta seção, iremos apresentar duas estruturas algébricas – espaços topológicos e métricos. Os espaços topológicos são estruturas que permitem definir os conjuntos abertos de um conjunto, enquanto que os espaços métricos permitem calcular distâncias entre os elementos de um conjunto munido de uma métrica. Inclusive, exibiremos a relação entre essas duas estruturas algébricas.

Definição 2.1.1. Seja τ uma coleção de subconjuntos de um conjunto qualquer X. Diz-se que τ é uma *topologia de* X se as condições abaixo são satisfeitas:

i) $\varnothing, X \in \tau$;

ii) Se $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau$, então $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \tau$;

iii) Se $\{A_\alpha\}_{\alpha \in L}$ é uma coleção de subconjuntos de τ indexados por elementos de um conjunto qualquer L, então $\bigcup\limits_{\alpha \in L} A_\alpha \in \tau$.

Ademais, os elementos de τ são chamados de *conjuntos abertos de* X e o par (X, τ) é dito *espaço topológico.*

Exemplo 2.1.1 (Topologia Caótica)**.** Sejam X um conjunto qualquer e $\tau = \{\varnothing, X\}$. Evidentemente, o par (X, τ) é um espaço topológico.

Exemplo 2.1.2 (Topologia Discreta)**.** Seja X um conjunto qualquer. Defina ainda a coleção $\tau = P(X) = \{A; A \subset X\}$. Afirma-se que o par (X, τ) é um espaço topológico.

De fato, basta averiguar que τ é uma topologia de X, isto é, verificar se as condições $i), ii)$ e $iii)$ da Definição 2.1.1 são satisfeitas. Pois bem, a condição $i)$ é imediatamente satisfeita (afinal, $\varnothing, X \subset X$ donde $\varnothing, X \in \tau$). Agora dado a coleção $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ de elementos de τ, então $V_i \subset X$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Vê-se facilmente que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \subset X$ e assim $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \in \tau$ verificando assim a condição $ii)$. Por fim, dado uma coleção qualquer $\{V_\alpha\}_{\alpha \in L}$ de elementos de τ, então $V_\alpha \subset X$ para todo $\alpha \in L$. Daí, $\bigcup\limits_{\alpha \in L} V_{\alpha \in L} \subset X$ donde se tem $\bigcup\limits_{\alpha \in L} V_\alpha \in \tau$, cumprindo a condição $iii)$.

Exemplo 2.1.3. Considere o conjunto $X = \mathbb{N}$ dos números naturais. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $N_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ e ponha ainda $N_0 = \varnothing$. O par (X, τ) é um espaço topológico com $\tau = \{N_0, N_1, N_2, \ldots\}$.

De fato, veja que $\varnothing, X \in \tau$, afinal $N_0 = \varnothing$ e $N_1 = X$. Repare agora que, dados $N_i, N_j \in \tau$ com $i > j$ não nulos, tem-se $N_i \cap N_j = N_i$ e $N_i \cup N_j = N_j$; afinal $N_i \subset N_j$.

Nesse sentido, considerando o conjunto finito $L \subset \mathbb{N}$ e pondo $\xi = \max L$, tem-se que $\bigcap_{i \in L} N_i = N_\xi \in \tau$. O caso em que $\{0\} \subset L$ é evidente que $\bigcap_{i \in L} N_i = N_0 \in \tau$. Por fim, considerando $L' \subset \mathbb{N}$ e pondo $\xi' = \min L'$ (que existe por conta do Princípio da Boa Ordenação), tem-se $\bigcup_{i \in L'} N_i = N_{\xi'} \in \tau$. O caso em que $\{0\} \subset L'$ é evidente que $\bigcup_{i \in L'} N_i = \bigcup_{i \in M} N_i \in \tau$ (onde $M = L' - \{0\}$), pois o conjunto vazio não agrega nada na união.

Exemplo 2.1.4. Seja o conjunto $X = \mathbb{Z}$ dos números inteiros. Para $n \in \mathbb{N}$, defina a coleção $\tau_n = \{\varnothing, n\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}+1, \ldots, n\mathbb{Z}+(n-1), \mathbb{Z}\}$, onde $n\mathbb{Z}+a = \{nx + a; x \in \mathbb{Z}\}$ com $a \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Para $n > 2$, o par $(\mathbb{Z}, \tau_n)$ não é espaço topológico uma vez que $n\mathbb{Z} \cup (n\mathbb{Z}+1) \notin \tau_n$, por exemplo.

Uma topologia que encontraremos com frequência é a da extensão da reta real $[-\infty, +\infty]$ com sua topologia definida declarando os conjuntos $(a, b), [-\infty, a), (a, +\infty]$ e qualquer união de conjuntos desse tipo para serem os conjuntos abertos.

Definição 2.1.2. Sejam os pares (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Diz-se que uma aplicação $f : X \to Y$ é *contínua* quando, para todo $V \in \tau_Y$, tem-se $f^{-1}(V) \in \tau_X$. Em outras palavras, f é contínua quando, dado qualquer conjunto aberto V de Y, o conjunto imagem inversa de V pela aplicação f, $f^{-1}(V) = \{x \in X; f(x) \in V\}$, é um conjunto aberto de X.

Exemplo 2.1.5. Seja $(X, P(X))$ um espaço topológico. A aplicação $f : X \to X$ definida por $f(x) = x$ é contínua. De fato, dado $V \in P(X)$, conclui-se que $V \subset X$. Por conta da definição da aplicação f, repare que $f^{-1}(V) = V$. Logo, $f^{-1}(V) \subset X$ implicando que $f^{-1}(V) \in P(X)$.

Exemplo 2.1.6. Sejam $(\mathbb{N} \cup \{0\}, \tau)$ e $(\mathbb{Z}, \omega)$ espaços topológicos cujas topologias são descritas por $\tau = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ e $\omega = \{\varnothing, 2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}+1, \mathbb{Z}\}$. A aplicação $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ dada por $f(m) = 0$, se $m \equiv 0 \ (mod\ 2)$; e $f(m) = 1$, se $m \equiv 1 \ (mod\ 2)$, é contínua. De fato, basta reparar que:

- $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \omega$;
- $f^{-1}(\{1\}) = 2\mathbb{Z}+1 \in \omega$;
- $f^{-1}(\{2\}) = \varnothing \in \omega$;
- $f^{-1}(\{1, 2\}) = 2\mathbb{Z}+1 \in \omega$;
- $f^{-1}(\mathbb{N} \cup \{0\}) = \mathbb{Z} \in \omega$.

Agora apresentaremos uma outra estrutura matemática – os espaços métricos – que permitem calcular distância entre elementos de um conjunto. Além do mais, veremos a conexão que os espaços métricos possuem com os espaços topológicos!

Definição 2.1.3. Uma *métrica* sobre um conjunto qualquer X não vazio é uma aplicação $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que associa cada par $(x, y) \in X \times X$ a um número real $d(x, y)$ (chamado de distância de x a y) que satisfaz as condições abaixo:

i) $d(x, x) = 0$;

ii) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$;

iii) $d(x, y) = d(y, x)$;

iv) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Ademais, o par (X, d) é denominado *espaço métrico*.

Exemplo 2.1.7. Considere X um conjunto não vazio qualquer. Defina $d : X \times X \to \mathbb{R}$ por $d(x, y) = 0$, se $x = y$; e $d(x, y) = 1$, se $x \neq y$. Então, d define uma métrica em X.

De fato, basta verificar que d cumpre as quatro condições da Definição 2.1.3.

i) É claro pela definição de d que $d(x, y) \geqslant 0$;

ii) Temos também pela definição de d que $d(x, y) = 0$ se, e só se, $x = y$;

iii) Se $x = y$, então $d(x, y) = d(y, x)$. Por outro lado, se $x \neq y$, então também temos $d(x, y) = d(y, x)$;

iv) Veja que:

$$d(x, z) = 0 \quad \text{ou} \quad d(x, z) = 1.$$

Se $d(x, z) = 0$, então $x = z$. Logo, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ porque pode ser que $y = x$ ou $y \neq x$. Por outro lado, se $d(x, z) = 1$, então $x \neq z$. Contudo, pode-se ter $y = x$ donde $y \neq z$, ou $y = z$ donde $y \neq x$; ou ainda $y \neq x$ e $y \neq z$. Analisando os casos, vê-se que $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Portanto, (X, d) é um espaço métrico.

Exemplo 2.1.8. Seja n um número natural. Considere ainda, para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$, a aplicação $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Assegura-se que d define uma métrica em $\mathbb{R}^n$.

De fato, veja abaixo que as quatro condições da Definição 2.1.3 são satisfeita!

i) Lembrando que $(x_i - y_i)^2 \geqslant 0$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$, segue que

$$(d(x,y))^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow d(x,y) \geqslant 0.$$

ii) Para $a, b \in \mathbb{R}$, é válido que $a^2 + b^2 = 0$ se, e só se, $a = b = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}(d(x,y))^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_i - y_i = 0, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ &\Leftrightarrow \quad x_i = y_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.\end{aligned}$$

Dessa última equivalência, tem-se $x = y$.

iii) Lembrado que $a^2 = (-a)^2$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$, decorre que

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2} = d(y,x).$$

iv) Por fim, pondo $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, deve-se mostrar que $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$. Para tal tarefa, utilizará-se da Desigualdade de Cauchy, que será demonstrada como uma afirmação logo abaixo!

- **Afirmação**: Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, vale que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right). \tag{2.1}$$

De fato,

- ► Se $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 0$, então $b_i = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Logo, ocorre a igualdade em 2.1;
- ► Agora se $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \neq 0$, então $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 > 0$. Com isso, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + \lambda b_i)^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant 0.$$

Uma vez que tal inequação quadrática em λ é não-negativa e o coeficiente que acompanha o termo quadrático é estritamente positivo, então é porque o discriminante da fórmula resolutiva das equações quadráticas deve ser não-positivo. Assim,

$$\begin{aligned}\left(2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) &\leqslant 0 \\ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) &\leqslant 0 \\ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).\end{aligned}$$

Portanto, fica provado a Desigualdade de Cauchy.

A partir disso,

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i &\leqslant 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\\
\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 &\leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2\\
\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\right)^2 &\leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2\\
\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} &\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}
\end{aligned}$$

Dessa última desigualdade, considerando $a_i = x_i - y_i$ e $b_i = y_i - z_i$ obtém-se o desejado!

$$d(x,z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2} = d(x,y) + d(y,z).$$

Portanto, $(\mathbb{R}^n, d)$ é um espaço métrico.

Exemplo 2.1.9. Defina $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pela regra $d(x,y) = (x-y)^2$. Então d não define uma métrica sobre $\mathbb{R}$.

De fato, basta verificar que uma das condições da Definição 2.1.3 não é verdadeira. Contudo, isso é simples porque tomando $x = 1, y = 2$ e $z = 3$ na condição *iv*), segue que

$$d(x,z) = 4 \geqslant 2 = d(x,y) + d(y,z).$$

Portanto, $(\mathbb{R}, d)$ não é um espaço métrico.

Definição 2.1.4. Sejam (X, d) um espaço métrico, $a \in X$ e o número real $r \geqslant 0$. Uma *bola aberta de centro em a e raio r* é o conjunto $B(a,r) := \{x \in X; d(a,x) < r\}$ enquanto que uma *bola fechada de centro em a e raio r* é o conjunto $B[a,r] := \{x \in X; d(a,x) \leqslant r\}$.

Exemplo 2.1.10. Seja $X = \mathbb{R}^2$ com a métrica definida no Exemplo 2.1.8 para $n = 2$. Considerando $x = (0,0) \in X$ e o número real $r = 1$, segue que

$$\begin{aligned}
B(x;r) &= \{y = (y_1,y_2) \in X; d(x,y) < r\}\\
&= \left\{(y_1,y_2) \in X; \sqrt{(0-y_1)^2 + (0-y_2)^2} < 1\right\}\\
&= \left\{(y_1,y_2) \in X; y_1^2 + y_2^2 < 1\right\}
\end{aligned}$$

é uma bola aberta em X com raio r e centro em x cuja representação no plano cartesiano é o interior de uma circunferência de raio 1. Veja a representação dessa bola aberta no plano na Figura 5 abaixo.

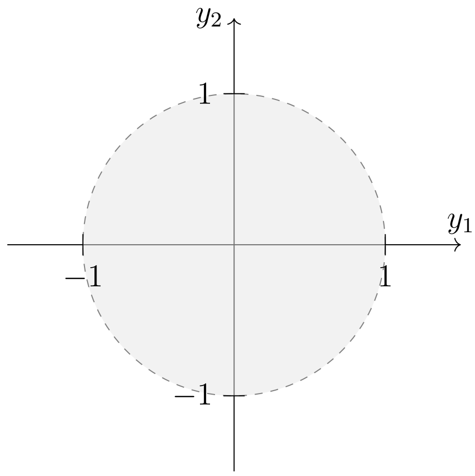

Figura 5 – Bola aberta de centro em (0,0) e raio 1.

Afirmação 2.1.1. Se $x \in B_1 \cap B_2$, onde B_1 e B_2 são bolas abertas; então x é o centro de uma bola aberta $B \subset B_1 \cap B_2$.

Demonstração. Sejam $x \in B_1 \cap B_2$. Sendo assim, $x \in B_1$ e $x \in B_2$ onde, digamos, $B_1 = B_1(y_1, r_1)$ e $B_2 = B_2(y_2, r_2)$. Como B_1 e B_2 são bolas abertas de X contendo x, então segue que

$$d(y_1, x) < r_1 \quad \text{e} \quad d(y_2, x) < r_2,$$

Observe que:

$$\begin{aligned} 0 < r_1 - d(y_1, x) &= L_1 \\ 0 < r_2 - d(y_2, x) &= L_2. \end{aligned}$$

Defina $B = \{y \in X; d(x, y) < \min\{L_1, L_2\}\}$. É claro que B é uma bola aberta de centro em x. Resta mostrar que $B \subset B_1 \cap B_2$.

Seja $y \in B$. Daí,

$$\begin{aligned} d(y_1, y) &\leqslant d(y_1, x) + d(x, y) \\ &< d(y_1, x) + \min\{L_1, L_2\} \\ &\leqslant d(y_1, x) + L_1 \\ &= \cancel{d(y_1, x)} + r_1 - \cancel{d(y_1, x)} \\ &= r_1. \end{aligned}$$

Logo, $y \in B_1$. Procedendo de maneira análoga, $y \in B_2$.

Portanto, $B \subset B_1 \cap B_2$. $\square$

O próximo resultado nos permitirá construir uma topologia para um espaço métrico. Nesse sentido, podemos enxergar espaços métricos como espaços topológicos através da topologia induzida pela métrica considerada!

Teorema 2.1.1. Seja (X, d) um espaço métrico. O par (X, τ) é um espaço topológico, onde $\tau = \{Y \in P(X); \exists B_y \subset Y, \forall y \in Y\}$, onde B_y é uma bola aberta de centro em y.

Demonstração. Basta mostrar que τ satisfaz as três condições da definição de topologia.

i) $\varnothing, X \in \tau$

Repare que $\varnothing \in \tau$, pois, como o conjunto vazio não possui nenhum elemento, somos levados a considerar por vacuidade. Além disso, $X \in \tau$ por conta da definição de bola aberta.

ii) Se $V_1, V_2, \ldots, V_n \in \tau$, então $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \tau$

De fato, veja que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ implica que $x \in V_i$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como cada $V_i \in \tau$ e $x \in V_i$, decorre que existe uma bola aberta $B(x, r_i)$ de tal forma que $B(x, r_i) \subset V_i$. Sendo assim, $\bigcap_{i=1}^{n} B(x, r_i) \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. A partir daí, utilizando a Afirmação 2.1.1,

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} B(x, r_i) \implies \exists B_x \subset \bigcap_{i=1}^{n} B(x, r_i),$$

Logo, $B_x \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ e, consequentemente, $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \tau$.

iii) Se $\{V_\alpha\}_{\alpha \in L}$ é uma coleção de elementos de τ, então $\bigcup_{\alpha \in L} V_\alpha \in \tau$

De fato, considere $\{V_\alpha\}_{\alpha \in L}$ uma coleção qualquer de elementos de τ. Veja que:

$$x \in \bigcup_{\alpha \in L} V_\alpha \implies \exists \alpha;\ x \in V_\alpha.$$

Por $V_\alpha \in \tau$ e $x \in V_\alpha$, segue que existe uma bola aberta B_x centrada em x tal que $B_x \subset V_\alpha$. Consequentemente, $B_x \subset \bigcup_{\alpha \in L} V_\alpha$ donde $\bigcup_{\alpha \in L} V_\alpha \in \tau$.

Portanto, τ é uma topologia de X. □

Comentário 2.1.1. Uma vez que $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico com $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $d(x, y) = |x - y|$ e uma bola aberta de $\mathbb{R}$ é um intervalo aberto, decorre que $(\mathbb{R}, \tau)$ é um espaço topológico com $\tau = \{A \in P(\mathbb{R}); \exists \epsilon > 0; (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset A, \forall x \in A\}$.

2.2 Espaços Mensuráveis

Espaços mensuráveis são o tema central desta seção, pois permitem definir o que são conjuntos e aplicações mensuráveis. Esses conceitos são cruciais para a Teoria da Integração de Lebesgue, visto que apresentam intrinsecamente um comportamento simples. Inclusive, destacamos que as aplicações mensuráveis possuem fortes relações com as aplicações contínuas.

Definição 2.2.1. Seja $\mathfrak{M}$ uma coleção de subconjunto de um conjunto X. Diz-se que $\mathfrak{M}$ é *σ-álgebra de X* se as condições abaixo são satisfeitas:

i) $X \in \mathfrak{M}$;

ii) Se $A \in \mathfrak{M}$, então $A^{\complement} = X - A \in \mathfrak{M}$;

iii) Se $A_i \in \mathfrak{M}$ para $i = 1, 2, \ldots$; então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$.

Ademais, os elementos de $\mathfrak{M}$ são chamados de *conjuntos mensuráveis de X* e o par $(X, \mathfrak{M})$ é dito *espaço mensurável*.

Observação 2.2.1. Se $(X, \mathfrak{M})$ é um espaço mensurável, então:

- $\varnothing \in \mathfrak{M}$;

  De fato, como $X \in \mathfrak{M}$, então $X^{\complement} = \varnothing \in \mathfrak{M}$ (condições *i*) e *ii*) da Definição 2.2.1).

- $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathfrak{M}$, para $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}$;

  Basta tomar $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$ na condição *iii*) da Definição 2.2.1 que se obtém:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}.$$

- $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$, para $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathfrak{M}$;

  Basta notar que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(A_n^{\complement}\right)^{\complement} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^{\complement}\right)^{\complement} \in \mathfrak{M}.$$

- $A - B \in \mathfrak{M}$, para $A, B \in \mathfrak{M}$.

  Com efeito, sejam $A, B \in \mathfrak{M}$. Como $A - B = B^{\complement} \cap A$, decorre que $A - B \in \mathfrak{M}$.

Exemplo 2.2.1. Sejam X um conjunto qualquer e $\mathfrak{M} = \{\varnothing, X\}$. Evidentemente, o par $(X, \mathfrak{M})$ é um espaço mensurável.

Exemplo 2.2.2. Sejam X um conjunto qualquer e $\mathfrak{M} = P(X) := \{A; A \subset X\}$. Afirma-se que o par $(X, \mathfrak{M})$ é um espaço mensurável.

De fato, basta averiguar que $\mathfrak{M}$ é uma σ-álgebra de X, isto é, verificar se as condições $i), ii)$ e $iii)$ da Definição 2.2.1 são satisfeitas. Pois bem, a condição $i)$ é imediatamente satisfeita (afinal, $X \subset X$ donde $X \in \mathfrak{M}$). Agora dado $A \in \mathfrak{M}$, então $A^{\complement} \subset X$ imediatamente. Por fim, dado uma coleção $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathfrak{M}$, então $V_n \subset X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n \subset X$ e consequentemente $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n \in \mathfrak{M}$, cumprindo a condição $iii)$.

Exemplo 2.2.3. Seja $X = \{a, b, c, d\}$. Considere a coleção $\mathfrak{M} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$. Tem-se que $\mathfrak{M}$ não é σ-álgebra de X porque $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \mathfrak{M}$.

Definição 2.2.2. Sejam os pares $(X, \mathfrak{M})$ e (Y, τ) um espaço mensurável e um espaço topológico, respectivamente. A aplicação $f : X \to Y$ diz-se *mensurável* desde que $f^{-1}(V) \in \mathfrak{M}$ para todo $V \in \tau$. Em outras palavras, f é mensurável quando, dado qualquer conjunto aberto V de Y, o conjunto imagem inversa de V pela aplicação f, $f^{-1}(V) = \{x \in X; f(x) \in V\}$, é um conjunto mensurável de X.

Exemplo 2.2.4. Sejam $(X, \mathfrak{M})$ um espaço mensurável e (Y, τ) um espaço topológico. Fixe $y_0 \in Y$. A aplicação $f : X \to Y$ definida por $f(x) = y_0$ é uma aplicação mensurável. De fato, dado um aberto $V \subset Y$ qualquer, tem-se que $y_0 \notin V$ ou $y_0 \in V$. Na primeira situação, $f^{-1}(V) = \varnothing \in \mathfrak{M}$ enquanto que na segunda tem-se $f^{-1}(V) = X \in \mathfrak{M}$.

Exemplo 2.2.5. Considere $(X, \mathfrak{M})$ um espaço mensurável e (Y, τ) um espaço topológico, onde $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathfrak{M} = \{\varnothing, \{a\}, \{b, c, d\}, X\}$ e $\tau = \{\varnothing, \{1\}, Y\}$. A aplicação $f : X \to Y$ definida por $f(a) = 1$; $f(b) = 2$; $f(c) = 3$ e $f(d) = 4$ é dita mensurável. De fato, basta reparar que:

- $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathfrak{M}$;
- $f^{-1}(\{1\}) = \{a\} \in \mathfrak{M}$;
- $f^{-1}(Y) = X \in \mathfrak{M}$.

Por outro lado, se f fosse definida pondo $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$ e $f(d) = 1$, então f não seria mensurável porque $f^{-1}(\{1\}) = \{a, d\} \notin \mathfrak{M}$.

Vamos agora apresentar algumas definições e resultados envolvendo continuidade e mensurabilidade de funções.

Definição 2.2.3. Uma *vizinhança V de um ponto $x_0 \in X$* é um conjunto aberto que contém x_0.

Definição 2.2.4. Uma aplicação $f : X \to Y$ é dita ser *contínua no ponto $x_0 \in X$* se para toda vizinhança V de $f(x_0)$ corresponder a uma vizinhança W de x_0 tal que $f(W) \subset V$.

Quando (X, d_X) e (Y, d_Y) são espaços métricos, a continuidade local de $f : X \to Y$ em $x_0 \in X$ pode ser considerada/definida assim: Para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in X$, $d_X(x, x_0) < \delta$ implica em $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. No entanto, podemos considerar o espaço métrico como espaço topológico pelo Teorema 2.1.1 e seguir a Definição 2.2.4.

Proposição 2.2.1. Sejam os pares (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Um mapeamento $f : X \to Y$ é contínuo se, e somente se, é contínuo em todo ponto x_0 em X.

Demonstração. Veja abaixo.

($\Rightarrow$) Seja a aplicação $f : X \to Y$ contínua. Considerando $x_0 \in X$, vê-se claramente que $f(x_0) \in Y$. Tomando uma vizinhança V qualquer de $f(x_0)$, tem-se que $f^{-1}(V) \in \tau_X$ e contém x_0. Logo, $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x_0. Inclusive, $f(f^{-1}(V)) \subset V$. Portanto, f é contínua em x_0.

($\Leftarrow$) Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua pontualmente em todos os pontos de seu domínio. Considerando um conjunto aberto V em Y, mostra-se que $f^{-1}(V)$ é um conjunto aberto em X. Com efeito, tomando $x \in f^{-1}(V)$, então $f(x) \in V$. Por hipótese, existe uma vizinhança W_x de x tal que $f(W_x) \subset V$. Logo, $W_x \subset f^{-1}(V)$. Neste sentido, assegura-se que $\bigcup\limits_{x \in f^{-1}(V)} W_x \subset f^{-1}(V)$ enquanto que a outra inclusão é óbvia. Portanto, $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(V)} W_x$ é um conjunto aberto. □

Teorema 2.2.1. Sejam (Y, τ_Y) e (Z, τ_Z) espaços topológicos e uma aplicação $g : Y \to Z$ contínua. Assim,

a) Se (X, τ_X) é um espaço topológico, $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua e $h = g \circ f$, então h é contínua;

b) Se $(X, \mathfrak{M})$ é um espaço mensurável, $f : X \to Y$ é uma aplicação mensurável e $h = g \circ f$, então $h : X \to Z$ é mensurável.

Demonstração. Veja abaixo.

a) Pela continuidade de g, $g^{-1}(V) \in \tau_Y$ dado qual for o conjunto $V \in \tau_Z$. Agora, como f também é contínua, advém que $f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \tau_X$. A partir daí, conclui-se que $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V) = h^{-1}(V) \in \tau_X$. Portanto, h é contínua.

b) Como g é uma aplicação contínua, então dado qual for o conjunto $V \in \tau_Z$ decorre que $g^{-1}(V) \in \tau_Y$. Já por f ser mensurável, segue que $f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathfrak{M}$. Assim, $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V) = h^{-1}(V) \in \mathfrak{M}$. Portanto, h é mensurável.

Assim, fica demonstrado o resultado! □

Corolário 2.2.1. Seja o par $(X, \mathfrak{M})$ um espaço mensurável. Se $f = u + vi$ é uma função complexa mensurável em X, então u, v e $|f|$ são funções reais mensuráveis em X.

Demonstração. Defina $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x+yi) = x$. Então g é uma função contínua. De fato, seja $w = a + bi \in \mathbb{C}$. Para todo $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon$ que

$$\begin{aligned} |(x-yi)-(a+bi)| < \epsilon \quad &\Longrightarrow \quad |(x-a)+(y-b)i| < \epsilon \\ &\Longrightarrow \quad \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \epsilon. \end{aligned}$$

Claramente tem-se $|x-a| = \sqrt{(x-a)^2} \leqslant \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$. Logo, resulta na desigualdade $|x-a| < \epsilon$, ou seja, g é contínua. Portanto, pelo item b) do Teorema 2.2.1, $u = g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável.

Defina agora $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x+yi) = y$. Esta função é contínua e a prova disso é análoga ao que foi feito anteriormente para g. Por consequência do item b) do Teorema 2.2.1, $v = h \circ f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável.

Por fim, defina $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(x+yi) = |x+yi|$. Essa função é contínua e vê-se imediatamente, pois

$$|(x+yi)-(a+bi)| < \delta = \epsilon \Longrightarrow ||(x+yi)-(a+bi)|| < \epsilon.$$

Contudo,

$$|\psi(x+yi)-\psi(a+bi)| = ||x+yi|-|a+bi|| \leqslant ||(x+yi)-(a+bi)|| < \epsilon.$$

Portanto, pelo item b) do Teorema 2.2.1, $|f| = \psi \circ f : X \to \mathbb{C}$ é mensurável. □

Lema 2.2.1. Dado um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^2$, então A é escrito como uma união contável de retângulos abertos.

Demonstração. Seja A um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$. Assim, dado $(p,q) \in A$ qualquer, então existe $\epsilon > 0$ tal que $B((p,q);\epsilon) \subset A$. Defina a partir daí o retângulo aberto

$$R_{pq} = \left(p - \frac{\epsilon}{2}, p + \frac{\epsilon}{2}\right) \times \left(q - \frac{\epsilon}{2}, q + \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Afirma-se que $R_{pq} \subset A$.

Com efeito, dado $(x,y) \in R_{pq}$ qualquer, então

$$p - \frac{\epsilon}{2} < x < p + \frac{\epsilon}{2} \iff -\frac{\epsilon}{2} < x - p < \frac{\epsilon}{2} \iff |x-p| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$q - \frac{\epsilon}{2} < y < q + \frac{\epsilon}{2} \iff -\frac{\epsilon}{2} < y - q < \frac{\epsilon}{2} \iff |y-q| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} d((p,q);(x,y)) = \sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2} &\leqslant \sqrt{(x-p)^2} + \sqrt{(y-q)^2} \\ &= |x-p| + |y-q| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Com isso, $(x, y) \in B((p, q); \epsilon) \subset A$. Logo, $R_{pq} \subset A$.

Veja agora que

$$\{(p, q)\} \subset R_{pq} \iff \bigcup_{(p,q)\in A} \{(p, q)\} \subset \bigcup_{(p,q)\in A} R_{pq}.$$

Uma vez que $\bigcup_{(p,q)\in A} \{(p, q)\} = A$, segue que $A \subset \bigcup_{(p,q)\in A} R_{pq}$. Com isso, utilizando o Teorema de Lindelöf[1], segue

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{p_i q_i}.$$

Por outro lado, como $R_{pq} \subset A$ para todo $(p, q) \in A$, segue que $R_{p_i q_i} \subset A$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, $\bigcup_{i=1}^{\infty} R_{p_i q_i} \subset A$.

Portanto, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{p_i q_i}$. □

Teorema 2.2.2. Sejam u e v funções reais mensuráveis no o espaço mensurável $(X, \mathfrak{M})$. Considere ϕ uma aplicação contínua do plano sobre o espaço topológico Y e defina $h : X \to Y$ pela regra $h(x) = \phi(u(x), v(x))$. Então h é mensurável.

Demonstração. Defina $f : X \to \mathbb{R}^2$ por $f(x) = (u(x), v(x))$, onde $u : X \to \mathbb{R}$ e $v : X \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis. Veja que f está bem definida, pois dados $x, y \in X$ tais que $x = y$ tem-se, pelas funções u e v estarem bem definidas, que $u(x) = u(y)$ e $v(x) = v(y)$. Com isso,

$$f(x) = (u(x), v(x)) = (u(y), v(y)) = f(y).$$

Agora repare que $h = \phi \circ f$. Logo, para mostrar que h é mensurável, basta garantir que f é mensurável e aplicar o item b) do Teorema 2.2.1 (uma vez que ϕ é contínua).

Considere $R \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto retangular aberto. Podemos supor sem perder a generalidade que os lados sejam paralelos aos eixos coordenados. Nesse sentido, $R = I_1 \times I_2$ com I_1 e I_2 intervalos abertos de $\mathbb{R}$. Veja dai que

$$f^{-1}(R) = u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2).$$

Com efeito, dado $x \in f^{-1}(R)$, então $f(x) = (u(x), v(x)) \in R = I_1 \times I_2$. Sendo assim, $u(x) \in I_1$ e $v(x) \in I_2$. Dessa forma, $x \in u^{-1}(I_1)$ e $x \in v^{-1}(I_2)$ simultaneamente, logo $x \in u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2)$. Por outro lado, se $x \in u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2)$, então $x \in u^{-1}(I_1)$ e $x \in v^{-1}(I_2)$. Com isso, $u(x) \in I_1$ e $v(x) \in I_2$. Segue assim que $f(x) = (u(x), v(x)) \in I_1 \times I_2$ e, consequentemente, $x \in f^{-1}(I_1 \times I_2) = f^{-1}(R)$.

[1] **Enunciado**: Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ arbitrário. Toda cobertura aberta $X \subset \bigcup_{\alpha\in L} A_\alpha$ admite uma subcobertura enumerável $X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{\alpha_i}$.

Como u e v são mensuráveis, temos que $u^{-1}(I_1)$ e $v^{-1}(I_2)$ são conjuntos mensuráveis. Logo, $f^{-1}(R) = u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2)$ é um conjunto mensurável. Seja $V \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto qualquer. Esse é, por sua vez, uma união contável de conjuntos R_i retangulares abertos por conta do Lema 2.2.1. Assim,

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(R_i).$$

Sendo assim, $f^{-1}(V)$ é um conjunto mensurável. Portanto, f é mensurável. $\square$

Corolário 2.2.2. Seja $(X, \mathfrak{M})$ um espaço mensurável. Se $f = u + vi$, onde u e v são funções reais mensuráveis em X, então f é uma função complexa mensurável em X.

Demonstração. Considere $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ dada por $\Phi(x, y) = x + yi$. Essa função é contínua! Com efeito, seja $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Para todo $\epsilon > 0$ dado, tome $\delta = \epsilon$ que

$$\begin{aligned}
|(x, y) - (a, b)| < \epsilon \quad &\Longrightarrow \quad |(x - a, y - b)| < \epsilon \\
&\Longrightarrow \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \epsilon \\
&\Longrightarrow \quad |(x - a) + (y - b)i| < \epsilon \\
&\Longrightarrow \quad \underbrace{|(x - yi) - (a + bi)|}_{|\phi(x,y) - \phi(a,b)|} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, ϕ é contínua. Ora, u e v funções reais mensuráveis, ϕ contínua do plano real sobre $\mathbb{C}$ e ainda $f(x) = u(x) + v(x)i = \phi(u(x), v(x))$. Portanto, pelo Teorema 2.2.2, $f = u + vi$ é uma função complexa mensurável em X. $\square$

Corolário 2.2.3. Seja $(X, \mathfrak{M})$ um espaço mensurável. Se f e g são funções complexas mensuráveis em X, então $f + g$ e fg são funções complexas mensuráveis em X.

Demonstração. Escreva $f = u_1 + v_1 i$ e $g = u_2 + v_2 i$, onde u_1, v_1, u_2 e v_2 são funções reais mensuráveis por conta do Corolário 2.2.1. Assim,

$$f + g = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2)i \qquad \text{e} \qquad fg = (u_1 u_2 - v_1 v_2) + (u_1 v_2 + u_2 v_1)i.$$

- *Afirmação*: $u + v$ e uv são funções reais mensuráveis, desde que u e v sejam funções reais mensuráveis.

De fato, ponha $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(x, y) = x + y$. Claramente ϕ é contínua. Note daí que $(u + v)(x) = \phi(u(x), v(x))$ para $x \in X$. Pelo Teorema 2.2.2, $u + v$ é uma função mensurável. Procedendo-se de maneira análoga para a função $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(x, y) = xy$, conclui-se que uv é uma função real mensurável.

Pela Afirmação acima, $u_1 + u_2$ e $v_1 + v_2$ são funções mensuráveis. Pelo Corolário 2.2.2 , $f + g$ é uma função complexa mensurável. Ainda pela Afirmação acima, $u_1 u_2, v_1 v_2, u_1 v_2$ e $v_1 u_2$ são funções mensuráveis e, consequentemente, suas combinações também o são. Portanto, pelo Corolário 2.2.2, fg é uma função complexa mensurável. $\square$

Proposição 2.2.2. Seja $(X, \mathfrak{M})$ um espaço mensurável. Se $E \in \mathfrak{M}$ e $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0, & \text{se } x \notin E \end{cases},$$

então χ_E é uma função mensurável.

Demonstração. Considere $V \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto qualquer. Se $0, 1 \notin V$, segue que $\chi_E^{-1}(V) = \varnothing \in \mathfrak{M}$. Já, se $0 \in V$, mas $1 \notin V$; então $\chi_E^{-1}(V) = X - E \in \mathfrak{M}$ (afinal, E é mensurável). Por outro lado, se $1 \in V$, mas $0 \notin V$; então $\chi_E^{-1}(V) = E \in \mathfrak{M}$. Por fim, se $\{0, 1\} \subset V$, então $\chi_E^{-1}(V) = X \in \mathfrak{M}$. Portanto, χ_E é uma função real mensurável. □

Comentário 2.2.1. A função χ_E definida no resultado anterior é conhecida como *função característica* ou ainda como *função corte*.

Corolário 2.2.4. Seja $(X, \mathfrak{M})$ um espaço mensurável. Dada uma função $f : X \to \mathbb{C}$, então existe uma função $\alpha : X \to \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ e $f = \alpha|f|$.

Demonstração. Considere $Y = \mathbb{C} - \{0\}$ e defina $\phi : Y \to Y$ dada por $\phi(z) = \frac{z}{|z|}$. Evidente que ϕ é contínua, pois

$$\phi(z) = \underbrace{z}_{h_1(z)} \cdot \underbrace{\frac{1}{|z|}}_{h_2(z)},$$

onde $h_1, h_2 : Y \to Y$ são funções contínuas (produto de funções contínuas é contínua).

Seja $E = \{x \in X; f(x) = 0\}$ (esse conjunto pode ou não ser vazio). Estabeleça $\alpha : X \to \mathbb{C}$ dada pela regra $\alpha(x) = \phi(f(x) + \chi_E(x))$. Repare que, se $x \in E$, então $\alpha(x) = 1$ porque $f(x) = 0$ e $\chi_E(x) = 1$. Por outro lado, se $x \notin E$, então $\alpha(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$ porque $f(x) \neq 0$ e $\chi_E(x) = 0$. Em qualquer caso, sempre se tem $|\alpha| = 1$ e $f = \alpha|f|$.

O conjunto E é mensurável. De fato, seja o conjunto Y o aberto considerado (Y é aberto porque $Y = \mathbb{C} - \{0\}$). Por f ser uma função complexa mensurável em X, então $f^{-1}(Y) = \{x \in X; f(x) \neq 0\} = X - E \in \mathfrak{M}$. Assim, $E \in \mathfrak{M}$. A partir daí, vê-se pela Proposição 2.2.2 que χ_E é mensurável.

Uma vez que $\alpha = \phi \circ (f + \chi_E)$, segue do item *b*) do Teorema 2.2.1 que α é mensurável demonstrando o resultado! □

O próximo resultado garante a existência de uma menor σ-álgebra que é gerada por uma coleção de subconjuntos de X. Isso abre portas para definirmos σ-álgebra de Borel.

Teorema 2.2.3. Seja $\mathfrak{F}$ uma coleção de subconjuntos de X. Existe uma menor σ-álgebra $\mathfrak{M}^*$ em X tal que $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}^*$.

Demonstração. Considere $\Omega := \{\mathfrak{M} \subset P(X); \mathfrak{M}$ é σ-álgebra de X e $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}\}$. Veja que $\Omega \neq \varnothing$. De fato, basta notar que $\mathfrak{M} = P(X)$ é uma σ-álgebra de X com $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M} = P(X)$; logo $\mathfrak{M} = P(X) \in \Omega$.

Considere $\mathfrak{M}^* = \bigcap_{\mathfrak{M} \in \Omega} \mathfrak{M}$. Primeiramente, repare que $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}^*$, pois $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}$ para todo $\mathfrak{M} \in \Omega$. Além disso, por $\mathfrak{M}^* = \bigcap_{\mathfrak{M} \in \Omega} \mathfrak{M}$, advém $\mathfrak{M}^* \subset \mathfrak{M}$ para todo $\mathfrak{M} \in \Omega$. Resta mostrar que $\mathfrak{M}^*$ é σ-álgebra de X.

i) $X \in \mathfrak{M}^*$;

De fato, como $X \in \mathfrak{M}$ para todo $\mathfrak{M} \in \Omega$; tem-se que $X \in \bigcap_{\mathfrak{M} \in \Omega} \mathfrak{M} = \mathfrak{M}^*$.

ii) Se $A \in \mathfrak{M}^*$, então $X - A \in \mathfrak{M}^*$;

De fato, se $A \in \mathfrak{M}^* = \bigcap_{\mathfrak{M} \in \Omega} \mathfrak{M}$, então $A \in \mathfrak{M}$ para todo $\mathfrak{M} \in \Omega$. Por $\mathfrak{M}$ ser σ-álgebra de X, temos que $X - A \in \mathfrak{M}$ para todo $\mathfrak{M} \in \Omega$. Sendo assim, $X - A \in \mathfrak{M}^*$.

iii) Se $A_n \in \mathfrak{M}^*$ para $n = 1, 2, \ldots$; então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}^*$.

De fato, se $A_n \in \mathfrak{M}^*$ para $n = 1, 2, \ldots$; então $A_n \in \mathfrak{M}$ para todo $\mathfrak{M} \in \Omega$ e $n = 1, 2, \ldots$. Assim, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$ para todo $\mathfrak{M} \in \Omega$. Logo, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}^*$.

Portanto, $\mathfrak{M}^*$ é a menor σ-álgebra de X que contém $\mathfrak{F}$. $\square$

Definição 2.2.5. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\mathfrak{B}$ a menor σ-álgebra de X que contenha τ. O espaço mensurável $(X, \mathfrak{B})$ é denominado de *espaço de Borel* e os elementos de $\mathfrak{B}$ são chamados de *conjuntos de Borel*.

Comentário 2.2.2. A partir da Definição 2.2.5, percebe-se que os conjuntos abertos tornam-se conjuntos de Borel através da σ-álgebra de Borel. Inclusive, nota-se que os conjuntos de Borel desempenham o papel de conjuntos mensuráveis!

Definição 2.2.6. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Considere ainda a aplicação $f : X \to Y$ contínua e $\mathfrak{B}$ a σ-álgebra de Borel em X. A aplicação f é dita *aplicação de Borel* (ou *Borel mensurável*) quando $f^{-1}(V) \in \mathfrak{B}$ para todo $V \in \tau_Y$.

Teorema 2.2.4. Considere $(X, \mathfrak{M})$ um espaço mensurável e (Y, τ) um espaço topológico. Além disso, seja a aplicação $f : X \to Y$. Então,

i) Se Ω é a coleção de todos os conjuntos $E \subset Y$ tal que $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$, então Ω é uma σ-álgebra de Y;

ii) Se f é mensurável e E é um conjunto de Borel em Y, então $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$;

iii) Se $Y = [-\infty, \infty]$ e $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathfrak{M}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, então f é mensurável;

iv) Se f é mensurável, (Z, ω) é um espaço topológico, $g : Y \to Z$ é uma aplicação de Borel e $h = g \circ f$; então temos que $h : X \to Z$ é mensurável.

Demonstração. Veja abaixo!

i) Seja $\Omega = \{E \subset Y; f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}\}$. É claro que $\Omega \neq \varnothing$, pois $\varnothing \subset Y$ e $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathfrak{M}$. Logo, tem-se que $\varnothing \in \Omega$. Resta mostrar que Ω é σ-álgebra de Y.

- $Y \in \Omega$.
  De fato, basta notar que $Y \subset Y$ e $f^{-1}(Y) = X \in \mathfrak{M}$.
- Se $A \in \Omega$, então $Y - A \in \Omega$.
  De fato, se $A \in \Omega$; então $f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}$. Por $f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}$, conclui-se que $X - f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}$. Ora, como $X = f^{-1}(Y)$, segue que $f^{-1}(Y) - f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}$. Como $f^{-1}(Y) - f^{-1}(A) = f^{-1}(Y - A)$, decorre que $f^{-1}(Y - A) \in \mathfrak{M}$. Logo, $Y - A \in \Omega$.
- Se $A_n \in \Omega$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega$.
  Se $A_n \in \Omega$, então $f^{-1}(A_n) \in \mathfrak{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in \mathfrak{M}$.
  Ora, como $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$, conclui-se que $f^{-1}\left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \mathfrak{M}$.
  Logo, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega$.

Portanto, Ω é σ-álgebra de Y.

ii) Considere a σ-álgebra $\Omega = \{F \subset Y; f^{-1}(F) \in \mathfrak{M}\}$ de Y. Por f ser mensurável, decorre que dado o aberto V em Y, então $f^{-1}(V)$ é mensurável, isto é, $f^{-1}(V) \in \mathfrak{M}$ donde $V \in \Omega$. Logo, Ω contém todos os abertos de Y. Neste caso, Ω contém todos os conjuntos de Borel; sendo assim, $E \in \Omega$. Portanto, $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$.

iii) Seja $\Omega = \{E \subset Y; f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}\}$. Escolha um número real α e também os números reais α_n tais que $\alpha_n < \alpha$; e que quando $n \to \infty$ tem-se $\alpha_n \to \alpha$.

- $[-\infty, \alpha) \in \Omega$.
  De fato, repare que $(\alpha, \infty] \in \Omega$, pois $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathfrak{M}$. Além disso, tem-se que $(\alpha_n, \infty] \in \Omega$ para cada $n \in \mathbb{N}$ uma vez que, por hipótese, $f^{-1}((\alpha_n, \infty)) \in \mathfrak{M}$. Assim,
  $$\begin{aligned} f^{-1}([-\infty, \alpha)) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[-\infty, \alpha_n]\right) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}((\alpha_n, \infty]^{\complement}) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left((\alpha_n, \infty]\right)^{\complement} \in \mathfrak{M}. \end{aligned}$$
  Logo, $[-\infty, \alpha) \in \Omega$.

- $(\alpha, \beta) \in \Omega$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

  De fato, basta notar que

$$(\alpha, \beta) = [-\infty, \beta) \cap (\alpha, \infty],$$

  e como $[-\infty, \beta)$ e $(\alpha, \infty]$ são elementos de Ω, conclui-se $(\alpha, \beta) \in \Omega$.

Como todos os abertos de $[-\infty, \infty]$ são uma união contável de segmentos destes tipos, temos que Ω contém todos os abertos. Portanto, f é mensurável.

iv) Seja $V \in \omega$. Daí,

$$h^{-1}(V) = (g \circ f)^{-1}(V) = (f^{-1} \circ g^{-1})(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)).$$

Como g é uma aplicação de Borel, então $g^{-1}(V)$ é um conjunto de Borel. Pelo item *ii)* deste Teorema, temos que $f^{-1}(g^{-1}(V))$ é um conjunto mensurável de X. Portanto, h é mensurável.

Isso conclui a demonstração do resultado! □

2.3 Limite Inferior & Limite Superior

Os conceitos de limite inferior e limite superior de uma sequência de números da extensão da reta real são de grande importância porque sempre estão bem estabelecidos; diferentemente da ideia de limite. Além disso, é a partir deles que temos o resultado conhecido como Lema de Fatou no Capítulo 3. Enfatizamos que iremos exibir aqui algumas propriedades dessas noções, em especial, a característica que permite garantirmos a existência de limite!

Definição 2.3.1. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $[-\infty, \infty]$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, ponha $a_k = \inf\{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots\}$ e $\alpha = \sup\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Denomina-se α de *limite inferior de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e denota-se por

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n = \alpha.$$

Definição 2.3.2. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $[-\infty, \infty]$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, ponha $b_k = \sup\{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots\}$ e $\beta = \inf\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$. Denomina-se β de *limite superior de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e denota-se por

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \beta.$$

Exemplo 2.3.1. Seja a sequência constante $(x_0, x_0, x_0, \ldots)$ com $x_0 \in \mathbb{R}$. Tem-se que $a_k = \inf\{x_0\} = x_0 = \sup\{x_0\} = b_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Com isso, conclui-se $\alpha = \beta = x_0$, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} \inf x_0 = x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_0$.

Exemplo 2.3.2. Seja a sequência $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vê-se que $a_k = \inf\{-1,1\} = -1$ e $b_k = \sup\{-1,1\} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Com isso, conclui-se $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} \inf(-1)^n = -1 \neq 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sup(-1)^n$.

Lema 2.3.1. Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $a_i \in \mathbb{R}$ de forma que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$. Então $a_k \to \alpha$ quando $k \to \infty$, onde $\alpha = \sup\{a_1, a_2, \ldots\}$.

Demonstração. Seja $\alpha = \sup\{a_1, a_2, \ldots\}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_N > \alpha - \epsilon$. Como, por hipótese, $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$; segue que $a_n \geqslant a_N$ para todo $n > N$. Assim, $a_n > \alpha - \epsilon$ para $n > N$. Além disso, $\alpha - a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (em particular, vale a desigualdade quando $n > N$). Sendo assim, $-\epsilon < \alpha - a_n < \epsilon$ para $n > N$. Portanto, $|a_n - \alpha| < \epsilon$ quando $n > N$. □

Teorema 2.3.1. Existe uma subsequência $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_i} \to \alpha$ quando $i \to \infty$. Além disso, α é o menor número com esta propriedade.

Demonstração. Seja a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ponha daí,

$$a_i = \inf_{n\geqslant i} x_n \quad \text{e} \quad \alpha = \sup_{i\geqslant 1} a_i.$$

Se cada a_i é termo da sequência, então basta definir $x_{n_i} = a_i$. É claro pelo Lema 2.3.1 que $x_{n_i} \to \alpha$ quando $i \to \infty$.

Se, por outro lado, cada a_i não for termo da sequência; então:

$$\begin{aligned}
a_1 < a_1 + 1 \quad &\Longrightarrow \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}; a_1 < x_{n_1} \leqslant a_1 + 1;\\
a_2 < a_2 + \frac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}; a_2 < x_{n_2} \leqslant a_2 + \frac{1}{2};\\
&\vdots\\
a_i < a_i + \frac{1}{i} \quad &\Longrightarrow \quad \exists n_i \in \mathbb{N}; a_i < x_{n_i} \leqslant a_i + \frac{1}{i}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Defina assim a subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots)$ tal que

$$a_i < x_{n_i} \leqslant a_i + \frac{1}{i}.$$

Uma vez que

$$\lim_{i\to\infty}\left(a_i + \frac{1}{i}\right) = \lim_{i\to\infty} a_i = \alpha,$$

segue do Teorema das Sucessões Enquadradas que

$$\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = \alpha.$$

Suponha agora que exista uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, digamos $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, tal que $x_{n_i} \to \gamma$ quando $i \to \infty$. Se fosse $\gamma < \alpha$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma < a_k \leqslant \alpha$. Tomando $\epsilon = a_k - \gamma$, tem-se $a_k = \epsilon + \gamma$. Vê-se assim que o intervalo $(\gamma - \epsilon, \gamma + \epsilon)$ não contém nenhum x_m com $m \geqslant k$; isto é; tal intervalo não contém uma infinidade de termos da sequência. Absurdo, uma vez que $x_{n_i} \to \gamma$ quando $i \to \infty$. Portanto, $\alpha \leqslant \gamma$. □

Comentário 2.3.1. Os dois resultados anteriores possuem versões para β (omitiremos, porém aplicaremos sempre que necessário).

Teorema 2.3.2. Dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[-\infty, \infty]$, então

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n = -\lim_{n\to\infty} \sup\left(-x_n\right).$$

Demonstração. Utilizando-se da Proposição 1.1.6 quando $c = -1$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \inf x_n &= \sup_{k\geqslant 1}\left(\inf_{n\geqslant k} x_n\right) \\
&= -\inf_{k\geqslant 1}\left(-\inf_{n\geqslant k} x_n\right) \\
&= -\inf_{k\geqslant 1}\left(\sup_{n\geqslant k}(-x_n)\right) \\
&= -\lim_{n\to\infty} \sup\left(-x_n\right).
\end{aligned}$$

□

Comentário 2.3.2. De forma análoga, percebe-se que vale

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = -\lim_{n\to\infty} \inf\left(-x_n\right).$$

Vimos através do Exemplo 2.3.2 que os limites inferior e superior nem sempre coincidem, então é natural nos questionarmos o seguinte: Em que situação esses limites coincidem? O próximo resultado nos fornecerá essa resposta!

Teorema 2.3.3. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $[-\infty, \infty]$. Então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge se, e somente se, os limites inferior e superior de x_n são iguais.

Demonstração. Suponha que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convirja. Suponha também, por absurdo, que

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n = a \neq b = \lim_{n\to\infty} \sup x_n.$$

Com isso, passando para $a_k = \inf\limits_{n\geqslant k} x_n$ e $b_k = \sup\limits_{n\geqslant k} x_n$ tem-se

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \neq b = \lim_{k\to\infty} b_k.$$

Assim sendo, para todo $\epsilon > 0$, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned}
k > k_1 &\implies a - \epsilon < a_k < a + \epsilon; \\
k > k_2 &\implies b - \epsilon < b_k < b + \epsilon.
\end{aligned}$$

Ponha $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$. Daí,

$$k > k_0 \implies \begin{cases} a - \epsilon < a_k < a + \epsilon \\ b - \epsilon < b_k < b + \epsilon \end{cases}.$$

Para cada $k > k_0$, existem $x_{n_{ik}}$ e $x_{n_{jk}}$ (por conta de a_k e b_k) tais que

$$k > k_0 \implies \begin{cases} a - \epsilon < a_k \leqslant x_{n_{ik}} < a + \epsilon \\ b - \epsilon < x_{n_{jk}} \leqslant b_k < b + \epsilon \end{cases}.$$

Ora, assim vê-se que

$$\lim_{k\to\infty} x_{ik} = a \neq b = \lim_{k\to\infty} x_{n_{jk}}.$$

Absurdo, pois toda subsequência de uma sequência convergente deve obrigatoriamente convergir para o mesmo limite da sequência! Portanto, $a = b$.

Reciprocamente, se

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n = \lim_{n\to\infty} \sup x_n = a,$$

então passando para $a_k = \inf\limits_{n\geqslant k} x_n$ e $b_k = \sup\limits_{n\geqslant k} x_n$ tem-se

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = a.$$

Para todo $\epsilon > 0$, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$k > k_1 \implies a - \epsilon < a_k < a + \epsilon;$$
$$k > k_2 \implies a - \epsilon < b_k < a + \epsilon.$$

Ponha $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$. Daí,

$$k > k_0 \implies a - \epsilon < a_k \leqslant b_k < a + \epsilon.$$

Como $a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (em particular, vale também para $k > k_0$), então

$$k > k_0 \implies a - \epsilon < x_k < a + \epsilon.$$

Portanto, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a. □

Comentário 2.3.3. O resultado acima nos garante que

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n = \lim_{n\to\infty} \sup x_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Definição 2.3.3. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um sequência de funções de X em $[-\infty, \infty]$. Define-se as funções de X em $[-\infty, \infty]$ dadas por:

a) $\left(\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$;

b) $\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$;

c) $\left(\lim_{n\to\infty} \inf f_n\right)(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)$;

d) $\left(\lim_{n\to\infty} \sup f_n\right)(x) = \lim_{n\to\infty} \sup f_n(x)$.

Definição 2.3.4. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções de X em $[-\infty,\infty]$ e existe, para cada $x \in X$, o limite de $f_n(x)$ quando $n \to \infty$; então define-se $f : X \to [-\infty,\infty]$ dada por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

chamada de *limite pontual da sequência* f_n.

Teorema 2.3.4. Se $f_n : X \to [-\infty,\infty]$ é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$, então as funções exibidas na Definição 2.3.3 são mensuráveis.

Demonstração. Mostraremos a mensurabilidade das funções dos itens *b)* e *d)* descritas na Definição 2.3.3, pois as demais são análogas.

b) Veja que, para $\alpha \in \mathbb{R}$, $g^{-1}((\alpha,\infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty])$, onde $g(x) = \sup_{n\geqslant 1} f_n(x)$.

De fato, dado $x \in g^{-1}((\alpha,\infty])$ segue que $g(x) > \alpha$, isto é, $\sup_{n\geqslant 1} f_n(x) > \alpha$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{n\geqslant 1} f_n(x) > f_{n_0}(x) > \alpha$. Sendo assim, $x \in f_{n_0}^{-1}((\alpha,\infty])$. Consequentemente, $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty])$.

Por outro lado, dado $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty])$; então existe pelo menos um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in f_{n_0}^{-1}((\alpha,\infty])$. Assim, $f_{n_0}(x) > \alpha$. Contudo, sabe-se que $\sup_{n\geqslant 1} f_n(x) > f_n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (em particular, vale para n_0). Com isso, $g(x) > \alpha$, ou seja, $x \in g^{-1}((\alpha,\infty])$.

Por cada f_n ser mensurável, tem-se que os conjuntos $f_n((\alpha,\infty])$ são mensuráveis e como a união contável de mensuráveis é mensurável, segue que $g^{-1}((\alpha,\infty])$ é mensurável seja qual for $\alpha \in \mathbb{R}$. Portanto, pelo item *iii)* do Teorema 2.2.4, $\sup_{n\geqslant 1} f_n$ é mensurável.

d) Basta notar que

$$\lim_{n\to\infty} \sup f_n(x) = \inf_{n\geqslant 1}\left(\sup_{n\geqslant k} f_n(x)\right).$$

Como $\inf f_n$ e $\sup f_n$ são mensuráveis, segue o desejado.

Assim, fica provado o resultado! □

Corolário 2.3.1. O limite de toda sequência de funções complexas mensuráveis pontualmente convergente é mensurável.

Demonstração. Considere a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções complexas mensuráveis. Suponha ainda que tal sequência convirja pontualmente, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in X.$$

Pode-se assim, escrever que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

Por f_n ser função complexa, escreva-a como $f_n = u_n + v_n \cdot i$ com u_n e v_n funções reais (para cada $n \in \mathbb{N}$). Como f_n é mensurável, então u_n e v_n são mensuráveis pelo Corolário 2.2.1. Ademais, u_n e v_n são funções pontualmente convergentes.

De fato, dado $x \in X$ qualquer, segue da convergência pontual de f que: Para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependente de ϵ e x) tal que:

$$n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Sabe-se que para qualquer número complexo $z = a+bi$, tem-se $|z| \geqslant |a|$ e $|z| \geqslant |b|$. Assim, pondo

$$z = f_n(x) - f(x) = (u_n - u(x)) + (v_n(x) - v(x))i,$$

temos:

$$n > n_0 \implies \begin{cases} |u_n(x) - u(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \\ |v_n(x) - v(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \end{cases}.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} v_n(x) = v(x); \quad \forall x \in X.$$

Passa-se a escrever:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} v_n = v.$$

A partir daí,

$$\begin{aligned} f = \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} (u_n + v_n i) &= \lim_{n\to\infty} u_n + i \lim_{n\to\infty} v_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup u_n + i \lim_{n\to\infty} \sup v_n. \end{aligned}$$

Segue do Teorema 2.3.4 que as funções

$$\lim_{n\to\infty} \sup u_n \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \sup v_n,$$

são mensuráveis.

Portanto, f é mensurável em decorrência do Corolário 2.2.2. $\square$

Corolário 2.3.2. Sejam f e g são funções mensuráveis de X em $[-\infty, \infty]$. Então, as funções $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ são funções mensuráveis.

Demonstração. Seja $x \in X$ qualquer. Assim,

$$\begin{aligned}(\max\{f, g\})(x) &= \max\{f(x), g(x)\} \\ &= \sup\{f(x), g(x)\} \\ &= (\sup\{f, g\})(x).\end{aligned}$$

Logo, $\max\{f, g\} = \sup\{f, g\}$. Segue do Teorema 2.3.4 que $\max\{f, g\}$ é mensurável. De forma análoga, prova-se que $\min\{f, g\}$ é mensurável. □

Definição 2.3.5. Seja a função $f : X \to [-\infty, \infty]$. Define-se as funções:

$$\begin{cases} f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \\ f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} \end{cases},$$

chamadas na devida ordem de *parte positiva de f* e *parte negativa de f*.

Dispomos das seguintes relações para uma função $f : X \to [-\infty, \infty]$,

- $|f| = f^+ + f^-$;

  Seja $x \in X$ qualquer. Assim,

$$\begin{aligned}(|f|)(x) = |f(x)| &= \max\{f(x), -f(x)\} \\ &= \max\{f(x), 0\} + \max\{-f(x), 0\} \\ &= \max\{f(x), 0\} - \min\{f(x), 0\} \\ &= f^+(x) + f^-(x) \\ &= (f^+ + f^-)(x).\end{aligned}$$

  Portanto, $|f| = f^+ + f^-$.

- $f = f^+ - f^-$.

  Seja $x \in X$ qualquer. Assim,

$$\begin{aligned}(f^+ - f^-)(x) &= f^+(x) - f^-(x) \\ &= \max\{f(x), 0\} + \min\{f(x), 0\}.\end{aligned}$$

  Se $f(x) \geqslant 0$, então temos que

$$(f^+ - f^-)(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

  Por outro lado, se $f(x) < 0$, então temos que

$$(f^+ - f^-)(x) = 0 + f(x) = f(x).$$

  Com isso, $(f^+ - f^-)(x) = f(x)$. Portanto, $f^+ - f^- = f$.

Proposição 2.3.1. Se $f = g - h$, $g \geqslant 0$ e $h \geqslant 0$; então $f^+ \leqslant g$ e $f^- \leqslant h$.

Demonstração. Repare que $g = f + h$, logo $g \geqslant f$. Além disso, temos por hipótese que $g \geqslant 0$. Sendo assim, $g \geqslant \max\{f, 0\} = f^+$. A partir daí,

$$\begin{aligned} g \geqslant f \quad &\Longrightarrow \quad g \geqslant g - h \\ &\Longrightarrow \quad 0 \geqslant -h \\ &\Longrightarrow \quad \max\{-f, 0\} \geqslant 0 \geqslant -h \\ &\Longrightarrow \quad h \geqslant 0 \geqslant -\max\{-f, 0\} \\ &\Longrightarrow \quad h \geqslant \min\{-f, 0\} = -\min\{f, 0\} = f^-. \end{aligned}$$

□

2.4 Medida Positiva

Nesta última seção, introduziremos a noção de medida positiva que será crucial para a integração à Lebesgue no próximo capítulo. Esse conceito nos permite mensurar os conjuntos pertencentes a uma σ-álgebra, ou seja, possibilita a "medição" dos conjuntos mensuráveis. Exibiremos também as principais propriedades desse conceito que servirão para demonstrações de resultados ligados à Integral de Lebesgue.

Definição 2.4.1. Seja $(X, \mathfrak{M})$ um espaço mensurável. Uma *medida positiva* é uma função $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ que é contavelmente aditiva, isto é, dados $A_1, A_2, \ldots$ em $\mathfrak{M}$ dois a dois disjuntos, se tem que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Comentário 2.4.1. Para evitar trivialidades, como definir $\mu(A) = \infty$ para todo $A \in \mathfrak{M}$ deve-se considerar que, para pelo menos um $A \in \mathfrak{M}$, $\mu(A) < \infty$. Inclusive, convencionamos que $\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty$ para $\alpha \in [0, \infty]$.

Definição 2.4.2. Chama-se *espaço de medida* o terno $(X, \mathfrak{M}, \mu)$; onde X é um conjunto qualquer, $\mathfrak{M}$ é uma σ-álgebra de X e μ é uma medida positiva sobre $\mathfrak{M}$.

Exemplo 2.4.1 (Medida da Contagem)**.** Considere o espaço mensurável $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$. Defina $\mu : P(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ por $\mu(A) = |A|$, se A for finito; e $\mu(A) = \infty$, se A for infinito.

Afirmação: μ define uma medida positiva sobre $P(\mathbb{N})$.

De fato, veja que dados $A_1, A_2, \ldots$ em $P(\mathbb{N})$ dois a dois disjuntos; tem-se as seguintes possibilidades:

1ª possibilidade: A_n é finito para todo $n \in \mathbb{N}$ de forma que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ é finito;

Nessa situação, vale que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \left|\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

2ª possibilidade: A_n é finito para todo $n \in \mathbb{N}$ de forma que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ é infinito ou ao menos um dos A_n é infinito;

Assim

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Portanto, $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu)$ é um espaço de medida.

Exemplo 2.4.2. Considere o espaço mensurável $(X, \mathfrak{M})$. Fixe $x_0 \in X$ e defina a função $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ dada por $\mu(A) = 1$, se $x_0 \in A$; e $\mu(A) = 0$, se $x_0 \notin A$. Tem-se que μ é uma medida positiva!

Com efeito, dados $A_1, A_2, \ldots$ elementos de $\mathfrak{M}$ dois a dois disjuntos, então temos duas possibilidades: Ou nenhum dos A_i possui x_0 ou apenas um A_i contém x_0. Na primeira situação, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ não conterá x_0 e com isso $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0 = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. Por outro lado, a segunda situação implica que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ contenha x_0 e daí $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. Em ambos os casos, constata-se que μ é contavelmente aditiva!

Exemplo 2.4.3. Seja $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ um espaço mensurável, onde $\mathfrak{B}$ é a σ-álgebra de Borel gerada pela topologia $\tau = \{A \in P(\mathbb{R}); \exists \epsilon > 0, (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset A, \forall x \in A\}$. Existe uma medida positiva m sobre $\mathfrak{B}$ chamada de *Medida de Lebesgue*. Essa medida, para intervalos I da reta real com extremos em a e b, com $a < b$, é o comprimento de tal intervalo, isto é,

$$m(I) = b - a.$$

Para os demais conjuntos mensuráveis, essa medida é definida utilizando o fato de que esses conjuntos podem ser representados por uma união de intervalos. Salienta-se ainda que a Medida de Lebesgue pode ser generalizada para o conjunto $\mathbb{R}^n$. Todavia, não iremos expor em nosso texto porque tornaria-se demasiado extenso, já que exige uma série de outros conhecimentos. No entanto, aconselhamos o leitor, caso seja do interesse, a consulta do livro do RUDIN (1987, p. 49) para maiores detalhes.

Vejamos agora algumas propriedades úteis acerca do conceito de medida positiva.

Teorema 2.4.1. Seja μ uma medida positiva em uma σ-álgebra $\mathfrak{M}$. Então,

i) $\mu(\varnothing) = 0$;

ii) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n)$ para $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathfrak{M}$ dois a dois disjuntos;

iii) Se $A, B \in \mathfrak{M}$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \leqslant \mu(B)$;

iv) Se $A, B \in \mathfrak{M}$ com $A \subset B$, então $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$;

v) Se $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ com $A_n \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e ainda $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, então $\mu(A_n) \to \mu(A)$ quando $n \to \infty$;

vi) Se $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ com $A_n \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e ainda $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ com $\mu(A_1)$ finito, então $\mu(A_n) \to \mu(A)$ quando $n \to \infty$;

Demonstração. Segue abaixo.

i) Tomando $A_1 \in \mathfrak{M}$ tal que $\mu(A_1) < \infty$ e $A_2 = A_3 = \ldots = \varnothing$, vale

$$\begin{aligned}
\mu(A_1) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 = \sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_n) \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{n+1}) \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n+1}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 = \mu(\varnothing).
\end{aligned}$$

ii) Basta tomar $A_{k+1} = A_{k+2} = \ldots = \varnothing$ na Definição 2.4.1 e utilizar o item *i)* desse teorema que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n).$$

iii) Veja que $B = A \cup (B - A)$ e ainda $A \cap (B - A) = \varnothing$ (destaca-se que $B - A \in \mathfrak{M}$ por $A, B \in \mathfrak{M}$). Sendo assim,

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B - A)) = \mu(A) + \mu(B - A).$$

Uma vez que $\mu(B - A) \geqslant 0$ (por conta de μ), segue que $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

iv) Pode-se escrever $B = A \cup (B - A)$ com $A \cap (B - A) = \varnothing$. Daí,

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B - A)) = \mu(A) + \mu(B - A) \Longleftrightarrow \mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A).$$

v) Ponha $B_1 = A_1$ e $B_n = A_n - A_{n-1}$ para $n \geqslant 2$. É claro que $B_i \cap B_j = \varnothing$ com $i \neq j$. De fato, se fosse $B_i \cap B_j \neq \varnothing$, então dado $x \in B_i \cap B_j$ segue que $x \in B_i$ e $x \in B_j$.

• Se $i = 1$, então $j > 1$. Com isso, $x \in B_1 = A_1$ e, dá hipótese da cadeia de inclusão, tem-se que $x \in A_{j-1}$ o que é um absurdo já que $x \in B_j = A_j - A_{j-1}$.

• Por outro lado, se $i \neq 1$ e $j \neq 1$ (com $i < j$), então $x \in B_i = A_i - A_{i-1}$ e $x \in B_j = A_j - A_{j-1}$. Vê-se assim que $x \in A_i$ e $x \in A_j$, mas $x \notin A_{i-1}$ e $x \notin A_{j-1}$. Por conta da hipótese da cadeia de inclusão, conclui-se $x \in A_{j-1}$, pois $A_i \subset A_{j-1}$. Com isso, verifica-se um absurdo!

Logo, $B_i \cap B_j = \varnothing$ com $i \neq j$.

Além disso, $B_1 = A_1 \in \mathfrak{M}$ assim como $B_n = A_n - A_{n-1} \in \mathfrak{M}$.

Assim,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i). \tag{2.2}$$

<u>*Afirmação*</u>: $A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$.

Com efeito,

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = B_1 \cup \bigcup_{i=2}^{n} B_i = A_1 \cup \left(\bigcup_{i=2}^{n}(A_i - A_{i-1})\right) \subset A_n,$$

pois $A_i - A_{i-1} \subset A_i \subset A_n$ para todo $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$; enquanto que dado $x \in A_n$, pode-se ter $x \notin A_{n-1}$ ou $x \in A_{n-1}$. Se $x \notin A_{n-1}$, então $x \in B_n$. Logo, $A_n \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$. Contudo, se $x \in A_{n-1}$ tem-se $x \notin A_{n-2}$ ou $x \in A_{n-2}$. Se $x \notin A_{n-2}$, então $x \in B_{n-1}$. Logo, $A_n \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$. Se $x \in A_{n-2}$, segue um raciocínio análogo ao anterior. Esse raciocínio tem fim porque parte-se do índice n e veem decaindo até chegar que $x \in A_1 = B_1 \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$.

Vê-se daí que

$$\mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i). \tag{2.3}$$

Substituindo a Igualdade 2.3 na Igualdade 2.2, decorre que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right). \tag{2.4}$$

Garante-se agora que $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = A$. De fato,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = B_1 \cup \left(\bigcup_{i=2}^{\infty} B_i\right) = A_1 \cup \left(\bigcup_{i=2}^{\infty}(A_i - A_{i-1})\right) \subset A,$$

pois $A_i - A_{i-1} \subset A_i \subset A$ para todo $i \geqslant 2$. Por outro lado, dado $x \in A$, então $x \in A_i$ para algum $i \in \mathbb{N}$. Se $x \notin A_{i-1}$, então $x \in A_i - A_{i-1} = B_i$, ou seja, $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$.

Entretanto, se $x \in A_{i-1}$, tem-se $x \notin A_{i-2}$ ou $x \in A_{i-2}$. Na primeira situação, conclui-se $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$; em contrapartida, na segunda possibilidade, utiliza-se do mesmo raciocínio. Essa ideia tem fim, pois parte-se do índice i e veem reduzindo até chegar que $x \in A_1 = B_1 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

Portanto, retornando em 2.4,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A).$$

vi) Por $\mu(A_1) < \infty$ e $A_n \supset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vê-se que $\mu(A_{n+1}) \leqslant \mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Defina $C_n = A_1 - A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, $C_n \subset C_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, dado $x \in C_n$, então $x \in A_1$ e $x \notin A_n$. Como $A_n \supset A_{n+1}$, então $x \notin A_{n+1}$. Consequentemente, $x \in A_1 - A_{n+1} = C_{n+1}$. Pelo item *v)* desse teorema,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n). \tag{2.5}$$

Denotando $\complement_{A_1} A_n = A_1 - A_n$ e $\complement_{A_1} A = A_1 - A$, veja que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \complement_{A_1} A_n = \complement_{A_1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \complement_{A_1} A = A_1 - A. \tag{2.6}$$

Assim, substituindo a Igualdade 2.6 em 2.5,

$$\mu(A_1 - A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 - A_n)$$

Utilizando-se do item *iv)* desse teorema,

$$\begin{aligned} \mu(A_1) - \mu(A) = \lim_{n\to\infty}[\mu(A_1) - \mu(A_n)] &\iff -\mu(A) = -\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \\ &\iff \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

Portanto, o resultado fica provado. □

Teorema 2.4.2. Seja $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida. Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{M}$ não são necessariamente disjuntos, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Demonstração. Escreva $B_1 = \varnothing$ e $B_n = \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ para $n \geqslant 2$. Percebe-se que $B_n \in \mathfrak{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, $A_n - B_n \in \mathfrak{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, verifica-se que $(A_i - B_i) \cap (A_j - B_j) = \varnothing$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$ diferentes um do outro. Com efeito, dado $x \in (A_i - B_i) \cap (A_j - B_j)$, então $x \in A_i - B_i$ e $x \in A_j - B_j$. Por $x \in A_i - B_i$, tem-se que $x \in A_i$ e $x \notin B_i = \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k$. De mesmo modo, $x \in A_j$ e $x \notin B_j = \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k$. Dessa última informação, constata-se que $x \notin A_k$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, j-2\}$. Supondo $i < j$ sem perder a generalidade, então $x \notin A_i$, absurdo! Também ocorre a igualdade $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. De fato, a inclusão $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - B_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ é imediata. Resta mostrar que $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - B_n) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Dado $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, então $x \in A_{n_0}$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Se $x \notin A_n - B_n$ para todo natural n, então $x \notin A_n$ ou $x \in B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

- Para $n = 1$, $x \notin A_1$ ou $x \in B_1$. Não pode ocorrer de $x \in B_1$, pois $B_1 = \varnothing$. Sendo assim, $x \notin A_1$.

- Para $n = 2$, $x \notin A_2$ ou $x \in B_2$. Não pode ocorrer de $x \in B_2 = A_1$, pois $x \notin A_1$. Sendo assim, $x \notin A_2$.

- Para $n = 3$, $x \notin A_3$ ou $x \in B_3$. Não pode ocorrer de $x \in B_3 = A_1 \cup A_2$, pois $x \notin A_1$ e $x \notin A_2$. Sendo assim, $x \notin A_3$.

  Seguindo assim...

- Para $n = n_0$, $x \notin A_{n_0}$ ou $x \in B_{n_0}$. Não pode ocorrer de $x \in B_{n_0} = \bigcup_{i=1}^{n_0-1} A_i$, pois $x \notin A_i$ para $i \in \{1, 2, \ldots, n_0 - 1\}$. Sendo assim, $x \notin A_{n_0}$. Absurdo, afinal, $x \in A_{n_0}$.

Portanto, $x \in A_n - B_n$ para algum natural n. Nesse sentido, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - B_n)$.

A partir daí,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - B_n)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n - B_n) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

A última desigualdade segue do fato de que $A_n - B_n \subset A_n$. Assim finaliza-se a prova do resultado. $\square$

Teorema 2.4.3. Seja $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida. Se $E \in \mathfrak{M}$, então $(E, \widetilde{\mathfrak{M}}, \widetilde{\mu})$ é um espaço de medida em que $\widetilde{\mathfrak{M}} = \{F \in \mathfrak{M}; F \subset E\}$ e $\widetilde{\mu}$ é a restrição de μ em relação à $\widetilde{\mathfrak{M}}$.

Demonstração. Para mostrar que $(E, \widetilde{\mathfrak{M}}, \widetilde{\mu})$ é um espaço de medida, precisa-se garantir que $\widetilde{\mathfrak{M}}$ é uma σ-álgebra de E e $\widetilde{\mu} : \widetilde{\mathfrak{M}} \to [0, \infty]$ definida por $\widetilde{\mu}(F) = \mu(F)$ é uma medida positiva.

- $\widetilde{\mathfrak{M}}$ é uma σ-álgebra de E.

    i) Veja que $\varnothing, E \in \widetilde{\mathfrak{M}}$, pois $\varnothing, E \in \mathfrak{M}$ e $\varnothing, E \subset E$;

    ii) Se $F \in \widetilde{\mathfrak{M}}$, então $F \in \mathfrak{M}$ e $F \subset E$. Por $F \in \mathfrak{M}$, decorre que $X - F \in \mathfrak{M}$. Daí, $E - F = (X - F) \cap (X - E) \in \mathfrak{M}$ porque $X - E \in \mathfrak{M}$ (este último, por causa de $E \in \mathfrak{M}$). Evidentemente, $E - F \subset E$. Logo, $E - F \in \widetilde{\mathfrak{M}}$;

    iii) Se $F_n \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $F_n \in \mathfrak{M}$ e $F_n \subset E$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por $F_n \in \mathfrak{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathfrak{M}$. Já, por conta de $F_n \subset E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vê-se que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset E$. Logo, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \widetilde{\mathfrak{M}}$.

    Portanto, $\widetilde{\mathfrak{M}}$ é σ-álgebra de E.

- $\widetilde{\mu} : \widetilde{\mathfrak{M}} \to [0, \infty]$ é uma medida positiva.

    Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $F_n \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ dois a dois disjuntos. É claro que $F_n \in \mathfrak{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue então do fato de μ ser medida positiva em $\mathfrak{M}$ que

$$\widetilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(F_n).$$

Portanto, fica demonstrado o resultado! $\square$

3 Integral de Lebesgue

Henri Léon Lebesgue foi um matemático francês que nasceu no dia 28 de junho de 1875 na pequena cidade de Beauvais e morreu em 26 de julho de 1941 em Paris aos 66 anos. Seu pai era tipógrafo enquanto sua mãe trabalhava lecionando para crianças dos anos iniciais; e, embora nascido em um meio modesto, era bastante promissor intelectualmente porque seus pais possuíam uma biblioteca vasta para a época e estimulavam Lebesgue a ler desde pequeno. (ORTEGA-GARCIA, 2015).

A educação básica de Lebesgue teve início ainda em Beauvais e, posteriormente, em Paris completando os estudos em *Lycée Saint Louis* (em português: Liceu Saint Louis) e mais tarde em *Lycée Louis le Grand* (em português: Liceu Louis le Grand). No ano de 1897, ele graduou-se em matemática na *École Normale Supérieure* (em português: Escola Normal Superior) ainda em Paris. Após isso, Lebesgue trabalhou até 1899 na biblioteca do lugar onde obteve sua graduação e durante esse período, de acordo com HOARE e LORD (2002 apud ORTEGA-GARCIA, 2015, p. 56),

> [...] Lebesgue tomou contato com os trabalhos de René Baire sobre classificação de funções descontínuas e sobre medida, o que influenciou algumas ideias presentes em sua tese e que, também, gerou uma certa rivalidade entre eles [...].

De 1899 até 1902, Lebesgue trabalhou como professor no *Lycée Centrale* (em português: Liceu Central) na cidade de Nancy, na França. Nessa época, ele formulou sua teoria da medida tendo por base os trabalhos de Émile Borel, Camile Jordan e René Baire. No ano de 1901, é publicado o seu principal trabalho *Sur une généralisation de l'intégrale définie* (em português: Sobre uma generalização da integral definida) o qual foi maior detalhado na sua tese de doutorado intitulada *Integrale, Longueur, Aire* (em português: Integral, Comprimento, Área) em 1902. (ORTEGA-GARCIA, 2015).

Neste capítulo, vamos abordar um assunto discutido na tese de Lebesgue – Integral de Lebesgue – juntamente com algumas de suas principais propriedades realizando comparativos com a Integral de Riemann. Enfatizamos que baseamos nosso texto nas seguintes bibliografias: (AXLER, 2020; RUDIN, 1987; TAYLOR, 1966).

3.1 Funções Simples

Durante o Capítulo 1, para integrar uma função segundo Riemann, nós aproximávamos a região abaixo do gráfico da função por retângulos para conseguirmos alcançar a real área abaixo da curva. De forma similar, dentro da Teoria de Integração proposta por Lebesgue, as funções simples desempenham esse papel de aproximação da função mensurável para então alcançar a exata área da região abaixo da curva através de certas operações. Nesse sentido, iremos apresentar o que são as funções simples e o principal resultado que garante que qualquer função não-negativa mensurável pode ser aproximada por funções simples não-negativas mensuráveis.

Definição 3.1.1. Seja $(X, \mathfrak{M})$ um espaço mensurável. Uma função complexa $s : X \to \mathbb{C}$ cujo alcance consiste em um número finito de números será chamada de *função simples*. Em outras palavras, uma função complexa $s : X \to \mathbb{C}$ é dita simples quando seu conjunto imagem, $s(X) = \{s(x) \in \mathbb{C}; x \in X\}$, é finito.

Observação 3.1.1. Quando $s(X) \subset [0, \infty)$ na Definição 3.1.1, diz-se que s é uma *função simples não-negativa*. Noutras palavras, quando $s : X \to [0, \infty)$ na Definição 3.1.1, então chamamos s de função simples não-negativa.

Exemplo 3.1.1. Toda função constante $s : X \to \mathbb{C}$ é uma função simples, pois seu conjunto imagem só possuirá um único elemento.

Exemplo 3.1.2. A Função de Dirichlet $\mathfrak{D} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ x \text{ é irracional} \\ 1, & \text{se } \ x \text{ é racional} \end{cases};$$

é uma função simples, pois $\mathfrak{D}([0, 1]) = \{0, 1\}$ é finito.

O resultado a seguir assegura uma forma de escrever uma função simples por meio de uma combinação linear dos valores que a função assume com a função característica.

Teorema 3.1.1. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ valores distintos que uma função simples s assume. Considere ainda $A_i = \{x \in X; s(x) = \alpha_i\}$ para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Então,

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

onde χ_{A_i} é a função característica do conjunto A_i.

Demonstração. Seja α_i para algum $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por α_i ser valor da função simples s (isto é, $\alpha_i \in s(X)$), então existe pelo menos um $x \in X$ tal que $s(x) = \alpha_i$. Nesse sentido, é claro que $A_i \neq \varnothing$. Inclusive, $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$ por conta de $\alpha_i \neq \alpha_j$. Veja daí que

$$\begin{aligned} s(x) &= \alpha_i \\ &= \alpha_1 \cdot 0 + \ldots + \alpha_{i-1} \cdot 0 + \alpha_i \cdot 1 + \alpha_{i+1} \cdot 0 + \ldots + \alpha_n \cdot 0 \\ &= \alpha_1 \chi_{A_1}(x) + \ldots + \alpha_{i-1}\chi_{A_{i-1}}(x) + \alpha_i \chi_{A_i}(x) + \alpha_{i+1}\chi_{A_{i+1}}(x) + \ldots + \alpha_n \chi_{A_n}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \right)(x). \end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado! □

O próximo resultado é importante porque caracterizará quando uma função simples é mensurável!

Teorema 3.1.2. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ valores distintos que uma função simples s assume. Então s é mensurável se, e somente se, cada $A_i = \{x \in X; s(x) = \alpha_i\}$ com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ é mensurável.

Demonstração. Veja abaixo!

Suponha que $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ seja mensurável. Quer-se mostrar que o conjunto $A_i = \{x \in X; s(x) = \alpha_i\}$ é mensurável para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Sabe-se que $B\left(\alpha_i; \frac{1}{n_i}\right)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{C}$ para algum n_i natural. Tome n_i o menor número natural para o qual α_i seja o único elemento dentre os α_i's em $B\left(\alpha_i; \frac{1}{n_i}\right)$. A existência de tal n_i é garantida porque todos os α_i's são distintos e, escrevendo daí $\alpha = \min\{|\alpha_i - \alpha_1|, \ldots, |\alpha_i - \alpha_{i-1}|, |\alpha_i - \alpha_{i+1}|, \ldots, |\alpha_i - \alpha_n|\}$, é claro que $\alpha > 0$ donde pelo Princípio Arquimediano existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \frac{1}{n_i} < \alpha.$$

Logo, $B\left(\alpha_i; \frac{1}{n_i}\right)$ contém α_i e nenhum outro dentre os demais α_i's.

A partir daí, vê-se facilmente que

$$A_i = s^{-1}\left(B\left(\alpha_i; \frac{1}{n_i}\right)\right) \in \mathfrak{M}.$$

Portanto, A_i é mensurável.

Reciprocamente, se A_i é mensurável para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então é claro que $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ é mensurável porque, pela Proposição 2.2.2, χ_{A_i} é mensurável para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e o produto entre funções complexas mensuráveis é mensurável (bem como a soma). □

Os próximos resultados nos garante que as operações de soma e multiplicação entre funções simples mensuráveis, bem como a multiplicação por uma constante real por uma função simples mensurável, são ainda funções simples mensuráveis!

Proposição 3.1.1. Sejam

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \qquad \text{e} \qquad t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$$

funções simples mensuráveis, onde $A_i = \{x \in X; s(x) = \alpha_i\}$ e $B_j = \{x \in X; t(x) = \beta_j\}$. Então $s + t$ é uma função simples mensurável tal que, para $C_{ij} = A_i \cap B_j$,

$$s + t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{C_{ij}}.$$

Demonstração. Primeiramente, perceba que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$.

Com efeito, dado $x \in X$, então $s(x) = \alpha_i$ para algum $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (pois s é definida em X). Posto isso, $x \in A_i$ para algum $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Assim, $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, ou seja, $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. A outra inclusão é imediata, uma vez que $A_i \subset X$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

De maneira análoga, $X = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$.

A partir disso, veja que:

$$A_i \subset X = \bigcup_{j=1}^{m} B_j \implies A_i = A_i \cap \bigcup_{j=1}^{m} B_j = \bigcup_{j=1}^{m} A_i \cap B_j = \bigcup_{j=1}^{m} C_{ij}.$$

De forma similar, tem-se $B_j = \bigcup_{i=1}^{n} C_{ij}$.

Vê-se ainda que C_{ij}'s são disjuntos dois a dois. Com efeito, dados $i, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $j, l \in \{1, 2, \ldots, m\}$ com $i \neq k$ ou $j \neq l$, tem-se

$$C_{ij} \cap C_{kl} = (A_i \cap B_j) \cap (A_k \cap B_l) = (A_i \cap A_k) \cap (B_j \cap B_l) = \varnothing,$$

pois pelo menos um dos fatores da última interseção do lado direito da igualdade acima é vazio.

Sendo assim, dado $x \in A_i$, nota-se que $x \in C_{ij}$ para algum $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\chi_{A_i}(x) &= 1 \\
&= 0 + \ldots + 0 + 1 + 0 + \ldots + 0 \\
&= \chi_{C_{i1}}(x) + \ldots + \chi_{C_{i(j-1)}}(x) + \chi_{C_{ij}}(x) + \chi_{C_{i(j+1)}}(x) + \ldots + \chi_{C_{im}}(x) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \chi_{C_{ij}}(x).
\end{aligned}$$

Quando $x \notin A_i$, então $x \notin C_{ij}$ para todo $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Com isso,

$$\begin{aligned} \chi_{A_i}(x) &= 0 \\ &= 0 + \ldots + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 \\ &= \chi_{C_{i1}}(x) + \ldots + \chi_{C_{i(j-1)}}(x) + \chi_{C_{ij}}(x) + \chi_{C_{i(j+1)}}(x) + \ldots + \chi_{C_{im}}(x) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \chi_{C_{ij}}(x). \end{aligned}$$

Logo, $\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} \chi_{C_{ij}}$. De forma análoga, $\chi_{B_j} = \sum_{i=1}^{n} \chi_{C_{ij}}$.

Posto isso,

$$\begin{aligned} s + t &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \sum_{j=1}^{m} \chi_{C_{ij}} \right) + \sum_{j=1}^{m} \left(\beta_j \sum_{i=1}^{n} \chi_{C_{ij}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \chi_{C_{ij}} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{C_{ij}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{C_{ij}}. \end{aligned}$$

A mensurabilidade de $s+t$ decorre do Teorema 3.1.2 porque cada C_{ij} é um conjunto mensurável, posto que A_i e B_j são conjuntos mensuráveis. □

Proposição 3.1.2. Sejam

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \qquad \text{e} \qquad t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$$

funções simples mensuráveis, onde $A_i = \{x \in X; s(x) = \alpha_i\}$ e $B_j = \{x \in X; t(x) = \beta_j\}$. Então st é uma função simples mensurável tal que, para $C_{ij} = A_i \cap B_j$,

$$st = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \chi_{C_{ij}}.$$

Demonstração. Inicialmente, observa-se que $X = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} C_{ij}$. Com efeito,

$$\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} C_{ij} = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j \right) = X \cap X = X.$$

O fato de $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j = X$ foi verificado na demonstração da Proposição 3.1.1.

Dado $x \in X$, então existem $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tais que $x \in C_{ij}$. Por $C_{ij} = A_i \cap B_j$, tem-se que $x \in A_i$ e $x \in B_j$. Assim, $s(x) = \alpha_i$ e $t(x) = \beta_j$. A partir disso,

$$\alpha_i \beta_j = s(x)t(x) = (st)(x),$$

ou melhor,

$$(st)(x) = \alpha_i \beta_j \chi_{C_{ij}}(x).$$

Ademais, como pode ser observado na demonstração da Proposição 3.1.2, os conjuntos C_{ij}'s são dois a dois disjuntos. Nesse sentido,

$$\chi_{C_{i1}}(x) = \chi_{C_{i2}}(x) = \ldots = \chi_{C_{i(j-1)}}(x) = \chi_{C_{i(j+1)}}(x) = \ldots = \chi_{C_{im}}(x) = 0$$

para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, bem como

$$\chi_{C_{1j}}(x) = \chi_{C_{2j}}(x) = \ldots = \chi_{C_{(i-1)j}}(x) = \chi_{C_{(i+1)j}}(x) = \ldots = \chi_{C_{nj}}(x) = 0.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \chi_{C_{ij}} \right)(x) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \chi_{C_{ij}}(x) \\ &= \alpha_i \beta_j \chi_{C_{ij}}(x) \\ &= (st)(x). \end{aligned}$$

Dada a arbitrariedade de x na igualdade acima, segue que

$$st = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \chi_{C_{ij}}.$$

A mensurabilidade de st resulta do fato de todos os C_{ij}'s serem mensuráveis! $\square$

Proposição 3.1.3. Seja a função simples mensurável

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

onde $A_i = \{x \in X; s(x) = \alpha_i\}$. Dado $c \in \mathbb{R}$, então a função cs é simples mensurável tal que

$$cs = \sum_{i=1}^{n} c\alpha_i \chi_{A_i}.$$

Demonstração. Primeiramente, note que

$$cs = c\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} = \sum_{i=1}^{n} c\alpha_i \chi_{A_i}.$$

Resta mostrar que $B_i := \{x \in X; (cs)(x) = c\alpha_i\} = A_i$.

De fato, dado $x \in B_i$, então $(cs)(x) = c\alpha_i$. Por $(cs)(x) = cs(x)$, segue então que $s(x) = \alpha_i$ caso $c \neq 0$. Já se $c = 0$, então faça $s(x) = \alpha_i$. Por consequência, em ambos os casos $x \in A_i$. Por outro lado, se $x \in A_i$, então $s(x) = \alpha_i$. A partir daí, $c\alpha_i = cs(x) = (cs)(x)$ e, consequentemente, $x \in B_i$.

A mensurabilidade de cs segue da mensurabilidade de s, pois todos os A_i são mensuráveis. $\square$

O teorema abaixo é o mais importante desta seção, pois será amplamente utilizado na demonstração de diversos outros resultados nas seções subsequentes. Ele nos afirma que qualquer função não-negativa mensurável pode ser aproximada por funções simples não-negativas mensuráveis.

Teorema 3.1.3. Seja $f : X \to [0, \infty]$ uma função mensurável. Então existem funções simples mensuráveis $s_n : X \to [0, \infty)$ tais que:

i) $0 \leqslant s_1(x) \leqslant s_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f(x), \ \forall x \in X$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x), \ \forall x \in X$.

Demonstração. Segue abaixo.

Considere $\mathfrak{D}_n := \left\{\dfrac{v}{2^n}; 0 \leqslant \dfrac{v}{2^n} \leqslant n\right\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Nota-se que $\mathfrak{D}_n \subset \mathfrak{D}_{n+1}$. De fato, dado $r \in \mathfrak{D}_n$, tem-se que $r = \dfrac{v}{2^n}$ com $0 \leqslant v \leqslant n2^n$. Veja daí que $r = \frac{2v}{2^{n+1}}$ com

$$0 \leqslant v \leqslant n2^n \leqslant (n+1)2^n \iff 0 \leqslant 2v \leqslant (n+1)2^{n+1}.$$

Logo, $r \in \mathfrak{D}_{n+1}$.

Defina $s_n : X \to [0, \infty)$ por $s_n(x) = \max\{y \in \mathfrak{D}_n; y \leqslant f(x)\}$. É claro que s_n é uma função simples não-negativa, pois $s_n(X) \subset \mathfrak{D}_n$ e $\mathfrak{D}_n$ possui $n2^n + 1$ elementos!

Para $x \in X$ qualquer, percebe-se que $s_n(x) \leqslant s_{n+1}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, pela inclusão $\mathfrak{D}_n \subset \mathfrak{D}_{n+1}$ e para qualquer $x \in X$, segue que

$$\{y \in \mathfrak{D}_n; y \leqslant f(x)\} \subset \{y \in \mathfrak{D}_{n+1}; y \leqslant f(x)\}.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \max\{y \in \mathfrak{D}_n; y \leqslant f(x)\} \\ &\leqslant \max\{y \in \mathfrak{D}_{n+1}; y \leqslant f(x)\} = s_{n+1}(x), \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ademais, para todo $n \in \mathbb{N}$, $s_n(x) \leqslant f(x)$ por conta da definição de s_n.

A sequência $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona não-decrescente e limitada, o que garante a existência do limite de $s_n(x)$.

- <u>*Afirmação*</u>: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x), \forall x \in X$.

  Veja que $f(x) < \infty$ ou $f(x) = \infty$. Se:

  ▶ $f(x) < \infty$;

  Para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) \leqslant n$ (tais $n's$ existem porque o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é ilimitado no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais), tem-se que $s_n(x) = \dfrac{v}{2^n}$ para algum $0 \leqslant v \leqslant n2^n$. Daí,

$$s_n(x) = \frac{v}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{v+1}{2^n} = s_n(x) + \frac{1}{2^n}$$

  Pelo Teorema das Sucessões Enquadradas,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x).$$

  ▶ $f(x) = \infty$.

  Então $s_n(x) = n$, donde $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = \infty = f(x)$.

  Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

  Resta mostrar que as funções s_n são funções mensuráveis!

  Veja que

$$s_n(x) = \sum_{v=0}^{n2^n} \frac{v}{2^n} \chi_{A_{v,n}}(x),$$

onde $A_{v,n} = \left\{x \in X; \dfrac{v}{2^n} \leqslant f(x) < \dfrac{v+1}{2^n}\right\}$ para $0 \leqslant v \leqslant n2^n - 1$ e, quando $v = n2^n$, $A_{n2^n,n} = \{x \in X; f(x) \geqslant n\}$.

Os conjuntos $A_{v,n}$ são todos mensuráveis porque:

- Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 \leqslant v \leqslant n2^n - 1$,

$$A_{v,n} = \underbrace{\left\{x \in X; f(x) < \frac{v+1}{2^n}\right\}}_{E} - \underbrace{\left\{x \in X; f(x) < \frac{v}{2^n}\right\}}_{F},$$

  onde $E = f^{-1}\left(\left(0, \frac{v+1}{2^n}\right)\right) \in \mathfrak{M}$ e $F = f^{-1}\left(\left(0, \frac{v}{2^n}\right)\right) \in \mathfrak{M}$ (afinal, f é mensurável).

- Para $n \neq 0$ e $v = n2^n$, tem-se $A_{n2^n,n} = [f^{-1}((0,n))]^{\complement} \in \mathfrak{M}$.

- Para $n = 0$ e $v = n2^n = 0$, tem-se $A_{0,0} = \{x \in X; f(x) \geqslant 0\} = X \in \mathfrak{M}$.

Sendo assim, as s_n's são funções simples não-negativas mensuráveis que se aproximam da função mensurável não-negativa f. □

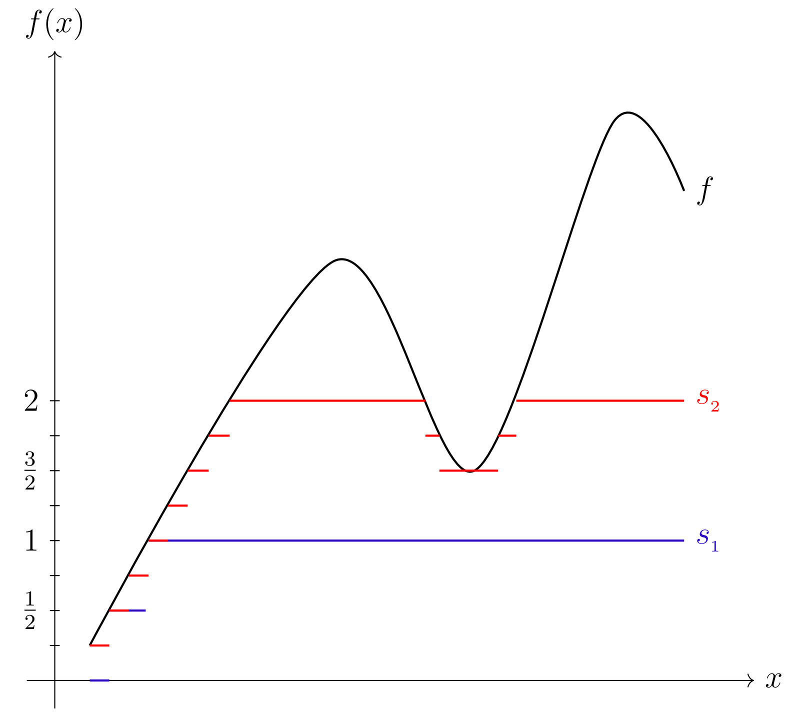

Figura 6 – Representação de duas funções simples não-negativas mensuráveis, s_1 (em azul) e s_2 (em vermelho), que se aproximam da função não-negativa mensurável f.

3.2 Aritmética em $[0, \infty]$

É importante se ater com relação a aritmética da extensão da semirreta não-negativa, isto é, estender as operações de adição e multiplicação para o conjunto $[0, \infty]$ de forma que propriedades relevantes como comutatividade, associatividade e distributividade sejam ainda válidas. Isso se faz essencial porque quando falarmos de integração[1] (que envolve medida), podemos acabar querendo integrar sobre conjuntos de medida infinita e acabar chegando a expressões como, por exemplo, $0 \cdot \infty$ e $\alpha + \infty$ (com $\alpha \in [0, \infty]$).

Definição 3.2.1. Considere $\alpha \in [0, \infty]$. Define-se:

(A) $\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty$;

$$(M)\ \ \alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \begin{cases} \infty, & \text{se} \ \ \alpha > 0 \\ 0, & \text{se} \ \ \alpha = 0 \end{cases}.$$

A soma e produto entre números reais é a usual como a conhecemos.

Devemos tomar cuidado com as leis do cancelamento da adição e do produto, pois só são válidas quando o elemento envolvido no cancelamento é finito; isto é; se $a+b = a+c$ então $b = c$ desde que $a < \infty$ e se $ab = ac$ então $b = c$ desde que $0 < a < \infty$.

[1] Mais especificamente, Integral de Lebesgue.

Observação 3.2.1. É possível estendermos as operações de soma e produto para a extensão da reta real $[-\infty, \infty]$. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, ponha:

A′) $(\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty) + \alpha = \alpha + (\pm\infty) = \pm\infty$;

M′) $(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty$, $(\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty$ e

$$\alpha(\pm\infty) = (\pm\infty)\alpha = \begin{cases} \pm\infty, & \text{se } \ \alpha > 0 \\ 0, & \text{se } \ \alpha = 0 \\ \mp\infty, & \text{se } \ \alpha < 0 \end{cases}.$$

Ressalta-se ainda que não definimos o que seria $(+\infty) + (-\infty)$ e $(-\infty) + (+\infty)$.

Afirmação 3.2.1. Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências em $[0, \infty]$. Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$ quando $n \to \infty$, então $a_n + b_n \to a + b$ quando $n \to \infty$.

Demonstração. Segue abaixo!

Por $a_n \to a$ e $b_n \to b$ quando $n \to \infty$, então, para todo $\epsilon > 0$, existem os números naturais n_1 e n_2 tais que

$$\begin{aligned} n > n_1 \quad &\Longrightarrow \quad |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}; \\ n > n_2 \quad &\Longrightarrow \quad |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, tem-se

$$n > n_0 \implies \begin{cases} |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \\ |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \end{cases}.$$

Veja daí que

$$\begin{aligned} n > n_0 \implies |(a_n + b_n) - (a + b)| \ &= \ |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leqslant \ |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \ \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \ \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $a_n + b_n \to a + b$ quando $n \to \infty$. □

Afirmação 3.2.2. Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências não-negativas e não-decrescentes em $[0, \infty]$. Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$ quando $n \to \infty$, então $a_n b_n \to ab$ quando $n \to \infty$.

Demonstração. Segue abaixo!

Veja que por $b_n \to b$ quando $n \to \infty$, então $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Digamos que seu limitante seja L, assim tem-se que $|b_n| \leqslant L$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por $a_n \to a$ e $b_n \to b$ quando $n \to \infty$, então, para todo $\epsilon > 0$, existem os números naturais n_1 e n_2 tais que

$$\begin{aligned} n > n_1 \quad &\Longrightarrow \quad |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2(L+1)}; \\ n > n_2 \quad &\Longrightarrow \quad |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|a+1|}. \end{aligned}$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, tem-se

$$n > n_0 \Longrightarrow \begin{cases} |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2(L+1)} \\ |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|a+1|} \end{cases}.$$

Veja daí que

$$\begin{aligned} n > n_0 \Longrightarrow |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab + ab_n - ab_n| \\ &= |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)| \\ &\leqslant |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| \\ &< |b_n|\frac{\epsilon}{2(L+1)} + |a|\frac{\epsilon}{2|a+1|} \\ &\leqslant L\frac{\epsilon}{2(L+1)} + |a|\frac{\epsilon}{2|a+1|} \\ &< \cancel{(L+1)}\frac{\epsilon}{2\cancel{(L+1)}} + \cancel{|a+1|}\frac{\epsilon}{2\cancel{|a+1|}} \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $a_n b_n \to ab$ quando $n \to \infty$. □

Dadas as funções $f, g : X \to [0, \infty]$ mensuráveis e $x \in X$ qualquer, então pelo Teorema 3.1.3 existem as sequências de funções simples não-negativas mensuráveis $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que:

- $0 \leqslant s_1(x) \leqslant s_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f(x)$ com $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$;
- $0 \leqslant t_1(x) \leqslant t_2(x) \leqslant \ldots \leqslant g(x)$ com $\lim\limits_{n\to\infty} t_n(x) = g(x)$.

É claro que $f(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} s_n(x)$ e $g(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} t_n(x)$ pelo exposto acima.

Veja daí que

► $0 \leqslant s_1(x) + t_1(x) \leqslant s_2(x) + t_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f(x) + g(x)$;

► $0 \leqslant s_1(x)t_1(x) \leqslant s_2(x)t_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f(x)g(x)$.

As sequências $(s_n + t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(s_n t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples não-negativas mensuráveis são monótonas não-decrescentes e limitadas, consequentemente convergentes! Sendo assim, utilizando-se das Afirmações 3.2.1 e 3.2.2,

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{N}} [s_n(x) + t_n(x)] &= \lim_{n\to\infty} [s_n(x) + t_n(x)] \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n(x) + \lim_{n\to\infty} t_n(x) \\ &= f(x) + g(x), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n(x)t_n(x) &= \lim_{n\to\infty} s_n(x)t_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n(x) \lim_{n\to\infty} t_n(x) \\ &= f(x)g(x). \end{aligned}$$

Segue assim do Teorema 2.3.4 que as funções $f + g$ e fg são funções mensuráveis.

Esse raciocínio exposto acima demonstra o resultado abaixo.

Proposição 3.2.1. Sejam $f, g : X \to [0, \infty]$ funções mensuráveis. Então $f + g$ e fg também o são.

Proposição 3.2.2. Sejam $f : X \to [0, \infty]$ uma função mensurável e $c \in \mathbb{R}_+$. Então a função $cf : X \to [0, \infty]$ é mensurável.

Demonstração. Por f ser mensurável, então pelo Teorema 3.1.1 existe uma sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de função simples não-negativas mensuráveis tais que

- $0 \leqslant s_1(x) \leqslant s_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f(x)$ com $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Tem-se multiplicando as desigualdades acima por $c \in \mathbb{R}_+$ que

- $0 \leqslant cs_1(x) \leqslant cs_2(x) \leqslant \ldots \leqslant cf(x)$.

A sequência $(cs_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples não-negativas mensuráveis é monótona não-decrescente e limitada, logo convergente!

Afirmação: $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} cs_n(x) = cf(x)$ para todo $x \in X$.

De fato, dado $x \in X$ qualquer,

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{N}} cs_n(x) &= \lim_{n\to\infty} cs_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} c \lim_{n\to\infty} s_n(x) \\ &= cf(x). \end{aligned}$$

Como $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} cs_n(x)$ é mensurável por conta do Teorema 2.3.4, segue a mensurabilidade da função cf. $\square$

Proposição 3.2.3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $f_n : X \to [0, \infty]$ uma função mensurável. Então $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é mensurável.

Demonstração. Basta notar que, para um $x \in X$ arbitrário,

$$\begin{aligned} f(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} f_n(x) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sup \sum_{n=1}^{k} f_n(x) \\ &= \left(\lim_{k\to\infty} \sup \sum_{n=1}^{k} f_n\right)(x) \end{aligned}$$

Como $\sum_{n=1}^{k} f_n$ é mensurável (aplicar k vezes a Proposição 3.2.1 referente à soma) e aplicando o Teorema 2.3.4 a última expressão, resulta que a função f é mensurável. □

3.3 Integração de Funções Não-Negativas Mensuráveis

Nesta seção, iremos definir a Integral de Lebesgue para funções não-negativas mensuráveis, bem como apresentar suas propriedades que manifestam-se diante das operações aritméticas entre essas funções.

Definição 3.3.1. Sejam $(X, \mathfrak{M})$ um espaço mensurável e $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ uma medida positiva. Considere ainda $s : X \to [0, \infty)$ uma função simples não-negativa mensurável escrita como

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

onde $A_i = \{x \in X; s(x) = \alpha_i\}$. Fica posto que a *Integral de Lebesgue da função s sobre o conjunto mensurável E em relação a medida* μ é:

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Exemplo 3.3.1. Considere o espaço de medida $(\mathbb{R}, P(\mathbb{R}), \mu)$, onde $\mu : P(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ é definida por

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } \frac{1}{2} \in A \\ 0, & \text{se } \frac{1}{2} \notin A \end{cases}.$$

[μ é medida pelo que foi exposto no Exemplo 2.4.2]

Defina a função simples não-negativa mensurável $s : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ por

$$s(x) = \sum_{i=1}^{5} (2i - 1)\chi_{A_i}(x),$$

onde $A_1 = (-\infty, 0], A_2 = (0, 1], A_3 = (1, 5], A_4 = (5, 7]$ e $A_5 = (5, \infty)$.

Considerando o conjunto $E = [-3, 5]$ mensurável, determinaremos o valor de $\int_E s \, d\mu$.

$$\begin{aligned} \int_E s \, d\mu &= \sum_{i=1}^{5} (2i-1)\mu(A_i \cap E) \\ &= 1 \cdot \mu(A_1 \cap E) + 3 \cdot \mu(A_2 \cap E) + 5 \cdot \mu(A_3 \cap E) + 7 \cdot \mu(A_4 \cap E) + 9 \cdot \mu(A_5 \cap E). \end{aligned}$$

Verifica-se que

- $A_1 \cap E = [-3, 0]$, onde $\frac{1}{2} \notin [-3, 0]$;
- $A_2 \cap E = A_2$, onde $\frac{1}{2} \in A_2$;
- $A_3 \cap E = A_3$, onde $\frac{1}{2} \notin A_3$;
- $A_4 \cap E = \varnothing$;
- $A_5 \cap E = \varnothing$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_E s \, d\mu &= 1 \cdot \cancelto{0}{\mu(A_1 \cap E)} + 3 \cdot \cancelto{1}{\mu(A_2 \cap E)} + 5 \cdot \cancelto{0}{\mu(A_3 \cap E)} + 7 \cdot \cancelto{0}{\mu(A_4 \cap E)} + 9 \cdot \cancelto{0}{\mu(A_5 \cap E)} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Exemplo 3.3.2. Seja $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida. Considere ainda χ_A a função característica sobre $A \in \mathfrak{M}$. Com isso, considerando também $E \in \mathfrak{M}$ e percebendo que $A = \{x \in X; \chi_A(x) = 1\}$ e $X - A = \{x \in X; \chi_A(x) = 0\}$,

$$\int_E \chi_A \, d\mu = 1 \cdot \mu(A \cap E) + 0 \cdot \mu((X - A) \cap E) = \mu(A \cap E).$$

Dessa forma, sendo $A = E = [0, 1]$ e utilizando o espaço de medida do Exemplo 3.3.1, repara-se que

$$\int_E \chi_E \, d\mu = \mu(E) = 1, \text{ pois } \frac{1}{2} \in E.$$

Exemplo 3.3.3. Considere $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, m)$ um espaço de medida, onde $\mathfrak{B}$ é a σ-álgebra de Borel gerada pela topologia $\tau = \{A \in P(\mathbb{R}); \exists \epsilon > 0, (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset A, \forall x \in A\}$ e m é a Medida de Lebesgue. Como $[0, 1] \in \mathfrak{B}$, decorre do Teorema 2.4.3 que $([0, 1], \widetilde{\mathfrak{B}}, \widetilde{m})$ é um espaço de medida em que $\widetilde{\mathfrak{B}} = \{F \in P([0, 1]); F \in \mathfrak{B}\}$ e $\widetilde{m} : \widetilde{\mathfrak{B}} \to [0, \infty]$ é dada por $\widetilde{m}(F) = m(F)$. Agora, seja a Função de Dirichlet $\mathfrak{D} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é irracional} \\ 1, & \text{se } x \text{ é racional} \end{cases}.$$

Percebe-se facilmente que $\mathfrak{D}([0,1]) = \{0,1\} \subset [0,\infty)$. Com isso, a Função de Dirichelet é uma função simples não-negativa. Além disso, é evidente que $\mathfrak{D} = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, bem como o conjunto $\mathbb{Q}\cap[0,1] \in \widetilde{\mathfrak{B}}$. Essa última afirmação é garantida porque, escrevendo o conjunto $\mathbb{Q}\cap[0,1] = \{r_1, r_2, \ldots\}$ (já que é enumerável), tem-se

$$\mathbb{Q}\cap[0,1] = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{r_i\} = \bigcup_{i=1}^{\infty}[r_i, r_i].$$

Por $[r_i, r_i] \in \mathfrak{B}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, então $\mathbb{Q}\cap[0,1] \in \mathfrak{B}$. Ademais, $\mathbb{Q}\cap[0,1] \subset [0,1]$ e, por consequência, $\mathbb{Q}\cap[0,1] \in \widetilde{\mathfrak{B}}$.

Sendo assim,

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} \mathfrak{D}\ dm = \int_{[0,1]} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\ dm &= m(\mathbb{Q}\cap[0,1]) \\ &= m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}[r_i, r_i]\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} m([r_i, r_i]) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}(r_i - r_i) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Comentário 3.3.1. Identifica-se, a partir do Exemplo 3.3.3, uma das primeiras divergências entre a Integral de Riemann e Lebesgue — a integrabilidade da Função de Dirichlet. No Capítulo 1, observou-se a inexistência da integral segundo Riemann para essa função e, neste ponto, viu-se que existe a Integral de Lebesgue para essa função!

O teorema abaixo garantirá algumas propriedades da Integral de Lebesgue para funções simples não-negativas mensuráveis. Essas características serão úteis para a demonstração de propriedades mais gerais quando aprendermos a integrar funções não-negativas mensuráveis não necessariamente simples!

Teorema 3.3.1. Sejam as funções simples não-negativas mensuráveis

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \qquad \text{e} \qquad t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j},$$

onde $A_i = \{x \in X; s(x) = \alpha_i\}$ e $B_j = \{x \in X; t(x) = \beta_j\}$. Além disso, considere $c \in \mathbb{R}_+$ e os conjuntos A, B e E mensuráveis. Então,

i) $\displaystyle\int_E (s+t)\ d\mu = \int_E s\ d\mu + \int_E t\ d\mu$;

ii) $\displaystyle\int_E cs\ d\mu = c\int_E s\ d\mu$;

iii) Se $A \subset B$, vale que $\displaystyle\int_A s\ d\mu \leqslant \int_B s\ d\mu$;

iv) Se $s = 0$, então $\int_E s \, d\mu = 0$;

v) Se $\mu(E) = 0$, então $\int_E s \, d\mu = 0$;

vi) $\int_E s \, d\mu = \int_X \chi_E s \, d\mu$.

Demonstração. Segue abaixo!

i) Pela Proposição 3.1.1, tem-se

$$s + t = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i + \beta_j)\chi_{C_{ij}},$$

onde $C_{ij} = A_i \cap B_j$ são dois a dois disjuntos.

Aliás, ainda na demonstração da Proposição 3.1.1, $A_i = \bigcup_{j=1}^{m} C_{ij}$ e $B_j = \bigcup_{i=1}^{n} C_{ij}$.

Posto isso,

$$\begin{aligned}
\int_E (s+t) \, d\mu &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i + \beta_j)\mu(C_{ij} \cap E) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i\mu(C_{ij} \cap E) + \beta_j\mu(C_{ij} \cap E)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\mu(C_{ij} \cap E) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mu(C_{ij} \cap E) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{m}\mu(C_{ij} \cap E)\right) + \sum_{j=1}^{m}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{n}\mu(C_{ij} \cap E)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} C_{ij} \cap E\right) + \sum_{j=1}^{m}\beta_j\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_{ij} \cap E\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i \cap E) + \sum_{j=1}^{m}\beta_j\mu(B_j \cap E) \\
&= \int_E s \, d\mu + \int_E t \, d\mu.
\end{aligned}$$

ii) Pela Proposição 3.1.3 para $c \in \mathbb{R}_+$, tem-se $cs = \sum_{i=1}^{n} c\alpha_i\chi_{A_i}$. Então,

$$\int_E cs \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c\alpha_i\mu(A_i \cap E) = c\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i \cap E) = c\int_E s \, d\mu.$$

iii) Por $A \subset B$, segue que $A_i \cap A \subset A_i \cap B$ para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ arbitrário. A partir daí, pelo item *iii)* do Teorema 2.4.1 resulta que $\mu(A_i \cap A) \leqslant \mu(A_i \cap B)$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. Logo,

$$\int_A s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i \cap A) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i \cap B) = \int_B s \, d\mu.$$

iv) Se $s = 0$, então $s(x) = 0$ para todo $x \in X$. Com isso, $\alpha_i = 0$ para para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ou seja, $A_i = X$ para qualquer que seja $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dessa forma, $s = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \chi_X$. Sendo assim,

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \mu(X \cap E) = 0.$$

v) Perceba que $A_i \subset X$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Com isso, $A_i \cap E \subset X \cap E = E$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pelo item *iii)* do Teorema 2.4.1, $\mu(E) \geqslant \mu(A_i \cap E)$. Tem-se ainda por hipótese que $\mu(E) = 0$ e $\mu(A_i \cap E) \geqslant 0$ (essa última é pelo fato da medida considerada ser não-negativa por conta da definição de integral estabelecida). Nesse sentido, $\mu(A_i \cap E) = 0$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. Segue daí que

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot 0 = 0.$$

vi) Para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ arbitrário, defina $B_i = \{x \in E; (\chi_E s)(x) = \alpha_i\}$. Tem-se que $B_i = A_i \cap E$. Com efeito, se $x \in B_i$, então $(\chi_E s)(x) = \alpha_i$. No entanto, como $(\chi_E s)(x) = \chi_E(x) s(x)$, segue que $s(x) = \alpha_i$ (uma vez que $\chi_E(x) = 1$). Logo, $B_i \subset A_i$ e, pela definição de B_i, sabe-se que $B_i \subset E$. Consequentemente, $B_i \subset A_i \cap E$. Por outro lado, se $x \in A_i \cap E$, então $x \in A_i$ e $x \in E$. Disso, resulta a igualdade $(\chi_E s)(x) = \chi_E(x) s(x) = s(x) = \alpha_i$. Logo, $x \in B_i$, isto é, $A_i \cap E \subset B_i$. Assim, $B_i = A_i \cap E$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (dada a arbitrariedade de i imposta no início da demonstração). Além disso, $B_i \cap X = B_i$, pois $A_i \subset X$ e $E \subset X$. Veja a partir daí que

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(B_i \cap X) = \int_X \chi_E s \, d\mu.$$

Isso conclui a demonstração do resultado! □

Teorema 3.3.2. Considere $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida. Seja também $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ uma função simples não-negativa mensurável em que $A_i = \{x \in X; s(x) = \alpha_i\}$. Defina a função $\phi : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ por

$$\phi(E) = \int_E s \, d\mu.$$

Então ϕ é uma medida positiva.

Demonstração. Sejam $E_1, E_2, \ldots, E_j, \ldots \in \mathfrak{M}$ dois a dois disjuntos. Escreva $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = E$. Assim,

$$\begin{aligned}
\phi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \phi(E) = \int_E s\, d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_i \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_i \cap E_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} s\, d\mu \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \phi(E_j).
\end{aligned}$$

Além disso, $\phi(\varnothing) = 0$, pois $\mu(\varnothing) = 0$. □

Agora vejamos como é definida a Integral de Lebesgue para funções não-negativas mensuráveis que não são necessariamente simples.

Definição 3.3.2. Sejam o espaço mensurável $(X, \mathfrak{M})$ e $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ uma medida positiva. Considere $f : X \to [0, \infty]$ uma função mensurável. Fica posto que a *Integral de Lebesgue da função f sobre o conjunto mensurável E em relação a medida μ* é:

$$\int_E f\, d\mu = \sup\left\{\int_E s\, d\mu; 0 \leqslant s \leqslant f\right\},$$

onde s é uma função simples não-negativa mensurável.

Comentário 3.3.2. É intrigante pensar que se f é uma função simples não-negativa mensurável na Definição 3.3.2, então tem-se duas definições de integral para a mesma função (contando com a Definição 3.3.1). Contudo, ambas coincidem, isto é, levam ao mesmo valor numérico porque a maior função simples não-negativa mensurável que se aproxima por baixo de f é ela própria.

O resultado abaixo expressa características da Integral de Lebesgue para funções não-negativas mensuráveis.

Teorema 3.3.3. Sejam $f, g : X \to [0, \infty]$ funções mensuráveis. Considerando ainda os conjuntos A, B e E mensuráveis, então *i)* Se $f \leqslant g$, então $\int_E f\ d\mu \leqslant \int_E g\ d\mu$;

ii) Se $A \subset B$, então $\int_A f\ d\mu \leqslant \int_B f\ d\mu$;

iii) Se $c \in [0, \infty]$, então $\int_E cf\ d\mu = c \int_E f\ d\mu$;

iv) Se $f = 0$, então $\int_E f\ d\mu = 0$;

v) Se $\mu(E) = 0$, então $\int_E f\ d\mu = 0$;

vi) $\int_E f\ d\mu = \int_X \chi_E f\ d\mu$.

Demonstração. Segue abaixo!

i) Suponha que $0 \leqslant f \leqslant g$. Veja que, para s e t funções simples não-negativas mensuráveis,

$$A = \left\{ \int_E s\ d\mu; 0 \leqslant s \leqslant f \right\} \subset \left\{ \int_E t\ d\mu; 0 \leqslant t \leqslant g \right\} = B,$$

pois $\int_E s\ d\mu$ é tal que $0 \leqslant s \leqslant f \leqslant g$. Logo, $\int_E s\ d\mu \in B$. Sendo assim, verifica-se que $\sup A \leqslant \sup B$, isto é,

$$\int_E f\ d\mu \leqslant \int_E g.$$

ii) Pelo item *iii)* do Teorema 3.3.1,

$$\int_A s\ d\mu \leqslant \int_B s\ d\mu$$

para uma função simples não-negativa mensurável s qualquer (em particular, vale para aquelas que cumprem $0 \leqslant s \leqslant f$). Baseado nisso juntamente com a primeira implicação do Teorema 1.1.1,

$$\begin{aligned} \int_A f\ d\mu &= \sup \left\{ \int_A s\ d\mu; 0 \leqslant s \leqslant f \right\} \\ &\leqslant \inf \left\{ \int_B s\ d\mu; 0 \leqslant s \leqslant f \right\} \\ &\leqslant \sup \left\{ \int_B s\ d\mu; 0 \leqslant s \leqslant f \right\} \\ &= \int_B f\ d\mu. \end{aligned}$$

iii) Se $c \in [0, \infty)$, segue pelo item *ii)* do Teorema 3.3.1 que

$$\int_E cs\ d\mu = c \int_E s\ d\mu$$

para uma função simples não-negativa mensurável s qualquer (em particular, vale para aquelas que cumprem $0 \leqslant s \leqslant f$). Além disso,

$$A = \left\{ \int_E cs \; d\mu; 0 \leqslant s \leqslant f \right\} = \left\{ \int_E cs \; d\mu; 0 \leqslant cs \leqslant cf \right\} = B.$$

Com efeito, dado $\int_E cs \; d\mu \in A$, então $0 \leqslant s \leqslant f$. Multiplicando a desigualdade por c, segue que $\int_E cs \; d\mu \in B$. Por outro lado, se $\int_E cs \; d\mu \in B$, então $0 \leqslant cs \leqslant cf$. Se $c = 0$, então independe de s; mas se $c > 0$, então basta aplicar a lei do cancelamento da multiplicação que $0 \leqslant s \leqslant f$. Em ambos os casos, $\int_E cs \; d\mu \in A$.

Sendo assim,

$$\begin{aligned} c \int_E f \; d\mu = c \sup \left\{ \int_E s \; d\mu; 0 \leqslant s \leqslant f \right\} &= \sup \left\{ c \int_E s \; d\mu; 0 \leqslant s \leqslant f \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_E cs \; d\mu; 0 \leqslant s \leqslant f \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_E cs \; d\mu; 0 \leqslant cs \leqslant cf \right\} \\ &= \int_E cf \; d\mu. \end{aligned}$$

O caso em que $c = \infty$, tem-se obviamente $c \int_E f \; d\mu = \infty = \int_E cf \; d\mu$. A última igualdade é pelo fato do conjunto $\left\{ \int_E cs \; d\mu; 0 \leqslant cs \leqslant cf \right\}$ ser ilimitado.

iv) Basta, utilizando-se do item *iv*) do Teorema 3.3.1, notar que

$$\int_E f \; d\mu = \int_E 0 \; d\mu = \sup \left\{ \int_E s \; d\mu; 0 \leqslant s \leqslant 0 \right\} = \sup \left\{ \int_E 0 \; d\mu \right\} = \sup \{0\} = 0.$$

v) Basta utilizar o item *v*) do Teorema 3.3.1 que

$$\int_E f \; d\mu = \sup \left\{ \int_E s \; d\mu; 0 \leqslant s \leqslant f \right\} = \sup \{0\} = 0.$$

vi) Basta utilizar o item *vi*) do Teorema 3.3.1 na igualdade abaixo.

$$\begin{aligned} \int_E f \; d\mu &= \sup \left\{ \int_E s \; d\mu; 0 \leqslant s \leqslant f \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_X \chi_E s \; d\mu; 0 \leqslant \chi_E s \leqslant \chi_E f \right\} \\ &= \int_X \chi_E f \; d\mu. \end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração do resultado! □

O teorema a seguir é de grande importância para a Teoria de Integração à Lebesgue, pois garante a passagem do limite sob o sinal da integral.

Teorema 3.3.4 (Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue)**.** Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções não-negativas mensuráveis em X e suponha que:

i) $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \infty$ para todo $x \in X$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Então f é mensurável e vale que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n\ d\mu\right) = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)\ d\mu.$$

Demonstração. Segue abaixo!

Para cada $x \in X$, a sequência $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona não-decrescente e limitada; e, consequentemente, convergente! Ainda dessas informações, sabe-se que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

Por outro lado, tem-se por hipótese que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Pela unicidade do limite,

$$f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

Logo, $f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Em decorrência disso, pelo Teorema 2.3.4, f é mensurável.

Para $x \in X$ arbitrário, repare que $f_n(x) \leqslant f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, afinal $f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Posto isso, $f_n \leqslant f$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com essa desigualdade e o item *i)* do Teorema 3.3.3,

$$\int_X f_n\ d\mu \leqslant \int_X f\ d\mu,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Inclusive, uma vez que $f_n \leqslant f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (por hipótese), decorre pelo mesmo resultado que

$$\int_X f_n\ d\mu \leqslant \int_X f_{n+1}\ d\mu,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma, a sequência $\left(\int_X f_n\ d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona não-decrescente e limitada; e, consequentemente, convergente! Com isso,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n\ d\mu\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n\ d\mu.$$

Digamos que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n\ d\mu = \alpha$. A partir daí, aplicando o limite quando $n \to \infty$ na Desigualdade 3.1, tem-se

$$\alpha \leqslant \int_X f\ d\mu.$$

Resta garantir a desigualdade contrária, ou seja, $\alpha \geqslant \int_X f\ d\mu$.

Veja que

$$\int_X f\ d\mu = \sup\left\{\int_X s\ d\mu; 0 \leqslant s \leqslant f\right\} \geqslant \int_X s\ d\mu,$$

com $0 \leqslant s \leqslant f$ na última integral da desigualdade acima.

Observe que se $\alpha \geqslant \int_X s\ d\mu$ para s uma função simples não-negativa mensurável tal que $0 \leqslant s \leqslant f$, então conclui-se o que se quer.

Considere s uma função simples não-negativa mensurável tal que $0 \leqslant s \leqslant f$. Defina

$$E_n = \{x \in X; f_n(x) \geqslant cs(x)\},$$

para uma constante $c \in (0, 1)$.

Afirmação: E_n é um conjunto mensurável para cada $n \in \mathbb{N}$.

De fato, fixe $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$X - E_n = \{x \in X; cs(x) > f_n(x)\} = \{x \in X; (cs - f_n)(x) > 0\} = (cs - f_n)^{-1}((0, \infty]).$$

Por cs e f_n serem mensuráveis, então $cs - f_n$ também o é. Além disso, $(0, \infty]$ é um conjunto aberto em $[0, \infty]$. Nesse sentido, $X - E_n$ é mensurável donde E_n também é.

Afirmação: $E_n \subset E_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Com efeito, dado $x \in E_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$ fixado, tem-se que $f_n(x) \geqslant cs(x)$. Daí, como por hipótese $f_{n+1} \geqslant f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, decorre que $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x) \geqslant cs(x)$ donde $x \in E_{n+1}$. Logo, $E_n \subset E_{n+1}$.

Afirmação: $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Como $E_n \subset X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset X$. Agora, dado $x \in X$, então $f(x) = 0$ ou $f(x) > 0$.

- Se $f(x) = 0$, então, por $0 \leqslant s(x) \leqslant f(x)$, $s(x) = 0$. Inclusive, $cs(x) = 0$. Como $f_1(x) \geqslant 0 = cs(x)$, tem-se $x \in E_1$.
- Se $f(x) > 0$, então, por $0 \leqslant s(x) \leqslant f(x)$, segue que $f(x) > cs(x)$, já que $c < 1$. Além disso,

  $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) > cs(x).$$

  Com isso, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ tem-se $f_n(x) > cs(x)$. Logo, $x \in E_n$ para $n > n_o$.

  Em ambos os casos, $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Logo, $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Escreva agora $s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$, onde $A_i = \{x \in X; s(x) = \alpha_i\}$. Utilizando o item *ii*) do Teorema 3.3.3 e o fato de $f \geqslant cs$ (nesse último, utilizando o item *i*) do Teorema 3.3.3 para E_n), veja que

$$\int_X f \, d\mu \geqslant \int_{E_n} f \, d\mu \geqslant \int_{E_n} cs \, d\mu = c \int_{E_n} s \, d\mu = c \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i \cap E_n).$$

Logo, utilizando o item *v*) do Teorema 2.4.1,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_X f \, d\mu \geqslant \lim_{n\to\infty} \left(c \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i \cap E_n) \right) &= c \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(\lim_{n\to\infty} \mu(A_i \cap E_n) \right) \\ &= c \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i \cap X) \\ &= c \int_X s \, d\mu, \end{aligned}$$

isto é,

$$\alpha \geqslant c \int_X s \, d\mu.$$

Como $c \in (0,1)$ e o supremo de $(0,1)$ é 1, decorre que $\alpha \geqslant \int_X s \, d\mu$.

Logo, α é cota superior para o conjunto $\left\{ \int_X s \, d\mu; 0 \leqslant s \leqslant f \right\}$ e como

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X s \, d\mu; 0 \leqslant s \leqslant f \right\},$$

segue que $\alpha \geqslant \int_X f \, d\mu$.

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n \, d\mu \right) = \int_X f \, d\mu,$$

ou melhor,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n \, d\mu \right) = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) \, d\mu.$$

□

Observação 3.3.1. Embora a integral do Teorema 3.3.4 esteja sendo considerada sobre todo X, é também válido para qualquer conjunto mensurável $E \subset X$ por conta do Teorema 2.4.3. Fica também resguardado aqui que os demais resultados cuja a integral aparece sobre todo o espaço de medida $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ são válidos para qualquer conjunto mensurável desse espaço pelo mesmo motivo!

Exemplo 3.3.4. Considere o espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, m)$, onde $\mathfrak{B}$ é a σ-álgebra gerada pela topologia $\tau = \{A \in P(\mathbb{R}); \exists \epsilon > 0, (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset A, \forall x \in A\}$ e m é a Medida de Lebesgue. Sejam ainda a função mensurável $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ dada por $f(x) = x$ e o conjunto mensurável $[0,1]$. Vamos calcular $\int_{[0,1]} f \, dm$.

Veja que dado a sequência de funções simples onde $f_0 = 0$ e

$$f_{2n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 0 \leqslant x < \frac{1}{2n} \\ \frac{1}{2n}, & \text{se} \quad \frac{1}{2n} \leqslant x < \frac{1}{n} \\ & \vdots \\ \frac{n-1}{n}, & \text{se} \quad \frac{n-1}{n} \leqslant x < \frac{2n-1}{2n} \\ \frac{2n-1}{2n}, & \text{se} \quad \frac{2n-1}{2n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases},$$

tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} f_{2n}(x) = f(x), \text{ em } [0,1].$$

De fato, dado $x \in [0,1]$, temos que

$$f_0(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_4(x) \leqslant ... \leqslant x = f(x)$$

Logo, f é uma cota superior do conjunto $F = \{f_0, f_2, \cdots\}$. Dado $\epsilon > 0$, vamos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \implies f(x) - \epsilon < f_{2n}(x).$$

Repare que:

- Se $\epsilon \geqslant 1$, então basta tomar, por exemplo, $n_0 = 2$ que tem-se o requerido.
- Se, por outro lado, $0 < \epsilon < 1$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

  $$0 < \frac{1}{n_0} < \epsilon < 1 \iff 0 < \frac{1}{2n_0} < \frac{\epsilon}{2} < \frac{1}{2}.$$

  Uma vez que $\frac{\epsilon}{2} < \epsilon$, segue que

  $$0 < \frac{1}{2n_0} < \epsilon < 1.$$

  Assim, basta tomar $2n_0 > \epsilon$ que tem-se o requerido!

Logo, $\lim_{n\to\infty} f_{2n}(x) = f(x)$.

Com tudo isso, utilizando-se do Teorema 3.3.4, vê-se que

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} f \; dm = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_{2n} \; dm &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k-1}{2n} \cdot m\left(\left[\frac{k-1}{2n}, \frac{k}{2n}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k-1}{2n} \cdot \frac{1}{2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^{2n} (k-1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n} \cdot \frac{\cancel{2n}(2n-1)}{\cancel{2n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{4n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\right) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Teorema 3.3.5. Sejam $f, g : X \to [0, \infty]$ funções não-negativas mensuráveis. Então

$$\int_X (f+g) \; d\mu = \int_X f \; d\mu + \int_X g \; d\mu.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.3, existem as sequências de funções simples não-negativas mensuráveis $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que:

- $0 \leqslant s_1(x) \leqslant s_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f(x)$ com $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$;
- $0 \leqslant t_1(x) \leqslant t_2(x) \leqslant \ldots \leqslant g(x)$ com $\lim\limits_{n\to\infty} t_n(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.

A partir daí, fazendo o uso do Teorema 3.3.4,

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} s_n\right) \; d\mu = \int_X f \; d\mu \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \; d\mu = \int_X f \; d\mu$$

De modo similar, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X t_n \; d\mu = \int_X g \; d\mu$.

Além disso, para $x \in X$ arbitrário, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} [s_n(x) + t_n(x)] = \lim_{n\to\infty} s_n(x) + \lim_{n\to\infty} t_n(x) = f(x) + g(x)$$

Com isso, usando o Teorema 3.3.4,

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} [s_n + t_n]\right) \; d\mu = \int_X (f+g) \; d\mu \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\int_X (s_n + t_n) \; d\mu\right) = \int_X (f+g) \; d\mu$$

Portanto, fazendo o uso do item $i)$ do Teorema 3.3.1,

$$\begin{aligned}
\int_X (f+g) \; d\mu &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_X (s_n + t_n) \; d\mu\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_X s_n \; d\mu + \int_X t_n \; d\mu\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \; d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X t_n \; d\mu \\
&= \int_X f \; d\mu + \int_X g \; d\mu.
\end{aligned}$$

Isso finaliza o resultado! □

Teorema 3.3.6. Se, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : X \to [0, \infty]$ é mensurável e

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Então,

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Primeiramente, veja que f é mensurável por conta da Proposição 3.2.3. Defina $g_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$. Assim, para $x \in X$ qualquer,

- $0 \leqslant g_1(x) \leqslant g_2(x) \leqslant \cdots \leqslant \infty$;
- $\lim_{N\to\infty} g_N(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$.

Logo, utilizando o Teorema 3.3.5,

$$\int_X g_N \, d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n \, d\mu.$$

Aplicando o limite quando $N \to \infty$ e o Teorema da Convergência Monótona, obtém-se:

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

□

Corolário 3.3.1. Seja $a_{ij} \geqslant 0$ para $i, j \in \mathbb{N}$. Então, $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$.

Demonstração. Seja $X = \{1, 2, ..., k\}$ e μ a medida da contagem (vide Exemplo 2.4.1). Para cada $i \in \mathbb{N}$, defina $f_i : X \to [0, \infty]$ por $f_i(j) = a_{ij}$ para $j \in X$. A partir daí, ponha

$$f(j) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(j) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}, \ (j \in X)$$

Segue pelo Teorema 3.3.6 que

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X f_i \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X a_{ij} \, d\mu. \tag{3.2}$$

Por f ser uma função simples não-negativa mensurável, veja pelo lado esquerdo da Igualdade 3.2 que, para $A_j = \left\{x \in X; f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right\} = \{j\}$,

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\mu(A_j \cap X) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\mu(A_j) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Para $B_{ij} = \{x \in X; f_i(x) = a_{ij}\} = \{j\}$ (com i fixo), decorre que

$$\int_X a_{ij}\ d\mu = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\mu(B_{ij} \cap X) = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\mu(B_{ij}) = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}.$$

Assim, tem-se pelo lado direito da Igualdade 3.2 que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_X a_{ij}\ d\mu = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}.$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}.$$

Fazendo $k \to \infty$, conclui-se que $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}.$ □

Lema 3.3.1 (Lema de Fatou)**.** Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : X \to [0, \infty]$ uma função mensurável. Então

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} \inf f_n\right)\ d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf \left(\int_X f_n\ d\mu\right).$$

Demonstração. Para cada $N \in \mathbb{N}$, defina $g_N = \inf\limits_{n \geqslant N} f_n$. Com isso, g_N é mensurável pelo Teorema 2.3.4. Daí, para $x \in X$ arbitrário,

i) $0 \leqslant g_1(x) \leqslant g_2(x) \leqslant \cdots \leqslant \infty$;

De fato, basta notar que $\{f_N(x), f_{N+1}(x), ...\} \supset \{f_{N+1}(x), f_{N+2}(x), ...\}$ e, consequentemente,

$$g_N(x) = \inf\{f_N(x), f_{N+1}(x), ...\} \leqslant \inf\{f_{N+1}(x), f_{N+2}(x), ...\} = g_{N+1}(x).$$

Inclusive, $0 \leqslant g_N(x) \leqslant \infty$ para todo $N \in \mathbb{N}$, já que $g_N : X \to [0, \infty]$.

ii) $\lim\limits_{N\to\infty} g_N(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \inf f_n(x)$.

Imediato da Definição 2.3.1.

Além disso, $g_N(x) \leqslant f_n(x)$ para todo $n \geqslant N$.

Nesse sentido,

$$\int_X g_N\ d\mu \leqslant \int_X f_n\ d\mu,\ \forall n \geqslant N.$$

Assim, $\int_X g_N\ d\mu$ é uma cota inferior do conjunto $A := \left\{\int_X f_n\ d\mu; n \geqslant N\right\}$. Com isso,

$$\int_X g_N\ d\mu \leqslant \inf_{n\geqslant N} \int_X f_n\ d\mu.$$

Aplicando o limite quando $N \to \infty$ na desigualdade acima e usando o Teorema da Convergência Monótona, resulta que

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} \inf f_n \right) \, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf \left(\int_X f_n \, d\mu \right).$$

□

É natural nos questionarmos se existe ou até mesmo pensarmos em um exemplo de modo que ocorra a desigualdade estrita apresentada no Lema de Fatou. Nesse sentido, o próximo exemplo nos poupará de tal tarefa porque exibirá um caso "específico" em que a desigualdade introduzida no Lema de Fatou é estrita!

Exemplo 3.3.5. Considere $f_n = \chi_E$ quando n é ímpar e $f_n = \chi_{X-E}$ quando n é par. Assim, $h_k(x) = \inf\limits_{n \geqslant k} f_n(x) = 0$, pois $x \in X$ implica $x \in E$ ou $x \in X - E$ (o ou é excludente porque $E \cap (X - E) = \varnothing$). Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \inf f_n(x) = \lim_{k\to\infty} h_k(x) = 0.$$

Assim,

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) \, d\mu = 0.$$

Observe agora que

$$\int_X \chi_E \, d\mu = \mu(E)$$

e

$$\int_X \chi_{X-E} \, d\mu = \mu(X - E).$$

Se tomar uma medida μ tal que $0 < \mu(E) < \mu(X)$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \inf \left(\int_X f_n \, d\mu \right) = \min \{\mu(E), \mu(X - E)\}.$$

E como $\mu(E), \mu(X - E) > 0$, segue que:

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) \, d\mu < \lim_{n\to\infty} \inf \left(\int_X f_n \, d\mu \right).$$

Teorema 3.3.7. Suponha que $f : X \to [0, \infty]$ seja uma função mensurável e

$$\phi(E) = \int_E f \, d\mu \qquad (E \in \mathfrak{M}).$$

Então ϕ é uma medida positiva em $\mathfrak{M}$ e

$$\int_X g \, d\phi = \int_X gf \, d\mu,$$

para toda função $g : X \to [0, \infty]$ mensurável.

Demonstração. Considere a sequência $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathfrak{M}$, dois a dois disjuntos, cuja união seja E. Daí,

$$\phi(E) = \int_E f\ d\mu = \int_X \chi_E f\ d\mu$$

e

$$\phi(E_i) = \int_{E_i} f\ d\mu = \int_X \chi_{E_i} f\ d\mu.$$

Veja que $\chi_E f = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i} f$. De fato, lembrando que $E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$ (união disjunta), tem-se:

- Para $x \notin E$, então $x \notin E_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, $\chi_{E_i}(x) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Com isso,

$$(\chi_E f)(x) = 0 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i} f\right)(x).$$

- Para $x \in E$, implica $x \in E_i$ para algum $i \in \mathbb{N}$. Assim, $\chi_{E_i}(x) = 1$ enquanto que, para os demais valores de i, essas funções características assumem valor nulo. Daí,

$$(\chi_E f)(x) = f(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i} f\right)(x).$$

Com isso, aplicando o Teorema 3.3.6,

$$\begin{aligned}
\phi(E) = \int_X \chi_E f\ d\mu &= \int_X \left(\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i} f\right) d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_X \chi_{E_i} f\ d\mu\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \phi(E_i).
\end{aligned}$$

Portanto, ϕ define uma medida positiva sobre $\mathfrak{M}$.

Resta mostrar a igualdade entre integrais posta no enunciado do resultado. Sendo g uma função não-negativa mensurável, então existe uma sequência de funções simples não-negativas mensuráveis s_n tal que, para $x \in X$ arbitrário,

a) $0 \leqslant s_1(x) \leqslant s_2(x) \leqslant \cdots \leqslant g(x)$;

b) $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = g(x)$.

Repare ainda que a sequência $s_n f$ é mensurável (pois é um produto de funções mensuráveis) e é tal que:

a') $0 \leqslant (s_1 f)(x) \leqslant (s_2 f)(x) \leqslant \cdots \leqslant (gf)(x)$;

b') $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n f)(x) = (gf)(x)$.

A partir daí, com o auxílio do Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue e sendo $s_n = \sum\limits_{i=1}^{k_n} \alpha_{in}\chi_{A_{in}}$ onde $A_{in} = \{x \in X; s_n(x) = \alpha_{in}\}$, decorre que:

$$\begin{aligned}
\int_X g\ d\phi &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_X s_n\ d\phi\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{k_n}\alpha_{in}\cdot\phi(A_{in})\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{k_n}\alpha_{in}\cdot\left(\int_{A_{in}} f\ d\mu\right)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\int_X\left(\sum_{i=1}^{k_n}\alpha_{in}\cdot\chi_{A_{in}}f\right)\ d\mu\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\int_X\left(\sum_{i=1}^{k_n}\alpha_{in}\chi_{A_{in}}\cdot f\right)\ d\mu\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\int_X s_n f\ d\mu\right)\\
&= \int_X\left(\lim_{n\to\infty} s_n f\right)\ d\mu\\
&= \int_X gf\ d\mu.
\end{aligned}$$

Assim fica demonstrado o resultado! □

3.4 Integração de Funções Mensuráveis com valores em $[-\infty, \infty]$

Nesta seção, iremos definir a integral de funções mensuráveis que assumem valores na extensão da reta real. Inclusive, apresentaremos algumas de suas principais propriedades aritméticas.

Definição 3.4.1. Seja $(X, \mathfrak{M})$ um espaço mensurável e $\mu : \mathfrak{M} \to [0,\infty]$ um medida positiva. Considere $f : X \to [-\infty,\infty]$ uma função mensurável tal que, para $E \in \mathfrak{M}$,

$$\int_E f^-\ d\mu < \infty \quad \text{ou} \quad \int_E f^+\ d\mu < \infty.$$

Fica posto que a *Integral de Lebesgue da função f sobre o conjunto mensurável E em relação a medida* μ é:

$$\int_E f\ d\mu = \int_E f^+\ d\mu - \int_E f^-\ d\mu.$$

Comentário 3.4.1. Na Definição 3.4.1, a condição

$$\int_E f^-\ d\mu < \infty \quad \text{ou} \quad \int_E f^+\ d\mu < \infty$$

é para garantir que não ocorra uma situação de indeterminação matemática no lado direito na igualdade

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu,$$

a saber $\infty - \infty$.

Definição 3.4.2. Seja $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida. Os elementos do conjunto

$$\widetilde{L}^1(\mu) = \left\{ f : X \to [-\infty, \infty]; f \text{ é mensurável e } \int_X |f| \, d\mu < \infty \right\}$$

são chamados de *funções integráveis à Lebesgue* ou *funções somáveis*.

Comentário 3.4.2. A condição $\int_X |f| \, d\mu < \infty$ implica que

$$\int_X f^- \, d\mu < \infty \quad \text{e} \quad \int_X f^+ \, d\mu < \infty,$$

pois $|f| = f^+ + f^-$.

Os próximos resultados são propriedades aritméticas da Integral de Lebesgue para funções mensuráveis que assumem valores na extensão da reta real.

Teorema 3.4.1. Seja $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida. Considere também as funções $f, g \in \widetilde{L}^1(\mu)$. Nestas condições,

$$\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

Demonstração. Primeiramente, perceba que $|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|$ para $x \in X$ qualquer. Logo,

$$\int_X |f+g| \, d\mu \leqslant \int_X |f| \, d\mu + \int_X |g| \, d\mu < \infty.$$

Com isso, sabendo que $|f+g| = (f+g)^+ + (f+g)^-$, garante-se o seguinte:

$$\int_X (f+g)^+ \, d\mu < \infty \quad \text{e} \quad \int_X (f+g)^- \, d\mu < \infty.$$

Agora, veja que

- $f + g = (f+g)^+ - (f+g)^-$;
- $f = f^+ - f^-$;
- $g = g^+ - g^-$.

Sendo assim,

$$\begin{aligned}(f+g)^+ - (f+g)^- &= f^+ - f^- + g^+ - g^- \\ &\Updownarrow \\ (f+g)^+ + f^- + g^- &= (f+g)^- + f^+ + g^+.\end{aligned}$$

Daí, utilizando-se do Teorema 3.3.5,

$$\begin{aligned}\int_X [(f+g)^+ + f^- + g^-]\ d\mu &= \int_X [(f+g)^- + f^+ + g^+]\ d\mu \\ &\Updownarrow \\ \int_X (f+g)^+\ d\mu + \int_X f^-\ d\mu + \int_X g^-\ d\mu &= \int_X (f+g)^-\ d\mu + \int_X f^+\ d\mu + \int_X g^+\ d\mu.\end{aligned}$$

Reorganizando os termos, fica-se com

$$\int_X (f+g)^+\ d\mu - \int_X (f+g)^-\ d\mu = \left(\int_X f^+\ d\mu - \int_X f^-\ d\mu\right) + \left(\int_X g^+\ d\mu - \int_X g^-\ d\mu\right).$$

Portanto,

$$\int_X (f+g)\ d\mu = \int_X f\ d\mu + \int_X g\ d\mu.$$

□

Teorema 3.4.2. Seja $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida. Considere também o número real c e a função $f : X \to [-\infty, \infty]$ mensurável tal que

$$\int_X f^-\ d\mu < \infty \quad \text{ou} \quad \int_X f^+\ d\mu < \infty.$$

Nestas condições,

$$\int_X cf\ d\mu = c\int_X f\ d\mu.$$

Demonstração. Veja abaixo os casos que se tem!

- Para $c = 0$, é imediato porque $cf = 0$ e daí, lembrando que $\int_X f\ d\mu \in [-\infty, \infty]$,

$$\int_X cf\ d\mu = 0 = c\int_X f\ d\mu.$$

- Para $c > 0$, tem-se que $(cf)^+(x) = \max\{0, cf(x)\} = c\max\{0, f(x)\} = cf^+(x)$ para $x \in X$ qualquer. Dessa forma, $(cf)^+ = cf^+$. De maneira análoga, vê-se que $(cf)^- = cf^-$. A partir disso,

$$\begin{aligned}\int_X cf\ d\mu &= \int_X (cf)^+\ d\mu - \int_X (cf)^-\ d\mu \\ &= \int_X cf^+\ d\mu - \int_X cf^-\ d\mu \\ &= c\int_X f^+\ d\mu - c\int_X f^-\ d\mu \\ &= c\left(\int_X f^+\ d\mu - \int_X f^-\ d\mu\right) \\ &= c\int_X f\ d\mu.\end{aligned}$$

- Para $c < 0$, é análogo ao caso anterior.

Portanto, vale a propriedade da homogeneidade da integral. $\square$

Teorema 3.4.3. Seja $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida. Considere $A, B \in \mathfrak{M}$ disjuntos e uma função $f \in \widetilde{L}^1(\mu)$. Então

$$\int_{A\cup B} f \; d\mu = \int_A f \; d\mu + \int_B f \; d\mu.$$

Demonstração. Segue abaixo.

Seja $x \in X$ qualquer. Assim, $\chi_{A\cup B}(x) = 0$ ou $\chi_{A\cup B}(x) = 1$. Se $\chi_{A\cup B}(x) = 0$, então $x \notin A \cup B$. Com isso, $x \notin A$ e $x \notin B$. Logo, $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 0$. Sendo assim, $\chi_{A\cup B}(x) = (\chi_A + \chi_B)(x)$. Por outro lado, se $\chi_{A\cup B}(x) = 1$, então $x \in A \cup B$. Com isso, $x \in A$ ou $x \in B$ (o 'ou' é exclusivo, pois A e B são disjuntos). Caso $x \in A$, tem-se $\chi_A(x) = 1$ e $\chi_B(x) = 0$ donde $\chi_{A\cup B}(x) = (\chi_A + \chi_B)(x)$ (análogo caso $x \in B$). Portanto, $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$.

Veja que

$$\begin{aligned}
\int_{A\cup B} f \; d\mu &= \int_{A\cup B} f^+ \; d\mu - \int_{A\cup B} f^- \; d\mu \\
&= \int_X \chi_{A\cup B} f^+ \; d\mu - \int_X \chi_{A\cup B} f^- \; d\mu \\
&= \int_X (\chi_A f^+ + \chi_B f^+) \; d\mu - \int_X (\chi_A f^- + \chi_B f^-) \; d\mu \\
&= \left(\int_X \chi_A f^+ \; d\mu - \int_X \chi_A f^- \; d\mu\right) + \left(\int_X \chi_B f^+ \; d\mu - \int_X \chi_B f^- \; d\mu\right) \\
&= \left(\int_A f^+ \; d\mu - \int_A f^- \; d\mu\right) + \left(\int_B f^+ \; d\mu - \int_B f^- \; d\mu\right) \\
&= \int_A f \; d\mu + \int_B f \; d\mu.
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 3.4.4. Seja $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida. Considere $A, B \in \mathfrak{M}$ disjuntos e uma função $f \in \widetilde{L}^1(\mu)$. Então

$$\left|\int_X f \; d\mu\right| \leqslant \int_X |f| \; d\mu.$$

Demonstração. Utilizando-se da desigualdade triangular e que $\displaystyle\int_X f^+ \; d\mu, \int_X f^- \; d\mu < \infty$, basta notar que

$$\begin{aligned}
\left|\int_X f\ d\mu\right| &= \left|\int_X f^+\ d\mu - \int_X f^-\ d\mu\right| \\
&\leqslant \left|\int_X f^+\ d\mu\right| + \left|\int_X f^-\ d\mu\right| \\
&= \int_X f^+\ d\mu + \int_X f^-\ d\mu \\
&= \int_X (f^+ + f^-)\ d\mu \\
&= \int_X |f|\ d\mu.
\end{aligned}$$

□

3.5 Integração de Funções Mensuráveis Complexas

Nesta última seção, vamos apresentar o conceito de integral para funções mensuráveis complexas, bem como enunciar algumas de suas principais propriedades aritméticas. Inclusive, enunciaremos e demonstraremos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que aborda a passagem do limite sob o sinal da integral.

Definição 3.5.1. Seja $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida. Os elementos do conjunto

$$L^1(\mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } \int_X |f|\ d\mu < \infty \right\}$$

são chamados de *funções integráveis à Lebesgue* ou *funções somáveis*.

Observação 3.5.1. É evidente que $\widetilde{L}^1(\mu) \subset L^1(\mu)$.

Definição 3.5.2. Seja $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida. Considerando a função complexa $f = u + iv$, onde u e v são funções mensuráveis reais em X, e $f \in L^1(\mu)$; fica posto que a *Integral de Lebesgue da função f sobre o conjunto mensurável E em relação à medida μ* é:

$$\int_E f\ d\mu = \int_E u\ d\mu + i \int_E v\ d\mu,$$

ou melhor,

$$\int_E f\ d\mu = \int_E u^+\ d\mu - \int_E u^-\ d\mu + i \int_E v^+\ d\mu - i \int_E v^-\ d\mu.$$

Proposição 3.5.1. Seja $f \in L^1(\mu)$. Dado o número $i \in \mathbb{C}$, então $if \in L^1(\mu)$ e

$$\int_X if\ d\mu = i \int_X f\ d\mu.$$

Demonstração. Repare que

$$\int_X |if|\ d\mu = \int_E |i||f|\ d\mu = \int_X |f|\ d\mu < \infty.$$

Logo, $if \in L^1(\mu)$.

Escrevendo $f = u + iv$, veja que

$$\begin{aligned}
\int_X if \, d\mu &= \int_X i(u+iv) \, d\mu \\
&= \int_X (-v + iu) \, d\mu \\
&= \int_X -v \, d\mu + i \int_X u \, d\mu \\
&= -\int_X v \, d\mu + i \int_X u \, d\mu \\
&= i \left(\int_X u \, d\mu + i \int_X v \, d\mu \right) \\
&= i \int_X f \, d\mu.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.5.1. Sejam $f, g \in L^1(\mu)$ funções complexas. Considere ainda $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Então $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$ e

$$\int_X (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu.$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned}
\int_X |\alpha f + \beta g| \, d\mu &\leqslant \int_X (|\alpha||f| + |\beta||g|) \, d\mu \\
&= |\alpha| \int_X |f| \, d\mu + |\beta| \int_X |g| \, d\mu \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Logo, $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$.

Já a igualdade estabelecida no resultado decorre da combinação do Teorema 3.4.1 e a Proposição 3.5.1 quando escrevê-se os números complexos e funções complexas na sua forma algébrica. □

Teorema 3.5.2. Se $f \in L^1(\mu)$, então

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leqslant \int_X |f| \, d\mu.$$

Demonstração. Ponha

$$z = \int_X f \, d\mu.$$

Como z é um número complexo, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ e $\alpha z = |z|$. Com isso,

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| = \alpha \int_X f \, d\mu = \int_X \alpha f \, d\mu.$$

Veja acima que $\int_X \alpha f \, d\mu$ é um número real, logo as integrais da parte imaginária ou são ambas nulas ou elas se anulam. Sendo assim, se u é a parte real de αf, tem-se

$$\int_X \alpha f \, d\mu = \int_X u \, d\mu.$$

Além disso, $u \leqslant |\alpha f| = |\alpha||f| = |f|$. Então,

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leqslant \int_X |f| \, d\mu.$$

□

Para finalizarmos, o próximo resultado abordará novamente a passagem do limite sob o sinal da integral, mas para funções complexas mensuráveis.

Teorema 3.5.3 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis de X em $\mathbb{C}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Se existe $g : X \to [0, \infty]$ uma função mensurável tal que

$$\int_X g \, d\mu < \infty$$

e $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$, então $f \in L^1(\mu)$ e

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n \, d\mu \right) = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) \, d\mu.$$

Demonstração. Segue abaixo.

Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções mensuráveis de X em $\mathbb{C}$ tais que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, segue que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sup f_n(x)$ é mensurável por conta do Teorema 2.3.4. Além disso, por hipótese, $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$ donde

$$|f(x)| = \left| \lim_{n\to\infty} f_n(x) \right| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leqslant \lim_{n\to\infty} g(x) = g(x), \forall x \in X.$$

Logo,

$$\int_X |f| \, d\mu \leqslant \int_X g \, d\mu < \infty.$$

Assim, $f \in L^1(\mu)$.

Considere agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $h_n = 2g - |f_n - f|$ mensurável. Repare que h_n é não-negativa. Com efeito, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x)| + |f(x)| \leqslant 2g(x)$ donde $0 \leqslant 2g(x) - |f_n(x) - f(x)| = h_n(x)$ para $x \in X$ qualquer.

Pelo Lema de Fatou,

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} \inf h_n \right) \, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf \int_X h_n \, d\mu. \tag{3.3}$$

<u>*Afirmação*</u>: $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = 2g(x)$ para todo $x \in X$.

De fato, dado $x \in X$ qualquer, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}[f_n(x) - f(x)] = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Além disso, $\lim\limits_{n\to\infty} 2g(x) = 2g(x)$. Com isso,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} h_n(x) &= \lim_{n\to\infty} [2g(x) - |f_n(x) - f(x)|] \\ &= \lim_{n\to\infty} 2g(x) - \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| \\ &= 2g(x).\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf h_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup h_n$, decorre que $\lim\limits_{n\to\infty} \inf h_n = 2g$.

Retornando a Desigualdade 3.3, vê-se que

$$\begin{aligned}\int_X 2g\ d\mu &\leqslant \lim_{n\to\infty} \inf \int_X (2g - |f_n - f|)\ d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \inf \left(\int_X 2g\ d\mu - \int_X |f_n - f|\ d\mu\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \inf \int_X 2g\ d\mu + \lim_{n\to\infty} \inf \left(-\int_X |f_n - f|\ d\mu\right) \\ &= \int_X 2g\ d\mu - \lim_{n\to\infty} \sup \int_X |f_n - f|\ d\mu.\end{aligned}$$

Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \int_X |f_n - f|\ d\mu \leqslant 0$.

Por outro lado, sabe-se que $|f_n - f| \geqslant 0$ e assim $\int_X |f_n - f|\ d\mu \geqslant 0$ donde $\sup \int_X |f_n - f|\ d\mu \geqslant 0$. Por conseguinte, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \int_X |f_n - f|\ d\mu \geqslant 0$.

Dessa forma, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \int_X |f_n - f|\ d\mu = 0$. De maneira análoga ao que fora feito anteriormente, $\lim\limits_{n\to\infty} \inf \int_X |f_n - f|\ d\mu = 0$. Sendo assim, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\ d\mu = 0$.

Como $\left|\int_X (f_n - f)\ d\mu\right| \leqslant \int_X |f_n - f|\ d\mu$, tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\int_X (f_n - f)\ d\mu\right| \leqslant 0.$$

De outra forma,

$$\left|\int_X (f_n - f)\ d\mu\right| \geqslant 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\int_X (f_n - f)\ d\mu\right| \geqslant 0.$$

Sendo assim, $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\int_X (f_n - f)\ d\mu\right| = 0$.

Para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}n > n_0 \quad &\Longrightarrow \quad \left|\left|\int_X (f_n - f)\ d\mu\right|\right| = \left|\int_X (f_n - f)\ d\mu\right| < \epsilon \\ &\Longrightarrow \quad \left|\int_X f_n\ d\mu - \int_X f\ d\mu\right| < \epsilon.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n \; d\mu\right) = \int_X f \; d\mu,$$

ou melhor,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n \; d\mu\right) = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \; d\mu.$$

□

Comentário 3.5.1. Se compararmos os Teoremas 3.5.3 e 1.4.6, que possuem a mesma conclusão — a passagem do limite sob o sinal da integral — veremos a segunda divergência entre as Integrais de Riemann e Lebesgue. O Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue exige no mínimo que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções mensuráveis seja dominada por uma função não-negativa mensurável e convirja pontualmente para f diferentemente do Teorema 1.4.6, o qual requisita impreterivelmente que a sequência de funções convirja uniformemente para f.

4 Considerações Finais

O conceito de integral, como observou-se durante a introdução desse trabalho, foi historicamente desenvolvido sobre a perspectiva de ser a operação inversa da diferenciação à menos da constante de integração e para o cálculo de áreas abaixo da curva de funções. Dentre as Teorias de Integração que vigoraram, destacam-se as Integrais de Riemann, desenvolvida por Benhard Riemann, e de Lebesgue, formalizada por Henri Lebesgue.

> A integral de Riemann foi inteiramente satisfatória enquanto se tratava de funções contínuas. Durante o século XIX, porém, o estudo das séries trigonométricas passou a exigir uma teoria melhor comportada no limite de séries de funções integráveis. (ISNARD, 2018, p. 1).

Observou-se que a Integral de Lebesgue é a teoria que vem solucionar esse problema da Integral de Riemann, pois, ainda de acordo com ISNARD (2018), para funções mensuráveis $f_n \geqslant 0$ vale a igualdade

$$\int_{[a,b]} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[a,b]} f_n \; d\mu,$$

porém a integral da esquerda, quando considerada a Integral de Riemann, pode não estar bem definida!

Fica claro, todavia, que as integrais de Riemann e de Lebesgue possuem semelhanças em relação as propriedades aritméticas como aditividade e homogeneidade, por exemplo. Em outros aspectos, no entanto, elas diferem enormemente além daquela diferença mencionada anteriormente — a título de conhecimento, a existência do valor da integral para certas funções e os teoremas que versam sobre a passagem do limite sob o sinal da integral (Teorema da Convergência Monótona e Teorema da Convergência Dominada).

A Função de Dirichlet, por exemplo, é uma das funções que não é integrável a Riemann, mas é Lebesgue integrável. Essa função não é Riemann integrável, pois seu conjunto de pontos de descontinuidade não tem medida nula, afinal, ela é descontínua em todos os pontos do seu domínio que, por sua vez, é um conjunto que não tem medida nula.

Em relação aos teoremas de convergência envolvendo o conceito de integral, vê-se outra diferença entre as Integrais de Riemann e de Lebesgue. Enquanto a Integral de Riemann exige que a sequência f_n de funções convirja uniformemente para a função f para que se possa realizar a passagem do limite sob o sinal da integral, a Integral de Lebesgue requer apenas a monotocidade da sequência e a convergência pontual para f

(Teorema da Convergência Monótona) ou que a sequência seja dominada por uma função não-negativa e convirja pontualmente para f (Teorema da Convergência Dominada).

Em virtude dessas semelhanças e diferenças vistas em relação à ambas as integrais, vê-se que a Integral de Lebesgue acaba por ser mais eficiente que a Integral de Riemann, já que permite a integração de mais funções. Inclusive, ela acaba permitindo resultados poderosos acerca de convergência exigindo o mínimo de hipóteses (ou hipóteses não muito fortes).

Posto isso tudo, podemos afirmar que o objetivo principal desse trabalho – discutir acerca das Teorias de Integração (Integral de Riemann e Integral de Lebesgue) – foi alcançado, assim como os objetivos específicos: introduzir de forma clara a Teoria de Integração (Integral de Riemann e a Integral de Lebesgue); exibir um exemplo de função que não é integrável à Riemann, mas é à Lebesgue; demonstrar os resultados fundamentais ligados a Integral de Riemann e a Integral de Lebesgue; verificar a importância das hipóteses dos resultados fundamentais das teorias de integração; e ressaltar as principais comparações entre a Integral de Riemann e a Integral de Lebesgue.

Referências

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo*. 10ª. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. v. 1. Citado 3 vezes nas páginas 10, 11 e 14.

AXLER, S. *Measure, Integration & Real Analysis*. 1ª. ed. Gewerbestrasse: Springer Open, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 14, 41 e 72.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. 3ª. ed. São Paulo: Blucher, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

DOERING, C. I. *Introdução à Análise Matemática na Reta*. 3ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 11, 12 e 14.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 5ª. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. Citado na página 14.

ISNARD, C. *Introdução à medida e integração*. 3ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. Citado na página 110.

LIMA, E. L. *Análise Real, vol. 1: Funções de uma Variável*. 12ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. v. 1. Citado 4 vezes nas páginas 14, 33, 36 e 37.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 15ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

MIRANDA, D.; GRISI, R. *Pobabilidade*. São Paulo: UFABC, 2022. Citado na página 41.

ORTEGA-GARCIA, S. C. *Integrale, Longueur, Aire de Henri Lebesgue*. Tese (Doutorado) — Universide Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Curso de Pósgraduação em Educação Matemática, Rio Claro (São Paulo), 2015. Citado na página 72.

RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. 3ª. ed. Singapore: McGraw-Hili Book Co., 1987. Citado 3 vezes nas páginas 41, 66 e 72.

TAYLOR, A. E. *General theory of functions and Integration*. 2ª. ed. Waltham, Massachusetts: Dover, 1966. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 72.

ZAHN, M. *Análise Real*. 1ª. ed. São Paulo: Blucher, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.