

Rafael Melo Bueno Jardim

Movimentos com o Cubo Mágico: Um Olhar Matemático sobre as Teorias de Álgebra e Grafos

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Fevereiro, 2025

Rafael Melo Bueno Jardim

Movimentos com o Cubo Mágico: Um Olhar Matemático sobre as Teorias de Álgebra e Grafos

Trabalho de Conclusão de Curso, Matemática Aplicada Bacharelado submetido por Rafael Melo Bueno Jardim junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande .

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Matemática Aplicada Bacharelado

Orientador: Prof. Dr. Adilson da Silva Nunes

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Fevereiro, 2025

Rafael Melo Bueno Jardim

Movimentos com o Cubo Mágico: Um Olhar Matemático sobre as Teorias de Álgebra e Grafos

Trabalho de Conclusão de Curso, Matemática Aplicada Bacharelado submetido por Rafael Melo Bueno Jardim junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande .

Trabalho aprovado. Rio Grande, 12 de fevereiro de 2025

Prof. Dr. Adilson da Silva Nunes
(Orientador - FURG)

**Prof. Dra. Catia Maria dos Santos
Machado**
(Avaliador - FURG)

**Prof. Dra. Juliana da Silva Ricardo
Nunes**
(Avaliador - FURG)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Fevereiro, 2025

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a minha família, principalmente minha mãe e meu pai que sempre me apoiaram em toda minha vida.

Gostaria de agradecer também meu Orientador Adilson Nunes por ter me auxiliado em todo o trabalho de conclusão de curso.

Agradeço também a professora Cátia Machado, nessa reta final ela me auxiliou em toda parte de Teoria de Grafos.

Agradecer também a todos meus amigos que me acompanharam ao longo da minha trajetória acadêmica, principalmente ao Dener Matos e o Guilherme Ávila. Minha frase e do Dener ao longo do curso foi "Entramos juntos, sairemos juntos".

Resumo

Este trabalho tem como objetivo mostrar como a Matemática está intrinsecamente ligada ao cubo mágico. De que forma, conteúdos de Geometria, Álgebra e Teoria dos Grafos podem ser explorados a partir da observação dos movimentos efetuados com o cubo. Na Geometria, utilizando o software Octave, a possibilidade de plotar o cubo para visualizar área, volume, vértices, arestas e faces, facilitando a compreensão sobre as características das figuras planas e geométricas. Na Álgebra e Teoria dos Grafos, os movimentos do cubo relacionados com definições, conceitos e propriedades matemáticas. O problema de montar um cubo mágico é combinatorial e existem infinitas maneiras. No entanto, nesse trabalho é apresentada uma maneira, utilizada por iniciantes, constituída de 8 passos. Uma contribuição interessante do trabalho é o algoritmo de Dijkstra, utilizado para resolver o problema de caminhos mínimos, aplicado diretamente no grafo de movimentos, para compor a primeira camada do cubo, a flor branca com centro amarelo, mostrando a estreita relação dos movimentos do cubo associados a resolução de problemas combinatoriais do mundo real.

Palavras-chaves: Cubo Mágico; Álgebra; Geometria; Grafos

Abstract

This work aims to show how Mathematics is intrinsically linked to the magic cube. In what way, contents of Geometry, Algebra and Graph Theory can be explored by observing the movements made with the cube. In Geometry, using Octave software, the possibility of plotting the cube to visualize area, volume, vertices, edges and faces, facilitating understanding of the characteristics of flat and geometric figures. In Algebra and Graph Theory, the movements of the cube related to mathematical definitions, concepts and properties. The problem of Assembling a Rubik's Cube is combinatorial and there are infinite ways. However, in this work is presented in a way, used by beginners, presented in 8 steps. An interesting contribution of the work is the Dijkstra algorithm, used to solve see the shortest path problem, applied directly to the motion graph, to compose the first layer of the cube, the white flower with a yellow center, showing the close relationship of cube movements associated with solving combinatorial problems of the real world.

Keywords: Magic Cube; Algebra; Geometry; Graphs.

Sumário

	Introdução	7
1	OBJETIVOS	9
1.1	Objetivos Gerais	9
1.2	Objetivos Específicos	9
2	METODOLOGIA	10
2.1	O número de combinações do cubo mágico	10
2.2	Método de resolução do cubo mágico	11
2.3	Algoritmos do cubo mágico	21
3	FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA	23
3.1	Definição de cubo	23
3.2	Vértices, arestas e faces de um cubo	23
3.3	Área e volume do cubo	24
3.4	Software Octave	25
3.5	Conceitos de Álgebra	26
3.6	Teoria de Grafos	33
4	APLICAÇÕES DE ÁLGEBRA NO CUBO MÁGICO	38
4.1	Teoria de grupo no cubo mágico	38
4.2	Tábua de Alguns Movimentos do Cubo Mágico	41
5	APLICAÇÕES DE TEORIA DE GRAFOS NO CUBO MÁGICO	45
5.1	Explorando os Movimentos do Cubo Mágico com a Teoria dos Grafos	45
5.2	O Problema de Caminhos Mínimos e o Algoritmo de Dijkstra	48
5.3	A Estreita relação do Problema dos Caminhos Mínimos com o Movimento com o Cubo Mágico	49
6	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	58
	REFERÊNCIAS	59

Introdução

Atualmente, cubos mágicos são objetos de estudos nas mais variadas áreas do conhecimento. Na neurociência, estudos indicam que a resolução de um cubo mágico traz benefícios significativos para o aprendizado, raciocínio lógico e concentração. Essa atividade, estimula a região pré-frontal do cérebro, que é crucial para a interpretação de textos, planejamento e aprendizado por tentativa e erro. Organizar as cores do cubo pode proporcionar alívio de estresse, tornando essa prática não apenas educativa, mas também terapêutica, um recurso valioso no desenvolvimento cognativo e emocional.

Na engenharia, o mecanismo impressionante de movimentação de todas as faces de um cubo mágico, onde é possível mudar praticamente a posição de todas as peças, e mesmo assim o formato cúbico ser mantido. Esse mecanismo composto por diferentes tipos de peças que se encaixam perfeitamente para possibilitar o movimento, serve de inspiração para diversos outros sistemas mecânicos ao redor do mundo.

Na robótica, e no desenvolvimento de robôs em geral, é possível construir uma máquina capaz de resolver o cubo mágico envolvendo estudos de diferentes ramos da robótica visto que há a necessidade de se desenvolver toda a parte do seu mecanismo, implementação e controle de motores, reconhecimento das faces do cubo e até além como possibilidade de implementar inteligências artificiais nesses sistemas, tomando todo o estudo muito mais complexo, porém extremamente proveitoso e interessante.

Nesse contexto, na Matemática Aplicada, o trabalho proposto tem como objetivo geral é explorar com o cubo mágico definições e conceitos de álgebra e teoria de grafos, além de mostrar a estreita relação dos movimentos com o cubo mágico e as teorias matemáticas, explorar problemas combinatoriais do mundo real.

Segundo (Angelo Zanona Neto, 2024) o cubo de Rubik, também chamado de cubo mágico, foi criado em 1974 pelo professor húngaro Ernő Rubik. O propósito inicial do cubo era ajudar os alunos de arquitetura a entender problemas tridimensionais, mas logo o quebra-cabeça se tornou uma verdadeira febre, conquistando as lojas de brinquedo dos anos 1980.

Além de ser um dos brinquedos mais vendidos da história, com mais de 400 milhões de unidades comercializadas, o cubo de Rubik possui diversas características que ocuparam e seguem ocupando a mente dos matemáticos. A primeira é o número de em-

baralhamentos possíveis, que é de 43 quintilhões. A título de comparação, se houvesse um cubo com cada embaralhamento possível na Terra, nosso planeta estaria encoberto por um mar de cubos mágicos com 15 km de profundidade.

No capítulo 1, foram propostos os objetivos deste trabalho, no qual seria trazer conceitos e definições da Teoria de Álgebra e Grafos aplicadas no cubo mágico.

No capítulo 3, foi ilustrado toda a fundamentação matemática presente no trabalho, definições e conceitos geométricos e algébricos e também a Teoria dos Grafos. Também foi utilizado o Software Octave como uma ferramenta de auxílio.

No capítulo 4, foram discutida as aplicações envolvendo o cubo mágico com Conceitos de Álgebra

No capítulo 5, analisamos as aplicações envolvendo o cubo mágico com a Teoria dos Grafos

No capítulo 6, apresentamos as conclusões finais deste trabalho e possíveis trabalhos futuros.

1 Objetivos

1.1 Objetivos Gerais

O objetivo geral desse trabalho foi explorar os conceitos de Álgebra e da Teoria de Grafos que estão diretamente ligados aos movimentos executados com o cubo mágico.

1.2 Objetivos Específicos

- Utilizar um aplicativo livre para mostrar o cubo mágico em programa matemático
- Analisar como são executados os movimentos do cubo mágico e o algoritmo de resolução
- Exibir a relação dos movimentos executados com grupos simétricos
- Mostrar a execução dos movimentos realizados manualmente e computacionalmente
- Apresentar a relação dos movimentos do cubo mágico com a Teoria dos Grafos
- Expor a estreita relação dos movimentos com o problema de caminhos mínimos
- Analisar como o algoritmo de Dijkstra pode ser executado no grafo de movimentos com o cubo mágico

2 Metodologia

2.1 O número de combinações do cubo mágico

O cubo mágico tem mais de 43 quintilhões de movimentos possíveis a se fazer, pode-se mover para frente, para trás, para um lado, para o outro, ou seja, inúmeros movimentos. Além disso, o cubo tem 6 faces, logo são divididas em 6 cores, sendo branco, amarelo, azul, laranja, verde e vermelho.

No cubo, existem 12 peças de meio, independente de onde estão as cores, temos 12 possibilidades para movê-las, se fixarmos uma peça de meio, as outras teriam 11 possibilidades para mover-se, se fixarmos mais uma, teríamos 10 possibilidades e assim por diante. Então, neste caso teríamos 12!

Já nas peças de canto, existem 8 peças de canto e seria o mesmo esquema das peças de meio, se fixarmos uma peça de canto, as outras peças teriam 7 possibilidades para mover-se. Então temos 8!

Agora analisando a orientação das peças de meio, como elas carregam 2 cores e existem 12 possibilidades para mover, teríamos 2^{12} , mas se orientarmos todos meios com as cores certas, não iria existir um algoritmo para orientar apenas 1 peça de meio sem bagunçar as outras partes, ficaríamos com 11 possibilidades ao invés de 12, então teríamos 2^{11} .

Da mesma forma analisando as orientações de peças de canto, cada peça de canto leva 3 cores com ela e são 8 peças de canto, ficaríamos com 3^8 , mas se orientarmos todos os brancos virados para cima e tentar orientar os amarelos, terá uma peça amarela que não será orientada e não existe um algoritmo para isso. Então teríamos 7 possibilidades, ou seja, 3^7 .

Outro caso impossível é uma permutação de 2 peças, precisar trocar 2 peças de lugar sem alterar as outras, metade das vezes isso acontece, então dividimos por 2.

Juntando todas essas informações que obtemos, a partir das análises feitas, para conseguirmos o número mágico de combinações possíveis a se fazer no cubo mágico, temos

a seguinte equação:

$$\frac{8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 4.3252 \cdot 10^{19}$$

A cada movimento no cubo, existem letras específicas, como R', R, L', L, F', F, B', B, D', D, U', U (os movimentos que tem apóstrofo, são os movimentos inversos de cada letra) para nos auxiliar o nome de cada movimento, ou seja, a rotação que a cada letra indicada, vejamos na Figura 1:

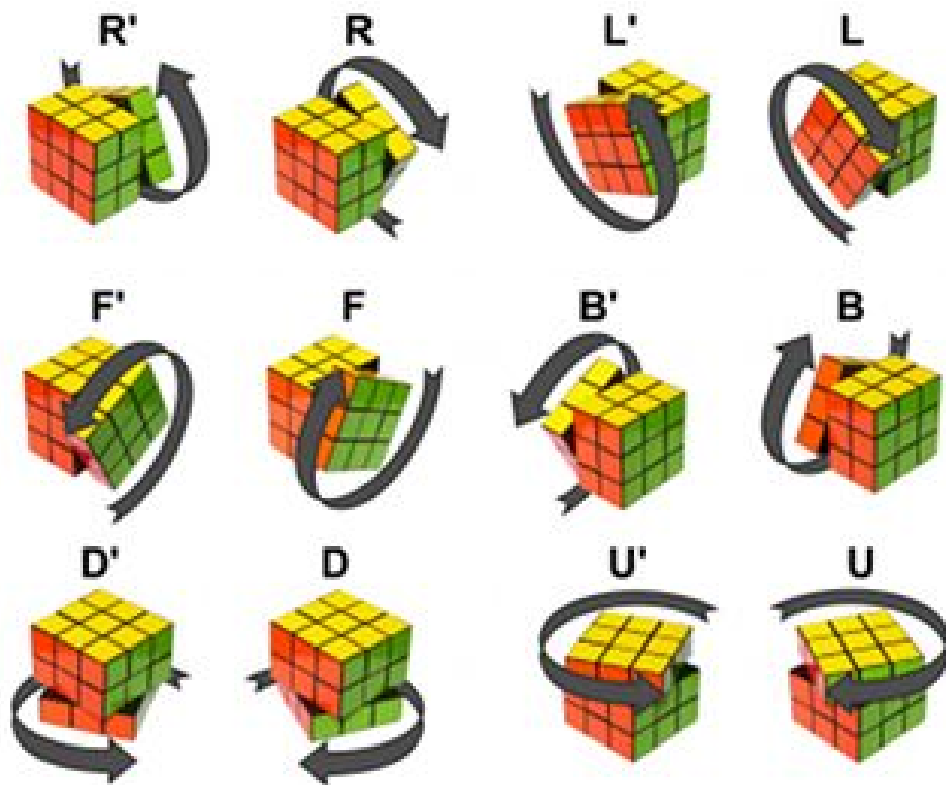


Figura 1 – Nome dos movimentos do cubo

Fonte: <https://dan-scientia.blogspot.com/2011/02/os-movimentos-no-cubo-magico.html>

2.2 Método de resolução do cubo mágico

Agora neste tópico, iremos mostrar o método de resolução do cubo mágico de Rubik para o caso 3x3. Existem alguns passos iniciais para aprender a montar o cubo mágico 3x3. Neste caso, utilizamos o método dos 8 passos para montar o cubo mágico. Todo cubo mágico embaralhado aleatoriamente, veio de uma solução na qual foi completado, ou seja, pegamos o cubo mágico pronto e fazemos movimentos aleatoriamente.

Vale ressaltar que esse método dos 8 passos não é o único existente para a resolução, há diversas maneiras para resolver o cubo mágico. O mais convencional foi esse

proposto no trabalho, no qual também é um dos mais simples para aprender, depois de várias tentativas, acertos e erros, o cérebro começa a adaptar-se ao algoritmo implementado, ficando mais clara e com o passar do tempo, as pessoas decoram os 8 passos.

Podemos ver abaixo, em algumas ocasiões, não necessariamente concluímos em 8 passos, pois quando estamos resolvendo o cubo mágico, de vez em quando pode acontecer de não precisar utilizar determinado passo, pois após o término de algum passo, pode ser que automaticamente o próximo passo já esteja concluído.

Primeiro Passo:

Na primeira parte, deixando o centro da cor amarela virada para cima e utilizando alguns movimentos para colocar a flor branca em volta do centro amarelo.

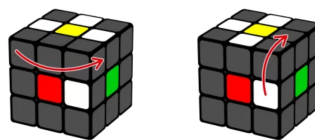


Figura 2 – Movimento U'R'

Fonte: <https://cubovelocidade.com.br/tutorial/formulas-metodo-basico-resolver-montar-cubo-magico-3x3x3/>

Iremos aplicar os movimentos da Figura 2 (U'R'), analisando o cubo para obtermos o Primeiro Passo concluído, como mostra a Figura 3:



Figura 3 – Primeiro Passo

Fonte: <https://cubovelocidade.com.br/tutorial/formulas-metodo-basico-resolver-montar-cubo-magico-3x3x3/>

Segundo Passo:

Após concluirmos o Primeiro Passo, conseguimos analisar pela flor branca cada cor que está junta com cada peça branca, conectando essa cor com o centro de mesma cor específica, após isso conectarmos as cores, iremos mandar essas peças para baixo (RR), faremos esse movimento 4 vezes, pois temos 4 peças brancas no topo, como mostra a Figura 4.

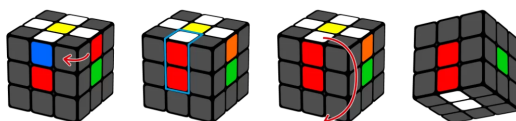


Figura 4 – Finalizando o Segundo Passo

Fonte: <https://cubovelocidade.com.br/tutorial/formulas-metodo-basico-resolver-montar-cubo-magico-3x3x3/>

Após finalizarmos estes movimentos com as 4 peças brancas, colocando elas para baixo, com as cores de meio alinhadas com a cor que tem junta da peça branca, ficamos com o cubo desta forma como mostra a Figura 5:

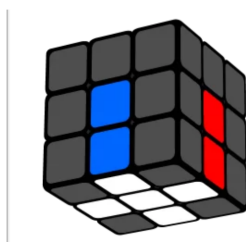


Figura 5 – Segundo Passo

Fonte: <https://cubovelocidade.com.br/tutorial/formulas-metodo-basico-resolver-montar-cubo-magico-3x3x3/>

Terceiro Passo:

Após concluirmos o Segundo Passo, ficamos com a flor branca apontada para baixo conectando com o centro da cor branca, agora nosso próximo objetivo é completar toda a parte branca que está em baixo, sendo assim, temos a seguinte situação dos 3 casos, no qual seriam quando uma das peças brancas está na fileira de baixo, ou estando na fileira de cima, ou estando no topo do cubo, como mostra a Figura 6:



Figura 6 – Os 3 casos

Fonte: <https://cubovelocidade.com.br/tutorial/formulas-metodo-basico-resolver-montar-cubo-magico-3x3x3/>

- **Caso 1:** O caso 1 é o mais simples, deixamos apontado a peça branca que está na fileira de cima para o lado direito e fazemos os seguintes movimentos: $R'U R U'$.
- **Caso 2:** No caso 2, quando a peça branca está no topo do cubo, iremos repetir 3 vezes o que fizemos no caso 1, ou seja, fazer $(R'URU')^3$.
- **Caso 3:** No caso 3, quando a peça branca está na primeira fileira, iremos fazer os seguintes movimentos: $R' U R$, após isso, conseguimos retornar ao caso 1 e aplicamos a fórmula do caso 1.

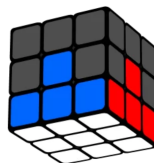


Figura 7 – Terceiro Passo

Fonte: <https://cubovelocidade.com.br/tutorial/formulas-metodo-basico-resolver-montar-cubo-magico-3x3x3/>

Quarto Passo:

Após completarmos o Terceiro Passo, nosso objetivo é completar toda a fileira do meio, ou seja, a fileira de baixo e a fileira do meio será preenchida com suas cores, respectivamente, na Figura 8 mostramos o que se deve fazer para completar o Quarto Passo.



Figura 8 – Finalizando o Quarto Passo

Fonte: <https://cubovelocidade.com.br/tutorial/formulas-metodo-basico-resolver-montar-cubo-magico-3x3x3/>

Após concluirmos todos estes movimentos, para as cores azul, vermelho, verde e laranja, ficamos com a primeira fileira e a segunda fileira completada com as suas respectivas cores corretamente e em baixo ainda ficamos com as cores brancas completadas, a Figura 9 mostra como ficamos com o cubo mágico após a finalização do Quarto Passo.

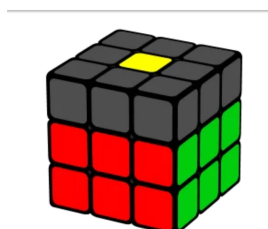


Figura 9 – Quarto Passo

Fonte: <https://cubovelocidade.com.br/tutorial/formulas-metodo-basico-resolver-montar-cubo-magico-3x3x3/>

Quinto Passo

Após concluirmos o Quarto Passo, nosso objetivo agora é formar uma flor amarela no topo. Existem possibilidades de após realizarmos o Quarto Passo, o Quinto Passo já estar completo com a flor amarela no topo, mas iremos explorar os casos que podem acontecer.

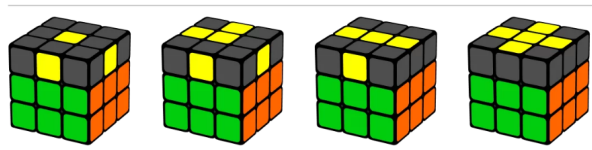


Figura 10 – Casos do Quinto Passo

Fonte: <https://cubovelocidade.com.br/tutorial/formulas-metodo-basico-resolver-montar-cubo-magico-3x3x3/>

Para realizarmos a flor amarela, os movimentos que devem ser feitos são: $F R' U R U' F'$ nos seguintes casos:

- **Caso 1:** Se estivermos com só o meio amarelo no centro, ou seja, sem amarelo nas partes que seriam da flor amarela, iremos realizar os movimentos mostrados acima 3 vezes, ou seja, iremos fazer $(F R' U R U' F')^3$.
- **Caso 2:** Se estivermos com o L invertido no topo, iremos realizar o passo mostrado acima 2 vezes, ou seja, iremos fazer $(F R' U R U' F')^2$.
- **Caso 3:** Se estivermos com uma linha amarela na diagonal, iremos realizar o passo mostrado acima apenas 1 vez, ou seja, faremos $(F R' U R U' F')$.
- **Caso 4:** Se já estivermos com a cruz amarela feita, automaticamente avançamos para o Sexto Passo.

Sexto Passo

Após finalizarmos o Quinto Passo, nosso objetivo agora é completar toda a parte amarela do topo. Para isso, vejamos as seguintes situações que os amarelos podem estar, como mostra a Figura 11.



Figura 11 – Casos do Sexto Passo

Fonte: <https://cubovelocidade.com.br/tutorial/formulas-metodo-basico-resolver-montar-cubo-magico-3x3x3/>

Os movimentos que devem ser feitos são $R'U R U R' U'U'R$ (repetição até completar o topo completo de amarelo). Essas repetições podem ser feitas em até 3 vezes, em alguma das 3 repetições, conseguimos completar o topo de cor amarela. Sendo assim, ficamos com o Sexto Passo concluído, como mostra a Figura 12:



Figura 12 – Sexto Passo

Fonte: <https://cubovelocidade.com.br/tutorial/formulas-metodo-basico-resolver-montar-cubo-magico-3x3x3/>

Sétimo Passo

Após concluirmos o Sexto Passo, nosso objetivo agora é colocar todos os cantos da fileira de cima da mesma cor, ou seja, iremos verificar o cubo e analisar somente os cantos da fileira de cima não estão com as mesmas cores, como mostra a Figura 13.

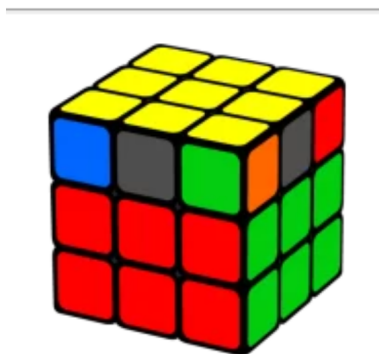


Figura 13 – Finalizando o Sétimo Passo

Fonte: <https://cubovelocidade.com.br/tutorial/formulas-metodo-basico-resolver-montar-cubo-magico-3x3x3/>

Para isso, precisamos dos seguintes movimentos: Deixamos a parte amarela apontada para quem está montando e aplicamos os movimentos $R'U'R'D'D'R$ U $R'D'D'R'R'$ em 2 casos:

- **Primeiro caso:** Se já estivermos com uma parte em que as cores já estejam certas, ou seja, os cantos da fileira de cima estão com a mesma cor, então colocamos para baixo e a parte amarela do topo apontada para quem está montando e aplicamos os movimentos acima.
- **Segundo caso:** Se não tivermos nenhuma parte correta, ou seja, todas as cores dos cantos da fileira de cima não estão da mesma cor, escolhemos qualquer uma das cores (azul, vermelho, laranja, verde) e aplicamos o passo mostrado acima, após isso, iremos cair no primeiro caso e iremos aplicar o que vimos do primeiro caso.



Figura 14 – Sétimo Passo

Fonte: <https://cubovelocidade.com.br/tutorial/formulas-metodo-basico-resolver-montar-cubo-magico-3x3x3/>

Oitavo Passo

Após concluirmos o Sétimo Passo, iremos para o último passo, que é a conclusão do cubo mágico. Existem 2 casos para se observar, no qual já podemos ter algumas das cores (azul, laranja, verde, vermelho) completadas, ou nenhuma dessas cores completadas como mostra a Figura 15:

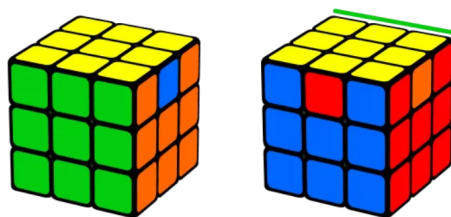


Figura 15 – Casos do Oitavo Passo

Fonte: <https://cubovelocidade.com.br/tutorial/formulas-metodo-basico-resolver-montar-cubo-magico-3x3x3/>

Os movimentos que devem ser feitos para a conclusão do Oitavo Passo são $F F U'R L F F R'L'B U'U'$.

- **Primeiro caso:** Caso tivermos uma parte completa, seja azul, ou vermelho, ou laranja, ou verde, apontamos a parte completada para frente e aplicamos os movimentos mostrados acima.
- **Segundo caso:** Caso não tivermos nenhuma parte completada de azul, ou vermelho, ou laranja, ou verde, escolhemos qualquer cor (exceto amarelo e branco) e apontamos para frente e aplicamos os movimentos mostrados acima, com isso, iremos cair no primeiro caso e é só aplicarmos o primeiro caso.



Figura 16 – Cubo montado

Fonte: <https://cubovelocidade.com.br/tutorial/formulas-metodo-basico-resolver-montar-cubo-magico-3x3x3/>

2.3 Algoritmos do cubo mágico

O método que normalmente muitas pessoas usam para resolver o cubo mágico 3x3 é o dos 8 passos que vimos anteriormente. Em média, as pessoas conseguem resolver de 70 a 120 movimentos, dependendo de como o cubo estiver. Pelo computador, as máquinas conseguem obter algoritmos que resolvem em média de 20 a 30 movimentos, sendo bem mais eficaz do que resolver manualmente.

Pelo algoritmo do computador, temos que:

S = Cubo Completado;

S^{-1} = Cubo embaralhado.

O cubo mágico é simétrico, por exemplo, vamos embaralhar aleatoriamente da seguinte maneira:

$$S^{-1} = (FLB')^{10} = FLB'FLB'FLB'FLB'FLB'FLB'FLB'FLB'FLB'FLB'$$

A partir do cubo completado, aplicamos esses algoritmos de movimentos, ficamos com o cubo mágico da seguinte maneira:

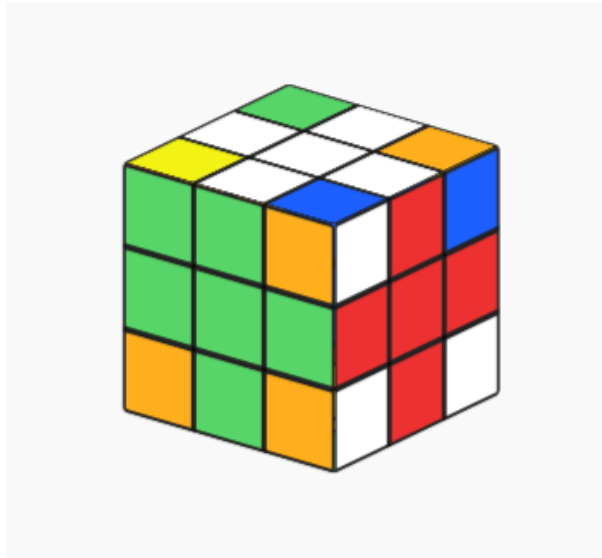


Figura 17 – Cubo Embaralhado

Fonte: <https://rubiks-cube-solver.com/pt/>

Definição 2.3.1: Transformação Linear Inversa: $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

Utilizando a Definição 1 no exemplo acima, temos que:

$$S = (FLB')^{-10} = BL'F'BL'F'BL'F'BL'F'BL'F'BL'F'BL'F'BL'F'BL'F'$$

Sendo assim, se aplicarmos estes movimentos acima no cubo mágico da Figura 17, conseguimos resolver o quebra cabeça.

Agora fica a dúvida, se por exemplo tivermos o cubo embaralhado da seguinte maneira:

$$S^{-1} = (F'L'U')^{40},$$

Só conseguiríamos resolver o cubo mágico se:

$$S = (F'L'U')^{-40}?$$

A resposta seria não. Vamos supor que no 103º movimento do cubo mágico, os algoritmos do computador encontraram alguma simetria de quando foi feito o 5º movimento, ou seja, foi encontrada uma solução em que eliminaríamos 98 movimentos, pois $103-5=98$. Continuou a fazer os movimentos finais e não encontrou simetrias. Com base nisso, teríamos uma solução que, de 120 movimentos, conseguiríamos resolver com apenas 22 movimentos, pois $120-98 = 22$.

De acordo com a Definição 1, também conseguiríamos resolver, basta aplicarmos estes movimentos:

$$S = (ULF)^{40}$$

Caso pegarmos este mesmo exemplo e tentarmos resolvemos a mão, aplicaríamos o método dos 8 passos aprendidos na seção 2.2, finalizando entre 70 a 120 movimentos.

3 Fundamentação Matemática

3.1 Definição de cubo

Na geometria, um cubo é um corpo formado por seis faces que são quadradas. A particularidade destes corpos é que todas as faces são congruentes, estão dispostas de forma paralela e aos pares, e têm quatro lados. Tendo em conta estas características, é possível situar os cubos em diversos grupos. Trata-se de sólidos platônicos, poliedros convexos, paralelepípedos, hexaedros e prismas, todas qualificações fazem referência a diferentes propriedades dos cubos. Existem numerosos objetos com forma de cubo. Entre os mais habituais destacam-se os dados usados em muitos jogos. Os dados costumam ser cubos que, em cada uma das faces, compreendem um número. Deste modo, quando alguém lança um dado, pode obter seis números diferentes: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. (CONCEITO.DE, 2014)

3.2 Vértices, arestas e faces de um cubo

Cubos são figuras tridimensionais sólidas com 6 faces, 12 arestas e 8 vértices. As faces dos cubos são quadradas e encontram quatro outras faces em ângulos retos. O cubo é o único hexaedro regular, ou seja, com seis faces iguais. Além disso, o cubo também é um dos cinco sólidos platônicos. (NEUROCHISPAS, 2024)

- **Vértices de um cubo:** Um vértice é um ponto onde dois ou mais de dois segmentos de linha se encontram. No caso de cubos, os vértices são os pontos onde três arestas se encontram. Também podemos considerar os vértices como os pontos onde três faces do cubo se encontram. Os cubos são compostos por 8 vértices.
- **Arestas de um cubo:** As arestas são segmentos de linha nos limites do cubo. As arestas unem um vértice (ponto de canto) de um cubo com outro vértice. Também podemos considerar as arestas como segmentos de linha onde duas faces do cubo se encontram. Um cubo tem um total de 12 arestas.
- **Faces de um cubo:** Uma face é qualquer uma das superfícies planas de um cubo. Os cubos são compostos por seis faces quadradas. Como um cubo é um hexaedro regular, todas as faces têm a mesma forma e a mesma área. Outra característica das faces do cubo é que cada uma encosta em até quatro outras faces e forma ângulos retos, ou seja, ângulos de 90 graus.

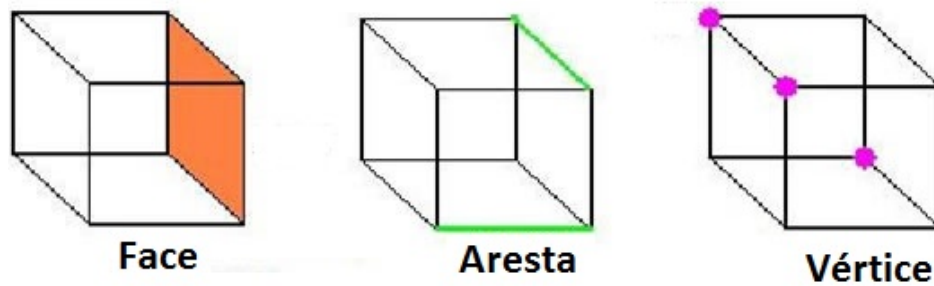


Figura 18 – Vértices, faces e arestas de um cubo

Fonte: <https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/cubo>

3.3 Área e volume do cubo

- **Área do cubo:** A área corresponde a quantidade de espaço (superfície) necessária para determinado objeto. Nesse caso, para calcular a área total do cubo, que possui 6 faces, utilizamos a seguinte fórmula:

$$At = 6a^2,$$

sendo:

$$\begin{aligned} At &= \text{Área total}, \\ a &= \text{Aresta}. \end{aligned}$$

A área lateral do cubo, ou seja, a soma das áreas dos quatro quadrados que formam esse poliedro regular, é calculada a partir da fórmula abaixo:

$$Al = 4a^2.$$

sendo:

$$\begin{aligned} Al &= \text{Área Lateral}, \\ a &= \text{Aresta}. \end{aligned}$$

Além disso, é possível calcular a área da base do cubo, dada pela fórmula:

$$Ab = a^2.$$

sendo:

$$\begin{aligned} Ab &= \text{Área da base}, \\ a &= \text{Aresta}. \end{aligned}$$

Volume do cubo: Para calcular o volume do cubo, é necessário conhecer a medida da sua aresta. O volume do cubo é calculado pela fórmula:

$$V = a^3.$$

A unidade de medida do volume do cubo, pelo sistema internacional de medidas, é o metro cúbico (m^3). O cubo é conhecido também como hexaedro regular por possuir seis faces, todas com arestas congruentes. (DANTE, 2016)

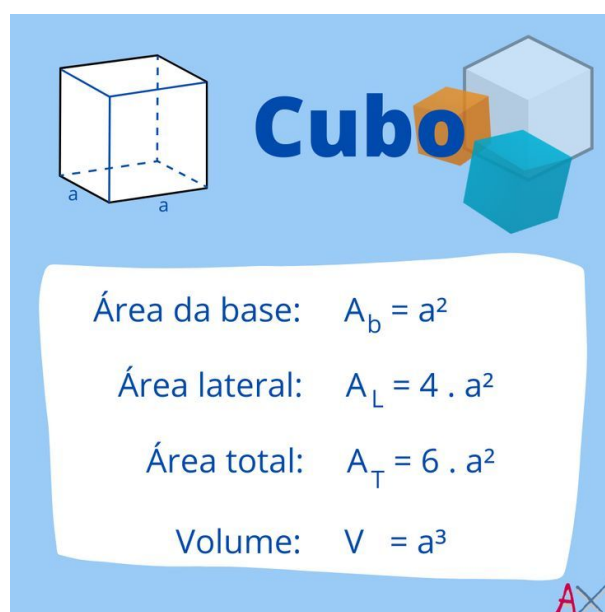


Figura 19 – Área e volume do cubo

Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/171488698305225507/>

3.4 Software Octave

No decorrer do curso de Matemática Aplicada, são aprendidos diversos programas matemáticos que são usadas como ferramentas, o Software Octave onde é possível plotar o cubo, como pode ser visto através da Figura 20. E na Figura 21, o script utilizado para obter o cubo plotado.

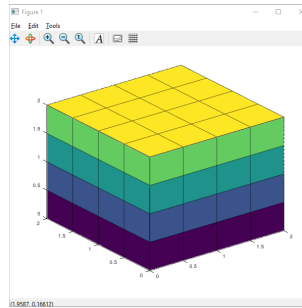


Figura 20 – Cubo plotado

Fonte: Próprio Autor

```

1 clear,clc
2 x= linspace(0,2,5);
3 y=x;
4 z=x;
5 [Mx,My]=meshgrid(x,y);
6 Mz1=zeros(size(Mx));
7 Mz2=Mz1+2;
8 surf(Mx,My,Mz1);
9 hold on
10 surf(Mx,My,Mz2);
11 [Mx,Mz]=meshgrid(x,z);
12 My1=zeros(size(Mx));
13 My2=My1+2;
14 surf(Mx,My1,Mz);
15 surf(Mx,My2,Mz);
16 [My,Mz]=meshgrid(y,z);
17 Mx1=zeros(size(My));
18 Mx2=Mx1+2;
19 surf(Mx1,My,Mz);
20 surf(Mx2,My,Mz);
21 hold off

```

Figura 21 – Script do Cubo

Fonte: Próprio Autor

3.5 Conceitos de Álgebra

Grupo

Seja G um conjunto não vazio munido de uma operação:

$$* : GXG \rightarrow G$$

$$(a, b) \mapsto a * b$$

Dizemos que $(G, *)$ é um grupo se as propriedades abaixo são válidas para quaisquer que sejam $a, b, c \in G$

- **Associatividade:** $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$
- **Elemento Neutro:** $\exists e \in G$, tal que $a * e = e * a = a, \forall a \in G$
- **Elemento Simétrico:** Para todo $a \in G$ com $a \neq e$, existe $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Um grupo é dito grupo abeliano ou comutativo se apresentar a seguinte condição de comutatividade:

- **Comutatividade:** $a * b = b * a, \forall a, b \in G$

Exemplo 3.5.1: Vamos provar que $(\mathbb{Z}, +)$ é grupo, e também provar que $(\mathbb{Z}, +)$ é abeliano. Para isso, precisamos verificar todas as propriedades de grupo. Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$, temos que:

- **Associatividade:** $(a + b) + c = a + (b + c)$, vale a propriedade de associatividade.
- **Elemento Neutro:** $\exists 0 \in \mathbb{Z}$, tal que $a + 0 = 0 + a = a$, vale a propriedade do Elemento Neutro.
- **Elemento Simétrico:** $\forall a \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$, $\exists (-a) \in \mathbb{Z}$ tal que $a + (-a) = -a + a = 0$, vale a propriedade do Elemento Simétrico.
- **Comutatividade:** $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, temos que $a + b = b + a$, vale a propriedade de comutatividade.

Portanto, $(\mathbb{Z}, +)$ além de ser grupo, é grupo abeliano

Exemplo 3.5.2: Verifique se $(\mathbb{Z}, \cdot)$ é grupo:

Dado $m \in \mathbb{Z} \setminus [-1, 1]$ não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m \cdot n = 1$. Portanto $(\mathbb{Z}, \cdot)$ não é grupo.

Grupo Finito

Um Grupo $(G, *)$ é dito finito quando o conjunto G for finito.

A ordem de G é igual a n , e é denotada por $|G| = n$.

Exemplo 3.5.3 de Grupo Finito: : Grupo dos números inteiros $\mathbb{Z}$ munidos da operação de adição.

Exemplo 3.5.4 de Grupo Finito: Grupo dos números reais $\mathbb{R}$ munidos da operação de multiplicação.

Grupo Infinito

Dizemos que o grupo G é infinito quando o conjunto G é infinito.

Exemplo 3.5.5 de Grupo Infinito: Grupo dos números inteiros não nulos $\mathbb{Z}_m$ módulo m munidos da operação de adição.

Grupo Cíclico

Um grupo G é dito cíclico se existir $x \in G$ tal que para qualquer elemento $y \in G$ tem-se:

$$y = x^n,$$

Para algum $n \in \mathbb{Z}$. Escrevemos:

$$G = \langle x \rangle = \{x^n; n \in \mathbb{Z}\}$$

E dizemos que x gera o conjunto G .

Exemplo 3.5.6: O grupo $(\mathbb{Z}_7, +)$ é cíclico. Provando:

$$\begin{aligned}\bar{5}^0 &= \bar{0} \\ \bar{5}^1 &= \bar{5} \\ \bar{5}^2 &= \bar{5} + \bar{5} = \bar{10} = \bar{3} \\ \bar{5}^3 &= \bar{3} + \bar{5} = \bar{8} = \bar{1} \\ \bar{5}^4 &= \bar{1} + \bar{5} = \bar{6} \\ \bar{5}^5 &= \bar{6} + \bar{5} = \bar{11} = \bar{4} \\ \bar{5}^6 &= \bar{4} + \bar{5} = \bar{9} = \bar{2}\end{aligned}$$

Logo, $\bar{5}$ é um gerador do grupo $\mathbb{Z}_7$, portando $(\mathbb{Z}_7, +)$ é cíclico.

Proposição 3.5.7: Todo grupo cíclico é abeliano.

Demonstração da Proposição 3.5.7: Sejam G um grupo cíclico e $a, x_1, x_2 \in G$, onde $G = \langle a \rangle$. Temos:

$$x1 = a^{n1} \text{ e } x2 = a^{n2},$$

para $n1, n2 \in G$. Logo:

$$x1.x2 = a^{n1}.a^{n2}$$

$$x1.x2 = a^{n1+n2}$$

$$x1.x2 = a^{n2+n1}$$

$$x1.x2 = a^{n2}.a^{n1}$$

$$x1.x2 = x2.x1$$

Portando, G é um grupo abeliano.

Teorema: Grupo das Permutações

Sejam S um conjunto não vazio e $G = \{f : S \rightarrow S; f \text{ é bijetiva} \}$ munido da operação

$$o: GXG \rightarrow G$$

$$(f,g) \mapsto fog$$

onde, $(fog)(x) = f(g(x))$, para $x \in S$. Tem-se (G, o) é um grupo.

Demonstração do Teorema: Grupo das Permutações: Podemos ver que o conjunto G é não vazio, pois a função identidade é dada por:

$$\text{id}: S \rightarrow S$$

$$x \mapsto \text{id}(x) = x$$

é uma função bijetiva. Logo, $\text{id} \in G$. Agora, sejam $f, g, h \in G$

Note que, para todo $x \in S$

$$\begin{aligned} [(f \circ g) \circ h] &= f \circ g(h(x)) \\ &= f(g(h(x))) \\ &= f[(g \circ h)(x)] \\ &= [f \circ (g \circ h)](x) \end{aligned}$$

Disto, segue que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Observe que:

$$\begin{aligned} f \circ \text{id}(x) &= f(\text{id}(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

De maneira análoga, id o $f(x) = f(x)$. Assim a função identidade é o elemento neutro de G .

Como f é bijetiva, então f admite função inversa, ou seja, existe $f^{-1} \in G$ tal que:

$$f \circ f^{-1} = \text{id} \text{ e } f^{-1} \circ f = \text{id}$$

Grupo Simétrico

Seja S um conjunto não vazio e seja $G = (f : S \rightarrow S \text{ tal que } f \text{ é bijetiva})$. Se $\circ$ é a operação composição de funções, isto é:

- $\circ = G \times G \rightarrow G$
- $(g, f) \mapsto g \circ f$

Então $(G, \circ)$ é um grupo tendo

- $\text{id} : S \rightarrow S$
- $x \mapsto x$

como identidade

Esse grupo é chamado de grupo das permutações do conjunto S . Se $S = \{1, 2, \dots, n\}$ denotaremos esse grupo por S_n , e temos que o número de elementos de S_n é exatamente $n!$

Subgrupos

Seja $(G, *)$ um grupo, chamaremos de subgrupo de G , um subconjunto H de G não vazio (denotaremos por $H < G$) quando com a operação de G , este subconjunto H é um grupo com as seguintes condições satisfeitas para cada elemento h de H .

- **Fechamento:** $h_1 * h_2 \in H, \forall h_1, h_2 \in H$
- **Associatividade:** $h_1 * (h_2 * h_3) = (h_1 * h_2) * h_3, \forall h_1, h_2, h_3 \in H$
- **Elemento Neutro:** $\exists e_h \in H$ tal que $e_h * h = h * e_h = h, \forall h \in H$
- **Elemento Simétrico:** $\forall h \in H$ tal que $h * h = h * h = e_h$

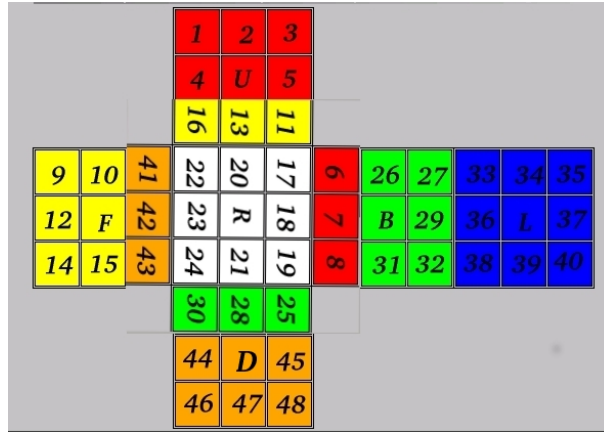


Figura 23 – Rotação R

Fonte: <https://cmup.fc.up.pt/cmup/mdelgado/oldsite/cubo/seminario/index.html>

A rotação R corresponde à permutação

$$R := (17,19,24,22)(18,21,23,20)(6,25,43,16)(7,28,42,13)(8,30,41,11);$$

Analogamente:

$$U := (1,3,8,6)(2,5,7,4)(9,33,25,17)(10,34,26,18)(11,35,27,19);$$

$$F := (9,11,16,14)(10,13,15,12)(1,17,41,40)(4,20,44,37)(6,22,46,35);$$

$$B := (25,27,32,30)(26,29,31,28)(3,38,43,19)(5,36,45,21)(8,33,48,24);$$

$$L := (33,35,40,38)(34,37,39,36)(3,9,46,32)(2,12,47,29)(1,14,48,27);$$

$$D := (41,43,48,46)(42,45,47,44)(14,22,30,38)(15,23,31,39)(16,24,32,40);$$

Todos esses movimentos, seriam as permutações possíveis a se fazer, no caso temos as permutações de R,U,F,B,L,D, respectivamente. Em todos temos cinco 4-ciclo.

3.6 Teoria de Grafos

Nessa seção, trazemos algumas definições da Teoria dos Grafos que serão utilizadas para modelar os movimentos do cubo mágico. Mostraremos como os movimentos ou estados do cubo mágico poderão ser representados através de um Grafo.

Na literatura a palavra Grafo não está totalmente padronizada. Nesse trabalho, utilizaremos a definição de grafo como um Grafo Simples (Grafo Não Orientado). Outras literaturas, definem grafo em um sentido mais amplo, admitem a possibilidade de possuir laços (vértices adjacentes a si mesmo) e também arestas paralelas. As definições são encontradas em (SCHEINERMAN, 2006).

Definição 1: (Grafo): Um Grafo (simples) G consiste de um conjunto finito e não vazio $V(G)$ de objetos chamados vértices, juntamente com um conjunto $E(G)$ de pares não ordenados de vértices; os elementos de $E(G)$ são chamados de arestas. Podemos representá-lo por $G = (V; E)$, onde $V = V(G)$ e $E = E(G)$.

Vejamos agora um exemplo de Grafo:

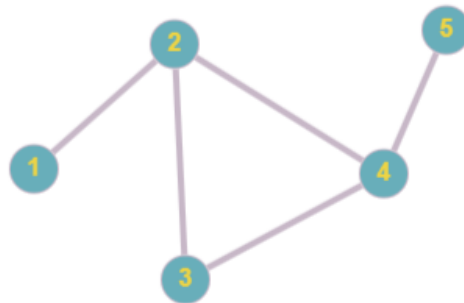


Figura 24 – Grafo

Fonte: <https://graphonline.top/en/>

Definição 2:(Grafo Não Orientado): Um Grafo Não Orientado é um par $G=(V, E)$, onde V é um conjunto finito de vértices e E um conjunto finito de arestas, isto é, o conjunto E é um conjunto de subconjuntos de dois elementos do conjunto V .

Vejamos agora um exemplo de Grafo Não Orientado.



Figura 25 – Grafo Não Orientado

Fonte: <https://graphonline.top/en/>

Definição 3:(Adjacência): Seja um Grafo $G=(V, E)$, com vértices $i, j \in$ ao conjunto V . Se o Grafo for Não Orientado dizemos que o vértice i é adjacente ao vértice j se e somente se o subconjunto $i, j \in E$.

Vejamos um exemplo de matriz de Adjacência do Grafo Não Orientado a partir da Figura 25.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Onde os elementos dessa matriz são:

$a_{11} = 0, a_{12} = 1, a_{13} = 1, a_{14} = 0, a_{15} = 0, a_{21} = 1, a_{22} = 0, a_{23} = 1, a_{24} = 0, a_{25} = 0,$
 $a_{31} = 1, a_{32} = 1, a_{33} = 0, a_{34} = 1, a_{35} = 0, a_{41} = 0, a_{42} = 0, a_{43} = 1, a_{44} = 0, a_{45} = 1, a_{51}$
 $= 0, a_{52} = 0, a_{53} = 0, a_{54} = 1, a_{55} = 0$

Definição 4:(Grau do Grafo Não Orientado): Seja $G=(V, E)$ um Grafo Não Orientado e seja um vértice $v \in V$. O grau do vértice v é o número de arestas incidentes em v . O grau de v denota-se por $dg(v)$ ou, simplesmente por $d(v)$.

Definição 5:(Passeio): Um passeio em G é uma sequência (lista) de vértices onde cada vértice é adjacente ao vértice anterior. Nessa trajetória (Passeio) que percorre os vértices e as arestas do Grafo, seguindo as conexões entre eles, vértices poderão ser repetidos.

Vejamos na Figura 26 um exemplo de Passeio, no qual passa pelos vértices 1-2-3-1-2-4-5.

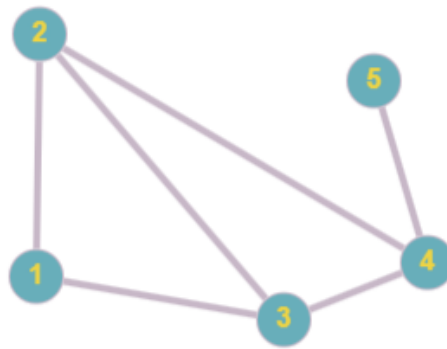


Figura 26 – Passeio

Fonte: <https://graphonline.top/en/>

Definição 6:(Caminho): Um Caminho em G é uma sequência (ou lista) de vértices, em que cada vértice é adjacente ao vértice anterior. No entanto, nessa sequência, vértices não poderão ser repetidos.

Vejamos a seguir na Figura 27 um exemplo de caminho.

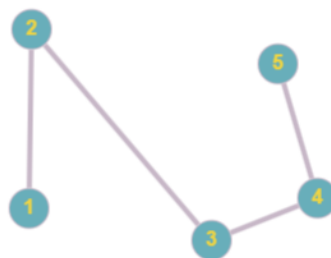


Figura 27 – Caminho

Fonte: <https://graphonline.top/en/>

Definição 7:(Comprimento de um Caminho): O Comprimento l de um Caminho é igual ao número total de arestas do vértice inicial i até o vértice final j . Assim um Caminho de comprimento l possui $l+1$ vértices.

Vejamos na Figura 27 por exemplo, temos 4 arestas e $l + 1$ vértices, então temos 5 vértices.

Definição 8:(Ciclo): Um Ciclo é um Caminho fechado de comprimento l , onde todos seus vértices são distintos, exceto o vértice inicial e final pois, $v_0=v_l$. O comprimento de um Ciclo é denominado de l -ciclo.

Na Figura 28, vejamos um exemplo de Ciclo



Figura 28 – Ciclo

Fonte: <https://graphonline.top/en/>

Definição 9:(Conexo): Um Grafo $G = (V, E)$ é Conexo se, para quaisquer par de vértices $i, j \in V$, existir um Caminho do vértice i para o vértice j .

Um exemplo de Grafo Conexo, podemos utilizar a Figura 28, de onde estivermos, conseguimos ir de qualquer vértice para qualquer vértice, logo, nosso Grafo é Conexo.

Definição 10:(Árvore): Uma Árvore é um Grafo Conexo que não possui Ciclos. Os vértices de grau 1 em uma Árvore, são usualmente denominados folhas. Vejamos na Figura 29 um exemplo de Árvore:

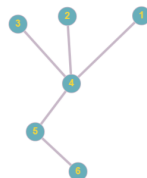


Figura 29 – Árvore

Fonte: <https://graphonline.top/en/>

Definição 11:(Subgrafo): Um subgrafo de um Grafo $G=(A,E)$ é um Grafo $H=(A',E')$ onde V' é um subconjunto de A e E' é um subconjunto de E .

Na Figura 30, foi obtido um Subgrafo da Figura 28, vejamos abaixo:

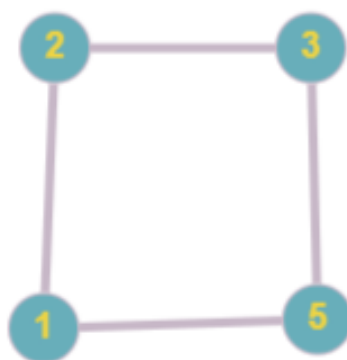


Figura 30 – Subgrafo

Fonte:<https://graphonline.top/en/>

4 Aplicações de Álgebra no Cubo Mágico

4.1 Teoria de grupo no cubo mágico

Nesta seção, após serem definidos alguns conceitos de álgebra, iremos aplicar as definições aprendidas para provar se o cubo mágico é grupo ou não. Lembrando que para ser grupo, tem que valer as propriedades de Associatividade, a existência do Elemento Neutro e o Elemento Inverso.

- **Associatividade:** (Luis Gustavo Hauff Martins Grimm, 2016) Ao realizarmos uma sequência qualquer, por exemplo, de 3 movimentos genéricos X, Y, Z , verificamos que: $X(YZ) = (XY)Z$. Ao manipular o cubo a prova desta condição é evidente e a consideraremos como trivial.
- **Elemento neutro:** (Luis Gustavo Hauff Martins Grimm, 2016) A existência do elemento neutro é verificada pelo movimento "não fazer nada" em qualquer das 6 faces. Com isso garantimos a identidade I de qualquer uma das seis faces do cubo ou de qualquer sequência de movimentos.
- **Elemento inverso:** (Luis Gustavo Hauff Martins Grimm, 2016) O elemento inverso no Grupo R de Rubik significa desfazer a sequência, de um ou mais movimentos, realizada. E aqui há duas importantes considerações a serem feitas: se o movimento foi de apenas uma face ou de uma macro. Seja um movimento genérico X , uma rotação de uma das 6 faces de 90 graus no sentido horário, então seu elemento inverso será o movimento, também de 90 graus, desta mesma face, porém no sentido anti-horário. Denotaremos este elemento inverso de X como sendo X^{-1} ou simplesmente X' . Caso seja feito uma sequência de movimentos, então o elemento inverso será a realização dos inversos dos movimentos, porém na ordem inversa. Vejamos um exemplo a seguir:

O inverso de U é U' (o apóstrofo indica inverso), o elemento inverso tem que ser único, ou seja, quando aplicamos $U * U' = e$.

Portanto, o cubo mágico é grupo, pois satisfaz as propriedades, tem a associatividade, tem o elemento neutro e tem o elemento inverso. Agora fica a dúvida: O cubo mágico é grupo abeliano? A resposta é não, como podemos ver na Figura 24, $FL \neq LF$. Para ser abeliano, tem que valer a comutatividade, mas como podemos ver, não é comutativo. O mesmo irá ocorrer com quaisquer faces adjacentes. É justamente a não-comutatividade

que torna o cubo um quebra cabeças.

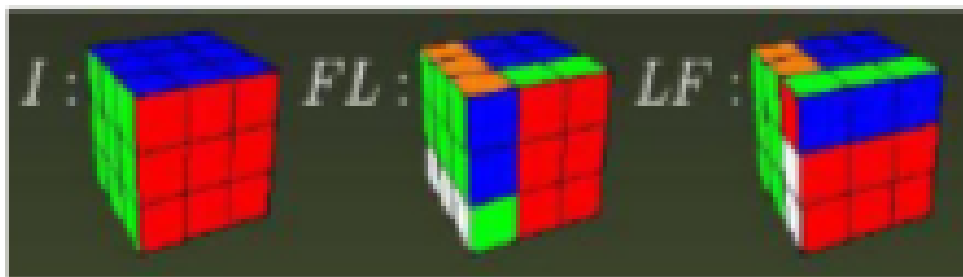


Figura 31 – Não comutatividade

Fonte: Antonio Sidiney da Costa Oliveira, 2015

Com as faces não sendo adjacentes, conseguimos obter a comutatividade, porém só existem 3 casos de movimentos em que as faces não são adjacentes, são:

- **Movimento 1:** $RL = LR$
- **Movimento 2:** $UD = DU$
- **Movimento 3:** $FB = BF$

Pela Proposição 3.5.7, sabemos que todo grupo cíclico é abeliano, no caso do cubo mágico, por definição, sabemos que não é cíclico, pois foi mostrado anteriormente que o cubo mágico não é abeliano, logo, se não é abeliano, portanto não é cíclico.

Vejamos agora na Figura 25, alguns geradores do cubo mágico, são pequenos subgrupos baseado em conjuntos simples de geradores. Cada linha representa uma forma de resolver o cubo mágico a partir dele pronto, fazendo uma sequência de movimentos indicados por Generators (Geradores) e seus respectivos tamanhos (size).

Por exemplo, olhando a linha 1, temos o movimento U de tamanho 4, ou seja, se tivermos o cubo mágico completado, aplicando U^4 , conseguiríamos obter novamente o cubo mágico feito.

Para ficar mais interessante, analisamos a linha 15, baseado no cubo completado, se aplicarmos os movimentos LLUU, RRUU de tamanho 48, ou seja, fazer 48 vezes essa mesma repetição, conseguiríamos retornar para o cubo mágico completado.

	Generators	Size	Factorization
1	U	4	2^2
2	U, RR	14400	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
3	U, R	73483200	$2^6 \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 7$
4	RRLL, UDD, FFBB	8	2^3
5	RI, Ud, Fb	768	$2^8 \cdot 3$
6	RL, UD, FB	6144	$2^{11} \cdot 3$
7	FF, RR	12	$2 \cdot 3^2$
8	FF, RR, LL	96	$2^5 \cdot 3$
9	FF, RR, LL, BB	192	$2^6 \cdot 3$
10	FF, RR, UU	2592	$2^5 \cdot 3^4$
11	FF, RR, LL, UU	165888	$2^{11} \cdot 3^4$
12	FF, BB, RR, LL, UU	663552	$2^{13} \cdot 3^4$
13	FF, BB, RR, LL, UU, DD	663552	$2^{13} \cdot 3^4$
14	LLUU	6	$2 \cdot 3^2$
15	LLUU, RRUU	48	$2^4 \cdot 3$
16	LLUU, FFUU	1296	$2^4 \cdot 3^4$
17	LLUU, FFUU, RRUU	82944	$2^{10} \cdot 3^4$
18	LLUU, FFUU, RRUU, BBUU	331776	$2^{12} \cdot 3^4$
19	LUlu, RUru	486	$2 \cdot 3^9$
20	LUlu, RUru, LDld	17496	$2^3 \cdot 3^7$
21	LUlu, RUru, LDld, RDrd	52488	$2^3 \cdot 3^8$

Figura 32 – Geradores

Fonte: Tom Davis

Como vimos anteriormente na Figura 1, cada movimento tem sua própria sigla que é representada com inicial do movimento em inglês, sendo:

R = Right;

L = Left;

U = Up;

D = Down;

F = Front;

B = Back;

Seus movimentos inversos tem o apóstrofo (') mostrado anteriormente.

A partir do cubo mágico completado, encontramos um algoritmo que nos permite fazer uma série de movimentos que implicam no movimento R(Right), ou seja, com base nos movimentos mostrados abaixo, obtemos uma sequência de movimentos que após aplicarmos esta sequência, resulta no mesmo que fazer o movimento R.

$$R = BBFFUUBBRRBBFFLLFFUBBFFUUBBRRBBFFLLFFUUD'R$$

Analogamente, conseguimos algoritmos que nos implicam na igualdade de cada movimento, ou seja:

$$L = FFBBUUFFLLFFBBRRBBUFFBBUUFFLLFFBBRRBBUUD'L$$

$$D = RLLLUURRBBRRLLFFLLURRLLLUURRBBRRLLFFLLUU$$

$$U = LLRRDDLLFFLLRRBBRRDLLRRDDLLFFLLRRBBRRDD$$

$$F = RLLLUURRBBRRLLFFLLURRLLLUURRBBLLFFLLUUD'F$$

$$B = LLRRUULLFFLLRRBBRRULLRRUULLFFRRBBRRUUD'B$$

Pela Definição 1 da seção 2.3.1, para obtermos o R' , L' , D' , U' , F' , B' , da mesma maneira que vimos acima, com essa sequência longa de movimentos, basta aplicarmos o inverso, ou seja:

$$R' = R'DU'U'F'F'L'L'F'F'B'B'R'R'B'B'U'U'F'F'B'B'U'F'F'L'L'F'F'B'B'R'R'B'B'U'U'B'B'F'F'$$

$$L' = L'DU'U'B'B'R'R'B'B'F'F'L'L'F'F'U'U'B'B'F'F'U'B'B'R'R'B'B'F'F'L'L'F'F'U'U'B'B'F'F'$$

$$D' = U'U'L'L'F'F'L'L'R'R'B'B'R'R'U'U'L'L'R'R'U'L'L'F'F'L'L'R'R'B'B'R'R'U'U'L'L'R'R'$$

$$U' = D'D'R'R'B'B'R'R'L'L'F'F'L'L'D'D'R'R'L'L'D'R'R'B'B'R'R'L'L'F'F'L'L'D'D'R'R'L'L'$$

$$F' = F'DU'U'L'L'F'F'L'L'B'B'R'R'U'U'L'L'R'R'U'L'L'F'F'L'L'R'R'B'B'R'R'U'U'L'L'R'R'$$

$$B' = B'DU'U'R'R'B'B'R'R'F'F'L'L'U'U'R'R'L'L'U'R'R'B'B'R'R'L'L'F'F'L'L'U'U'R'R'L'L'$$

4.2 Tábua de Alguns Movimentos do Cubo Mágico

Nesta seção, iremos construir uma Tábua de Movimentos $R, R', L, L', U, U', D, D', F, F', B, B'$. Abaixo podemos ver o que irá compor cada linha. Iremos utilizar $\bar{0}$ quando fizermos a operação usual (adição) e retornar no cubo completado, ou seja, quando estivermos no Elemento Neutro. Cada linha mostrada abaixo, implica uma série de movimentos que fazemos no cubo mágico seja $R+L$, $U+D$, $L+L$, entre outros...

Primeira Linha:

$$R+R = RR; R+R' = \bar{0}; R+L = RL; R+L' = RL'; R+U = RU; R+U' = RU'; R+D = RD; R+D' = RD'; R+F = RF; R+F' = RF'; R+B = RB; R+B' = RB'$$

Segunda Linha:

$$R' + R = \bar{0}; R' + R' = R'R'; R' + L = R'L, R' + L' = R'L'; R' + U = R'U; R' + U' = R'U'; R' + D = R'D; R' + D' = R'D'; R' + F = R'F; R' + F' = R'F', R' + B = R'B; R' + B' = R'B'$$

Terceira Linha

$$L+R = LR; L+R' = LR'; L+L = LL, L+L' = \bar{0}; L+U = LU; L+U' = LU'; L+D = LD; L+D' = LD'; L+F = LF; L+F' = LF'; L+B = LB; L+B' = LB'$$

Quarta Linha:

$$L'+R = L'R; L'+R' = L'R'; L'+L = \bar{0}; L'+L' = L'L'; L'+U = L'U; L'+U' = L'U'; L'+D = L'D; L'+D' = L'D'; L'+F = L'F; L'+F' = L'F'; L'+B = L'B; L'+B' = L'B'$$

Quinta Linha

$$U+R = UR; U+R' = UR'; U+L = UL; U+L' = UL'; U+U = UU, U+U' = \bar{0}; U+D = UD; U+D' = UD'; U+F = UF; U+F' = UF'; U+B = UB; U+B' = UB'$$

Sexta Linha:

$$U'+R = U'R; U'+R' = U'R'; U'+L = U'L; U'+L' = U'L'; U'+U = \bar{0}; U'+U' = U'U'; U'+D = U'D; U'+D' = U'D'; U'+F = U'F; U'+F' = U'F'; U'+B = U'B; U'+B' = U'B'$$

Sétima Linha:

$$D+R = DR; D+R' = DR'; D+L = DL; D+L' = DL'; D+U = DU; D+U' = DU'; D+D = DD; D+D' = \bar{0}; D+F = DF; D+F' = DF'; D+B = DB; D+B' = DB'$$

Oitava Linha:

$$D'+R = D'R; D'+R' = D'R'; D'+L = D'L; D'+L' = D'L'; D'+U = D'U; D'+U' = D'U'; D'+D = \bar{0}; D'+D' = D'D'; D'+F = D'F; D'+F' = D'F'; D'+B = D'B; D'+B' = D'B'$$

Nona Linha:

$$F+R = FR; F+R' = FR'; F+L = FL; F+L' = FL'; F+U = FU; F+U' = FU'; F+D = FD; F+D' = FD'; F+F = FF; F+F' = \bar{0}; F+B = FB; F+B' = FB'$$

Décima Linha:

$$F'+R = F'R; F'+R' = F'R'; F'+L = F'L; F'+L' = F'L'; F'+U = F'U; F'+U' = F'U'; F'+D = F'D; F'+D' = F'D'; F'+F = \bar{0}; F'+B = F'B; F'+B' = F'B'$$

Décima Primeira Linha:

$$B+R = BR; B+R' = BR'; B+L = BL; B+L' = BL'; B+U = BU; B+U' = BU'; B+D = BD; B+D' = BD'; B+F = BF; B+F' = BF'; B+B = BB; B+B' = \bar{0}$$

Décima Segunda Linha:

$$B'+R = B'R; B'+R' = B'R'; B'+L = B'L; B'+L' = B'L'; B'+U = B'U; B'+U' = B'U'; B'+D = B'D; B'+D' = B'D'; B'+F = B'F; B'+F' = B'F'; B'+B = \bar{0}; B'+B' = B'B'$$

Movimentos	R	R'	L	L'	U	U'	D	D'	F	F'	B	B'
R	RR	$\bar{0}$	RL	RL'	RU	RU'	RD	RD'	RF	RF'	RB	RB'
R'	$\bar{0}$	R'R'	R'L	R'L'	R'U	R'U'	R'D	R'D'	R'F	R'F'	R'B	R'B'
L	LR	LR'	LL	$\bar{0}$	LU	LU'	LD	LD'	LF	LF'	LB	LB'
L'	L'R	L'R'	$\bar{0}$	L'L'	L'U	L'U'	L'D	L'D'	L'F	L'F'	L'B	L'B'
U	UR	UR'	UL	UL'	UU	$\bar{0}$	UD	UD'	UF	UF'	UB	UB'
U'	U'R	U'R'	U'L	U'L'	$\bar{0}$	U'U'	U'D	U'D'	U'F	U'F'	U'B	U'B'
D	DR	DR'	DL	DL'	DU	DU'	DD	$\bar{0}$	DF	DF'	DB	DB'
D'	D'R	D'R'	D'L	D'L'	D'U	D'U'	$\bar{0}$	D'D'	D'F	D'F'	D'B	D'B'
F	FR	FR'	FL	FL'	FU	FU'	FD	FD'	FF	$\bar{0}$	FB	FB'
F'	F'R	F'R'	F'L	F'L'	F'U	F'U'	F'D	F'D'	$\bar{0}$	F'F'	F'B	F'B'
B	BR	BR'	BL	BL'	BU	BU'	BD	BD'	BF	BF'	BB	$\bar{0}$
B'	B'R	B'R'	B'L	B'L'	B'U	B'U'	B'D	B'D'	B'F	B'F'	$\bar{0}$	B'B'

Tabela 1 – Tábua dos Movimentos

Podemos ver pela tabela acima, uma série de movimentos no cubo mágico, a existência no Elemento Neutro é quando aplicamos o movimento + movimento inverso, ou seja, todos os Elementos Neutros presentes na tabela são:

$$R+R' = R'+R = \bar{0}$$

$$L+L' = L'+L = \bar{0}$$

$$U+U' = U'+U = \bar{0}$$

$$D+D' = D'+D = \bar{0}$$

$$F+F' = F'+F = \bar{0}$$

$$B+B' = B'+B = \bar{0}$$

Vejamos na Figura 33 o que acontece por exemplo se aplicarmos os movimentos L+D, visualizamos como o cubo se comporta, após aplicarmos estes 2 movimentos:

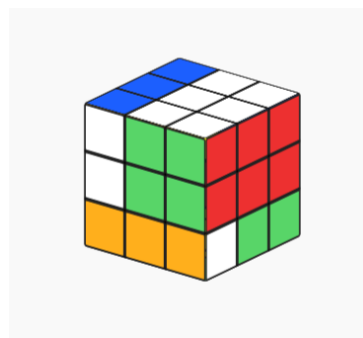


Figura 33 – Movimentos LD

Fonte: <https://rubiks-cube-solver.com/pt/>

Um outro exemplo, vejamos na Figura 34 o que acontece se aplicarmos os movimentos $B+U$:

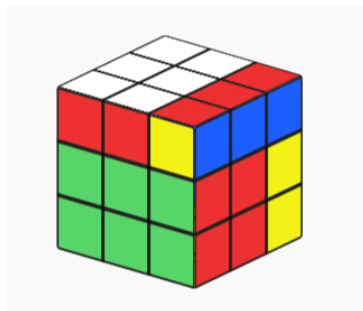


Figura 34 – Movimentos BU

<https://rubiks-cube-solver.com/pt/>

5 Aplicações de Teoria de Grafos no Cubo Mágico

5.1 Explorando os Movimentos do Cubo Mágico com a Teoria dos Grafos

Foi a partir da curiosidade e do estudo matemático sobre os movimentos do cubo mágico que foi explorado dentro da Teoria de Grafos, suas definições e conceitos. Além disso, a relação entre os movimentos executados com um cubo mágico e conceitos da teoria também permitiram o entendimento de problemas correlatos do mundo real. A sequência de movimentos realizados, para compor a flor branca com centro amarelo no cubo mágico, poderá ser representada através de um Grafo, onde cada vértice indica uma posição do cubo e as arestas representam os movimentos realizados.

Para a construção dos Grafos, foi utilizado um programa que permite criar vários Grafos, nele há todo o algoritmo necessário para o desenvolvimento desta área. Vale ressaltar que o Software ainda está em desenvolvimento.

O Grafo da Figura 35, representa os movimentos que foram executados para a composição da flor branca com centro amarelo (Passo 1, mencionado na seção anterior). Esse passo foi escolhido para modelagem do Grafo porque é o único em que os movimentos são executados totalmente aleatórios. Não há regra, justamente porque, como nenhuma das camadas do cubo foi resolvida, qualquer movimento é permitido e não irá desfazer a camada que já foi realizada. Existem muitas possibilidades de movimentos para composição da flor branca, a ideia é obtê-la com o menor número de movimentos.

O Grafo foi construído a partir da desconstrução da flor branca com centro amarelo, devido a possibilidade do embaralhamento das peças brancas nas suas mais variadas posições, permitindo a exploração dos movimentos para composição do Grafo. O objetivo é representar um Grafo de movimentos, onde a flor branca com centro amarelo é desfeita pelo embaralhamento das peças brancas, a fim de que possa ser novamente reconstruída.

Tomando por base, o centro laranja posicionado ao lado direito, a flor branca então começa a ser obtida. As arestas do Grafo representam cor (em inglês) e movimento, referidas nessa ordem, conforme explicado anteriormente. Do vértice 1 para o vértice

2 a peça branca é movida para direita, centro laranja e movimento R. Então, a aresta de nomenclatura (O, R) une o vértice 1 ao vértice 2. Nesse estágio, podemos escolher alguns Passeios e Caminhos. São eles: Repetir a mesma cor e movimento (O, R), ou seja, girar o cubo para frente com a mão direita utilizar o movimento U, rotacionando a peça branca nos 4 meios que tem no topo. Utilizar o movimento U, sucessivamente, abrindo mais opções para a peça branca ser rotacionada O grafo da Figura 35, representa uma variedade de possibilidades de compor a flor branca, a partir do posicionamento das peças brancas. Essa ideia, remete ao processo inverso, isto é, inicia pelos vértices extremos do grafo (vértices de grau 1) até obter a flor branca (vértice 1).

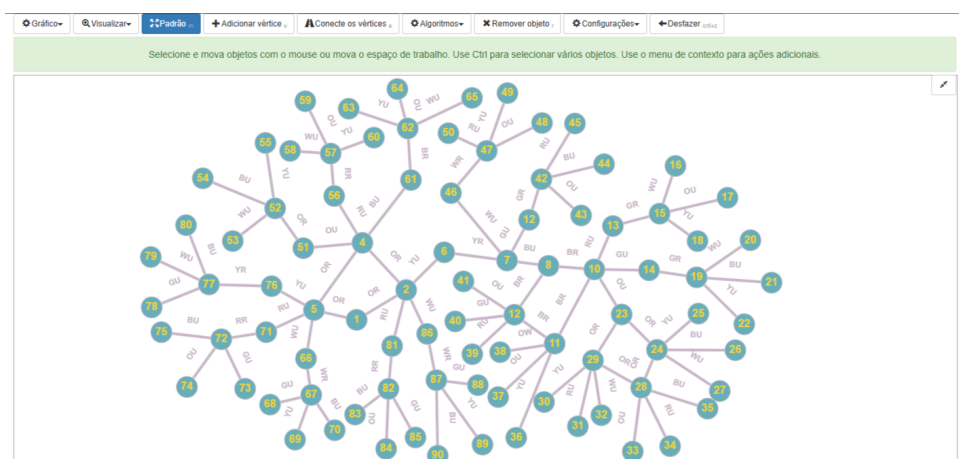


Figura 35 – Grafo do cubo a partir da flor branca

Fonte: <https://graphonline.top/en/>

A fim de elucidar as definições mencionadas, bem como apresentar outros conceitos vinculados a teoria, são apresentados na Figura 36 três Subgrafos $H1$, $H2$ e $H3$, extraídos do Grafo da Figura 35.

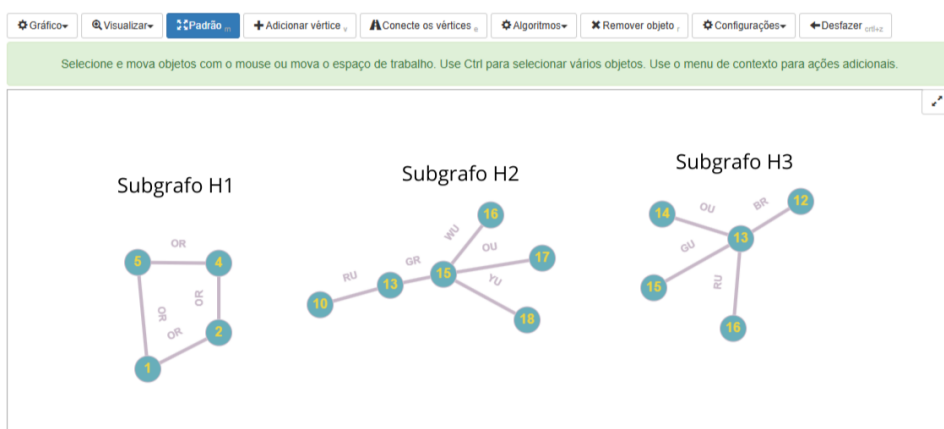


Figura 36 – Subgrafo da modelagem

Fonte: <https://graphonline.top/en/>

De acordo com as Definições (8 e 10) é possível observar que o Subgrafo $H1$ representa um Ciclo e os Subgrafos $H2$ e $H3$ representam Árvores.

As arestas que unem os vértices dos Subgrafos podem ser representadas através uma matriz simétrica A , denominada matriz de adjacência. Essa matriz é constituída de forma que o elemento a_{ij} da matriz A recebe o número 1, se o vértice de índice i é adjacente ao vértice de índice j e zero caso contrário. Com relação ao Subgrafo $H1$, temos a seguinte matriz de Adjacência.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Onde os elementos dessa matriz são:

$$a_{11} = 0, a_{12} = 1, a_{13} = 0, a_{14} = 1, a_{21} = 1, a_{22} = 0, a_{23} = 1, a_{24} = 0, a_{31} = 0, a_{32} = 1, a_{33} = 0, a_{34} = 1, a_{41} = 1, a_{42} = 0, a_{43} = 1, a_{44} = 0,$$

Cabe salientar que, pela Definição 2, a matriz de adjacência A é simétrica, devido ao Grafo de movimentos ser um Grafo Simples (Não Orientado).

Os graus dos vértices do Subgrafo, Definição 4, correspondem a quantidade de possibilidade de movimentos que poderão ser realizados a partir de um determinado estado para outro. Observe que o grau do vértice 15, do subgrafo $H2$ é igual a 4, isto é, existem 4 possibilidades de movimento. No entanto, se o objetivo é encontrar um Caminho mínimo para compor a flor branca a partir do vértice 15, então o próximo movimento deverá ser em direção ao vértice 13. Assim, através do Caminho, Definição 5, a sequência 15 13 10 8 7 6 2 1, chegará no vértice 1 (composição da flor branca).

Observe que se os movimentos escolhidos forem em direção ao vértice 16, 17 e 18, se constituirá em um Passeio, visto que será preciso retornar ao vértice 15 e assim o vértice 15 é repetido. O interessante no Grafo dos movimentos, Figura 36 é a possibilidade de se encontrar caminhos mínimos de comprimento l .

Os graus dos vértices dos Subgrafos ou Grafos também podem ser obtidos através da sua representação na matriz de adjacência. A soma da linhas e ou colunas da matriz de adjacência A é igual ao grau do vértice corresponde a linha e ou coluna da matriz.

5.2 O Problema de Caminhos Mínimos e o Algoritmo de Dijkstra

O algoritmo de Dijkstra é uma solução para o problema do caminho mínimo de origem única. Funciona em Grafos Orientados e Não Orientados, no entanto, todas as arestas devem ter custos não negativos.

Entrada: Grafo ponderado $G = (N, E)$ e nó origem $O \in N$, de modo que todos os custos das arestas sejam não negativos.

Saída: : Comprimentos de caminhos mais curtos (ou os caminhos mais curtos em si) de um determinado nó origem $O \in N$ para todos os outros nós.

O Algoritmo de Dijkstra identifica, a partir do nó O , qual é o custo mínimo entre esse nó e todos os outros do Grafo. No início, o conjunto S contém somente esse nó, chamado origem. A cada passo, selecionamos no conjunto de nós sobrando, o que está mais perto da origem. Depois atualizamos, para cada nó que está sobrando, a sua distância em relação à origem. Se passando pelo novo nó acrescentado, a distância ficar menor, é essa nova distância que será memorizada.

Escolhido um nó como origem da busca, este algoritmo calcula, então, o custo mínimo deste nó para todos os demais nós do grafo. O procedimento é iterativo, determinando, na iteração 1, o nó mais próximo do nó O , na segunda iteração, o segundo nó mais próximo do nó O , e assim sucessivamente, até que em alguma iteração todos os nós sejam atingidos.

O problema do caminho mais curto é fundamental na pesquisa, pois permite a construção de modelos complexos a partir de redes simples, sendo essencial na otimização combinatória. Suas aplicações abrangem desde o tráfego rodoviário até a biologia molecular (MÉNDEZ; GUARDIA, 2008). O Algoritmo de Dijkstra desenvolvido por Edsger Dijkstra em 1956, é uma solução eficaz para este problema, determinando o caminho mais curto entre dois vértices em um grafo. Ele cria uma Árvore de Caminho mínimo a partir de um vértice inicial, facilitando a análise e otimização de diversas redes. Basicamente as etapas do Algoritmo de Dijkstra são:

- **Etapa 1:** Começar com um vértice inicial;
- **Etapa 2:** Explorar todos os vértices adjacentes ao vértice inicial, atualizando todos os movimentos de comprimento l para chegar a cada um deles;
- **Etapa 3:** Selecionar o vértice com o menor movimento de comprimento l ;

- **Etapa 4:** Repetir o processo até que todos os vértices tenham sido visitados ou até chegar ao destino.

5.3 A Estreita relação do Problema dos Caminhos Mínimos com o Movimento com o Cubo Mágico

Nessa seção, será mostrado com o algoritmo de Dijkstra também pode encontrar o menor número de movimentos que precisam ser realizados para compor a flor branca. É provável que essa abordagem que relaciona movimentos em um cubo mágico a caminhos mínimos, desperte novas investigações sobre algoritmos eficientes de resolução. A intersecção entre teoria e prática pode incentivar ao desenvolvimento de soluções inovadoras, exigindo criatividade e engenho.

Lembrando que o comprimento l é o número de arestas do caminho, então um caminho em um grafo é mínimo se não existir nenhum outro caminho de menor comprimento que tenha a mesma origem e o mesmo destino.

A partir de uma prova conceitual, operando no subgrafo da Figura 37, mostrar-se á como o algoritmo de Dijkstra será executado. Especificamente nesse subgrafo, busca-se encontrar o menor número de movimentos com o cubo mágico, do vértice de origem $i = 17$ até vértice de destino $j = 1$. No subgrafo da Figura 37, todas as arestas foram ponderadas com o número 1, isto é, cada movimento realizado da posição i para posição j , com o cubo mágico, tem comprimento $l = 1$.

O Algoritmo, que opera no grafo, inicia na posição inicial 17. A notação utilizada será [Vértice Antecessor na Sequência do Caminho, Total de Arestas (movimentos) Percorridas]. Assim A notação $[0,0]$ é alocada ao vértice 17, como mostra a Figura 37, e indica respectivamente que não há vértice antecessor ao vértice 17 e nenhum movimento foi ainda realizado com o cubo mágico.

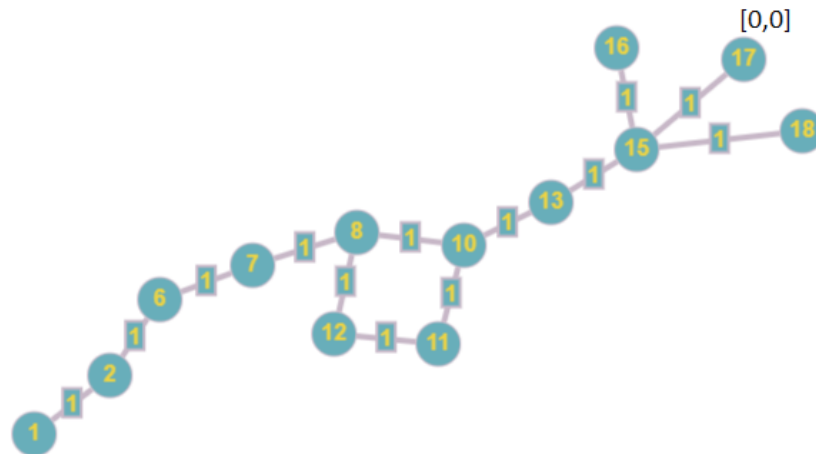


Figura 37 – Início do Algoritmo

Fonte: Próprio Autor

A ideia é percorrer o grafo de movimentos, rotulando os vértices visitados, até encontrar o vértice de destino. Então, na busca por esse caminho todos os vértices adjacentes ao vértice 17 deverão ser examinados. No entanto, somente o vértice 15 é adjacente ao vértice 17, isto é, existe somente uma possibilidade de movimento que poderá ser realizada. Assim, ao vértice 15, mostrado na Figura 28, será alocado $[17, 0+1] = [17,1]$, isto é, existe uma sequência (15-17) onde 1 movimento é realizado com o cubo mágico, do vértice 17 para o vértice 15. E o vértice 17, que foi visitado, deverá ser rotulado, isto é, precisa-se garantir que a posição 17 não será repetida.

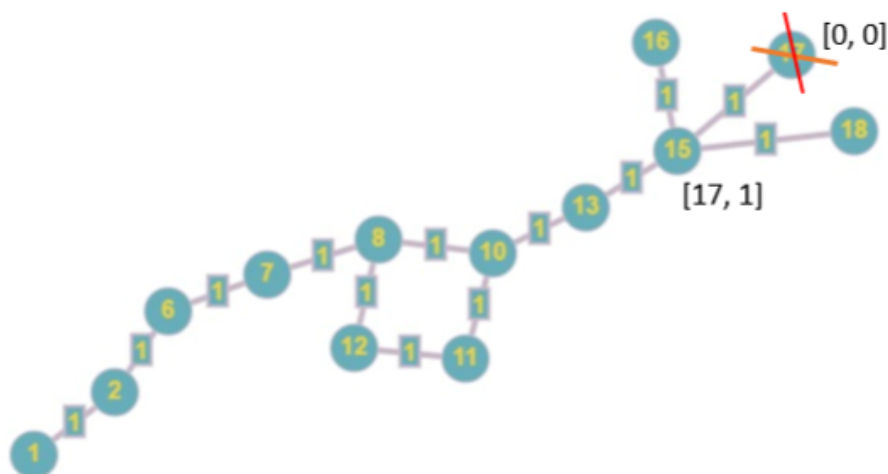


Figura 38 – Vértice 17 Rotulado

Fonte: Próprio Autor

O próximo vértice a ser visitado, aquele na direção do menor caminho, é o vértice 15. O vértice 15 é o único vértice alcançável com menor comprimento (movimento) l . Os vértices adjacentes ao vértice 15, ainda não rotulados, são os vértices 16, 18 e 13. Assim, como mostra a Figura 39, ao vértice 16 é alocado $[15, 1+1] = [15, 2]$, isto é, existe uma sequência (16 - 15 - 17) com 2 movimentos ou comprimento 2. Analogamente, ao vértice 18, é alocado $[15, 1+1] = [15, 2]$, isto é, existe uma sequência (18 - 15 - 17) com 2 movimentos ou comprimento 2. E, analogamente ao vértice 13 é alocado $[15, 1+1] = [15, 2]$, isto é, existe uma sequência (13 - 15 - 17) com 2 movimentos ou comprimento 2.

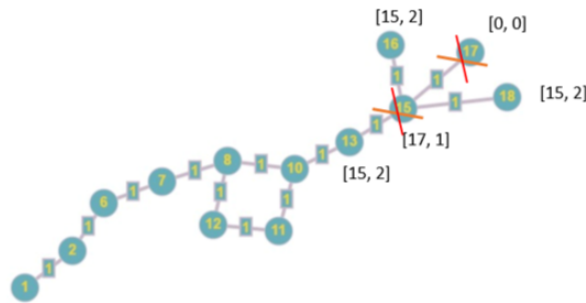


Figura 39 – Vértice 15 Rotulado

Fonte: Próprio Autor

Se a escolha for o vértice 16, automaticamente ele é rotulado, pois não existe nenhum vértice adjacente a ele que não esteja rotulado. O mesmo ocorre quando a escolha é o vértice 18. Isso acontece porque os vértices 16 e 18 possuem grau 1 e são adjacentes ao vértice 15 que já foi rotulado. A Figura 40, mostra que não há possibilidade de movimento nas posições 16 e ou 18 devido ao vértice 15 ter sido já rotulado.

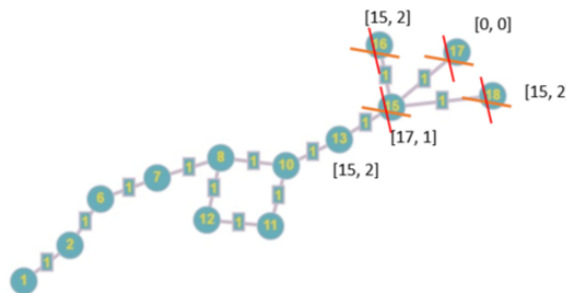


Figura 40 – Vértices 16 e 18 Rotulados

Fonte: Próprio Autor

O vértice 13 então, é escolhido para ser visitado, pois a posição 13 possui o menor comprimento l dentre todos os outros vértices que ainda não foram alcançáveis, isto é, o elemento mínimo do conjunto de movimentos $[2, \infty]$ é 2. O vértice adjacente ao vértice 13, não rotulado, é somente o vértice 10. Assim, como mostra a Figura 41, ao vértice 10 é alocado $[13, 2+1] = [13,3]$, isto é, existe uma sequência $(10 - 13 - 15 - 17)$ com 3 movimentos ou comprimento 3. O vértice 13 é rotulado. O vértice 10 é escolhido para

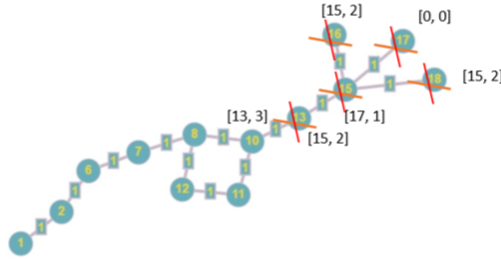


Figura 41 – Vértice 13 rotulado

Fonte: Próprio Autor

ser visitado, pois o elemento mínimo do conjunto de movimentos $[3, \infty]$ é 3. Os vértices adjacentes ao vértice 10, não rotulados, são os vértices 8 e 11. Assim, como mostra a Figura 42, ao vértice 8 é alocado $[10, 3+1] = [10,4]$, isto é, existe uma sequência $(8 - 10 - 13 - 15 - 17)$ com 4 movimentos ou comprimento 4. Analogamente, ao vértice 11, é alocado $[10, 3+1] = [10,4]$, isto é, existe uma sequência $(11 - 10 - 13 - 15 - 17)$ com 4 movimentos ou comprimento 4. O vértice 10 é rotulado. E qualquer um dos vértices 8 ou 11 poderão ser escolhidos para serem visitados, pois o elemento mínimo do conjunto de comprimentos $[4, 4, \infty]$ é 4.

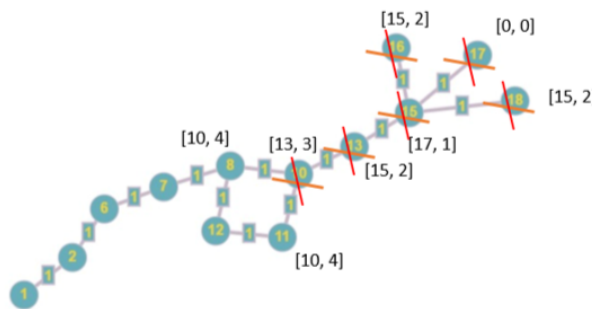


Figura 42 – Vértice 10 rotulado

Fonte: Próprio Autor

O vértice 11 é escolhido para ser visitado, O vértice adjacente ao vértice 11, não rotulado, é somente o vértice 12. Assim, como mostra a Figura 43, ao vértice 12 é alocado $[11, 4+1] = [11,5]$, isto é, existe uma sequência $(12 - 11 - 10 - 13 - 15 - 17)$ com 5 movimentos ou comprimento 5. O vértice 11 é rotulado.

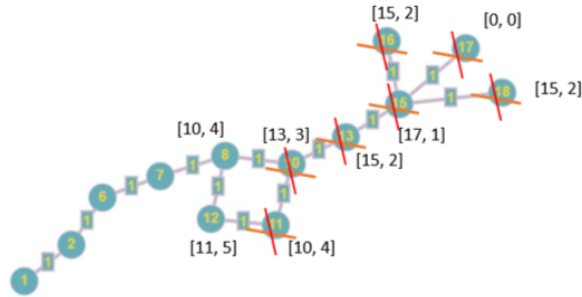


Figura 43 – Vértice 11 rotulado

Fonte: Próprio Autor

É importante observar que o vértice escolhido para ser visitado, nessa etapa do algoritmo, deverá ser o vértice 8, ele é atingido com menor comprimento l . Isso quer dizer que, quando o cubo mágico atingir a posição 8, o menor número de movimentos foi executado. O menor elemento do conjunto de comprimentos $[5, 4, \infty]$ é 4, e a sequência $(8 - 10 - 13 - 15 - 17)$ foi realizada com 4 movimentos. O vértice 8 fica rotulado.

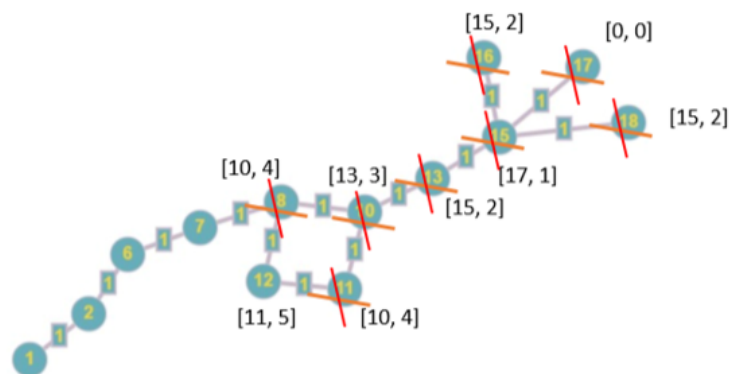


Figura 44 – Vértice 8 rotulado

Fonte: Próprio Autor

O vértice 7 é escolhido, automaticamente é rotulado, pois não existe nenhum vértice adjacente a ele que não esteja rotulado. Assim, sucessivamente, o algoritmo vai sendo executado no grafo até que todos os vértices são rotulados ou o vértice de destino 1 (flor branca do centro amarelo) é encontrada.

Cabe salientar que, os vértices que compõem a sequência mínima de movimentos são obtidos sempre com referência ao seu vértice antecessor. Assim, no vértice 8 tem-se registrado seu vértice antecessor (vértice 10). No vértice 10, tem-se registrado seu vértice antecessor (vértice 13). No vértice 13, tem-se registrado seu vértice antecessor (vértice 15). No vértice 15, tem-se registrado seu vértice antecessor (vértice 17). Finalmente, o vértice 17, tem-se registrado seu vértice antecessor (0). E a sequência mínima do cubo, do cubo que encontra-se na posição 8 (do fim para início) é $(8 - 10 - 13 - 15 - 17)$.

Utilizando o aplicativo (<https://graphonline.top/en/>), a Figura 45, mostra como a sequência mínima de movimentos realizados com o cubo mágico foi obtida para esse subgrafo.

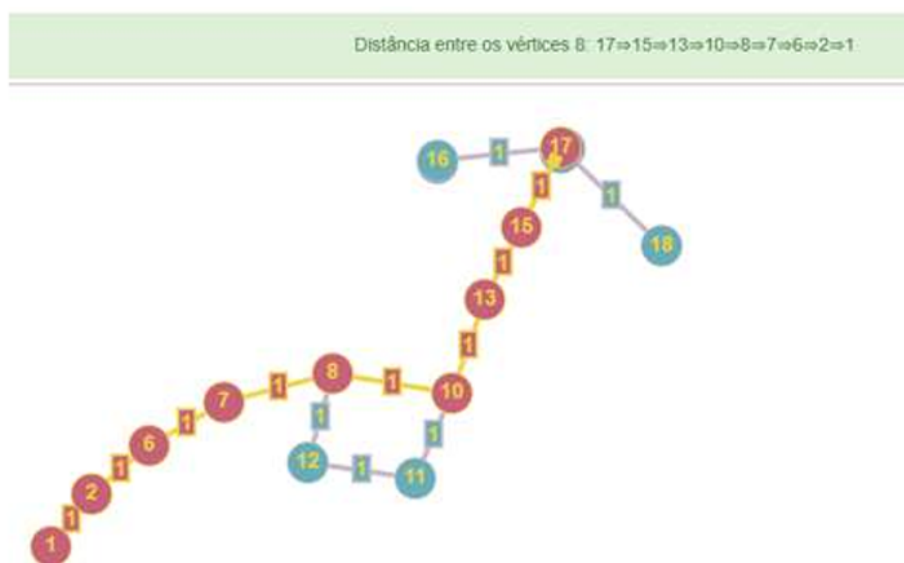


Figura 45 – Sequência Mínima de Movimentos realizados no Subgrafo

Fonte: Próprio Autor

Obviamente, a sequência obtida não é a solução ótima para o grafo da Figura 35. É interessante observar que, o menor número de movimentos será obtido para um subgrafo cujos vértices de grau 1 (folhas), estejam mais próximos do vértice de destino 1. A Figura 46 mostra uma sequência mínima ótima para o Grafo da Figura 35.

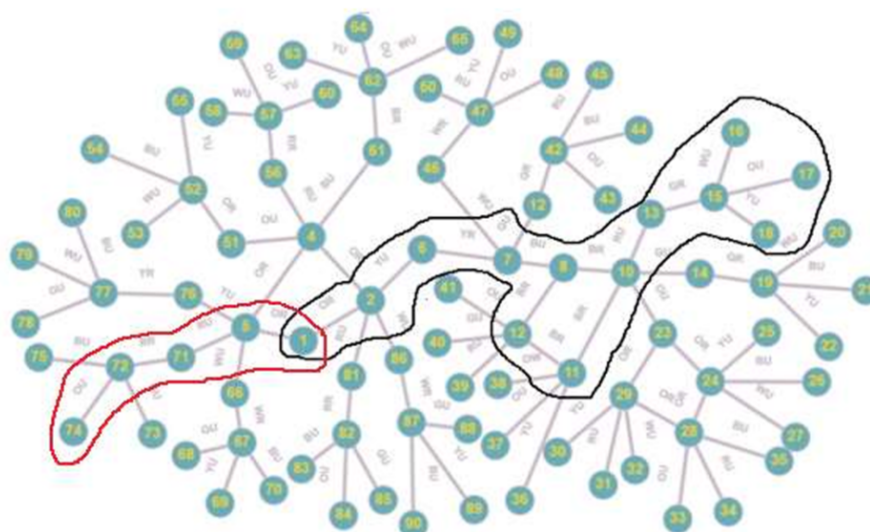


Figura 46 – Uma Sequência Ótima de Movimentos (74 – 72 – 71 – 5 – 1) com comprimento igual a 4.

Fonte: Próprio Autor

Outro exemplo a partir do Grafo da Figura 35, fizemos um outro Subgrafo para exemplificar o método dos Caminhos Mínimos com imagens reais de como o cubo mágico se comporta a partir dos movimentos.



Figura 47 – Subgrafo H4

Fonte: Próprio Autor

No vértice 7 da Figura 47, está o início $[0,0]$, onde iremos começar. O cubo se comporta desta maneira como ilustramos na Figura 48:



Figura 48 – Vértice 7

Fonte: Próprio Autor

Após isso, podemos ir para o Vértice 46 ou para o Vértice 6. Indo para o Vértice 6, ficamos com o cubo deste jeito.



Figura 49 – Vértice 46

Fonte: Próprio Autor

Analisando como se comporta o cubo mágico, vemos que a partir do Vértice 46, até chegarmos no Vértice 1, seria um caminho mais longo do que se irmos do Vértice 7 para o Vértice 6.

Se irmos pelo Vértice 6, teríamos ilustrado o cubo mágico deste jeito:



Figura 50 – Vértice 6

Fonte: Próprio Autor

A partir do Vértice 6, podemos observar pelo Subgrafo H4 da Figura 47 que só teríamos que passar pelos Vértices 2 e 1. Portando nossa sequência de Caminhos Mínimos até chegar na flor branca de centro amarelo seria: 7-6-2-1.

6 Conclusão e Trabalhos Futuros

O que motivou o autor a realizar o trabalho aqui apresentado, foi a paixão pelo quebra cabeça cubo mágico. Durante a pandemia, onde todos tiveram que ficar em casa, o cubo mágico foi um meio de desestressar a cabeça, um passa-tempo, que trouxe benefícios para muitas pessoas. Nesse período, esta ferramenta tão popular no mundo inteiro, virou a solução de milhares de pessoas para se "divertir", perante a todo caos que a pandemia causou. Pesquisas mostram que o cubo mágico é um meio que as pessoas utilizam para diminuir um pouco a ansiedade, também, quanto mais movimentos são realizados com as peças do cubo, conectando as cores, mais o cérebro é ativado, ou seja, exercícios mentais são realizados ajudando a evitar o alzheimer e também desenvolver melhor a coordenação motora. Além disso, o olhar matemático sobre os movimentos com o cubo é encantador.

Espera-se que esse trabalho, no qual faz uma intersecção entre Matemática e jogos, como o cubo mágico, incentive o aprendizado da Geometria mais dinâmico e acessível, desenvolvendo habilidades matemáticas de forma lúdica e prática. Na Álgebra, em relação às estruturas algébricas, como grupos e subgrupos que foram explorados, permita a generalização de ideias matemáticas, a compreensão de conceitos e conexões entre outras áreas da Matemática. Também, em relação a teoria de grafos, que permitam que estudantes e entusiastas façam descobertas de novas relações entre coisas que pareciam não estar relacionadas, como os movimentos do cubo mágico associados a resolução dos problemas de caminhos mínimos. Finalmente, que esse estudo tenha continuidade, abra caminhos para o aprofundamento do estudo de álgebra abstrata e teoria dos grafos.

Referências

- Angelo Zanona Neto. *O cubo mágico e o número de Deus*. 2024. Disponível em: <<https://www3.unicentro.br/petfisica/2024/06/24/o-cubo-magico-e-o-numero-de-deus/>>.
- BEZERRA, J. S. Tópicos em teoria de grupos: o desafio do cubo de rubik. 2016.
- CHEN, J. *Group theory and the Rubik's cube*. 2004.
- CONCEITO.DE, E. editorial de. *Cubo - O que é, conceito e definição*. 2014. Disponível em: <<https://conceito.de/cubo>>.
- DANTE, L. R. *Matemática: contexto aplicações*. 3. ed.. ed. São Paulo: Ática, 2016.
- DELGADO, M. *Seminário sobre Cubo Mágico*. 2023. Acesso em: 20 out. 2023. Disponível em: <<https://cmup.fc.up.pt/cmup/mdelgado/oldsite/cubo/seminario/index.html>>.
- DELGADO, M. *Seminário sobre o Cubo Mágico*. n.d. Disponível em: <<https://cmup.fc.up.pt/cmup/mdelgado/oldsite/cubo/seminario/index.html>>.
- GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2000.
- GRIMM, L. G. H. M. *Cubo Mágico: Propriedades e Resoluções envolvendo Álgebra e Teoria de Grupos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2016.
- HUNGERFORD, T. W. *Álgebra*. Nova Iorque: Springer Verlag, 1974.
- JUNGNICKEL, D. *Graphs, networks, and algorithms*. 3. ed.. ed. Berlin: Springer, 2008.
- JÚNIOR, J. E. d. S. *Teoria de grupo e o cubo mágico*. Dissertação (Mestrado), 2016.
- MÉNDEZ, Y. S.; GUARDIA, L. E. T. *Problemas do caminho mais curto - Algoritmo de Dijkstra*. Rio de Janeiro: SPOLM, 2008.
- NEUROCHISPAS. *Faces, vértices e arestas de cubos*. 2024. Disponível em: <<https://br.neurochispas.com/geometria/faces-vertices-e-arestas-de-cubos/>>.
- RABUSKE, M. A. *Introdução à teoria dos grafos*. Florianópolis: Ed. da UFSC, 1992.
- SANTOS, E. L. *Fundamentos de teoria de grupos e aplicações ao jogo resta um*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2015.
- SANTOS, F. d. M. *Uma Introdução à Teoria dos Grupos*. Caicó: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2018.
- SCHEINERMAN, E. R. *Matemática Discreta: Uma introdução*. São Paulo: Thompson Learning Edições, 2006.
- VILLELA, M. L. T. *Grupos*. Niterói: Instituto de Matemática, Universidade Federal Fluminense, 2009.