



Universidade Federal do Rio Grande - FURG
Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF
Curso de Matemática Aplicada Bacharelado

Richard Silva Souza

Um olhar sobre a complexidade de Resolução do Problema de Roteamento de Veículos

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Julho, 2025

Richard Silva Souza

Um olhar sobre a complexidade de Resolução do Problema de Roteamento de Veículos

Trabalho de Conclusão de Curso, Matemática Aplicada Bacharelado, submetido junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Orientador: Dra. Catia Maria dos Santos Machado

Coorientador: Dra. Elizangela Dias Pereira

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Julho, 2025



Universidade Federal do Rio Grande – FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física

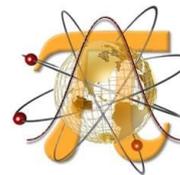
Curso de Bacharelado em Matemática Aplicada

Av. Itália km 8 Bairro Carreiros

Rio Grande-RS CEP: 96.203-900 Fone (53)3293.5411

e-mail: imef@furg.br

Sítio: www.imef.furg.br



Ata de Defesa de Monografia

No vigésimo quarto dia do mês de julho de 2025, às 14h, no Auditório do IMEF, foi realizada a defesa do Trabalho de Conclusão de Curso do acadêmico **Richard Silva Souza**, intitulada “**Um olhar sobre a complexidade do Problema de Roteamento de Veículos**”, sob a orientação da Profa. Dra. Catia Maria dos Santos Machado, deste instituto e coorientação de Elizangela Dias Pereira. A banca avaliadora foi composta pela Profa. Dra. Juliana Ricardo Nunes e pelo Prof. Dr. Rodrigo Soares, ambos do IMEF/FURG. O candidato foi: (x) aprovado por unanimidade; () aprovado somente após satisfazer as exigências que constam na folha de modificações, no prazo fixado pela banca; () reprovado. Na forma regulamentar, foi lavrada a presente ata, que é abaixo assinada pelos membros da banca, na ordem acima relacionada.

Documento assinado digitalmente

gov.br

CATIA MARIA DOS SANTOS MACHADO

Data: 24/07/2025 16:08:49-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Catia Maria dos Santos Machado
Orientadora

Documento assinado digitalmente

gov.br

ELIZANGELA DIAS PEREIRA

Data: 24/07/2025 16:13:25-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Elizangela Dias Pereira
Coorientadora

Documento assinado digitalmente

gov.br

JULIANA DA SILVA RICARDO NUNES

Data: 25/07/2025 14:09:39-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Juliana Ricardo Nunes

Documento assinado digitalmente

gov.br

RODRIGO BARBOSA SOARES

Data: 24/07/2025 19:48:36-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Rodrigo Soares

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me guiado e amparado ao longo de toda minha vida. Em seguida, expresso minha profunda gratidão às minhas avós, Helia e Luciana, que nunca soltaram a minha mão e me deram forças mesmo nos momentos em que eu próprio duvidava da minha capacidade. Sem o apoio e o amor de vocês, nada disso teria sido possível.

Agradeço também aos meus familiares, que torceram por mim e hoje compartilham comigo este momento tão importante.

À minha orientadora, Prof.^a Dra. Cátia, deixo um agradecimento especial pela confiança em meu potencial. Sua leveza, paciência e orientação foram fundamentais para que este trabalho pudesse ser concluído com êxito.

Estendo minha gratidão a todos os professores que fizeram parte da minha formação acadêmica e contribuíram, direta ou indiretamente, para o meu crescimento profissional e pessoal.

Por fim, agradeço aos amigos e colegas que estiveram presentes ao longo da jornada, compartilhando desafios, risadas e até mesmo o tradicional cafezinho. A cada um de vocês, o meu muito obrigado.

Resumo

Este trabalho apresenta uma abordagem introdutória e didática ao Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea (PRVFH), por meio de um exemplo simplificado que permite visualizar, passo a passo, a construção das restrições e da função objetivo voltadas à minimização de custos logísticos — como distância percorrida, consumo de combustível e tempo de operação. Em problemas reais, a obtenção da rota ótima torna-se, muitas vezes, inviável devido à alta complexidade combinatória envolvida, o que demanda alternativas de solução eficientes e escaláveis. Nesse contexto, propõe-se o uso de uma abordagem baseada em algoritmos genéticos, que, embora não garantam a otimalidade global da solução, são capazes de gerar rotas viáveis e com bons resultados práticos. Além de apresentar um modelo funcional, este trabalho busca suprir uma lacuna comum em produções acadêmicas: a falta de clareza visual e detalhamento construtivo das etapas de formulação matemática. Dessa forma, pretende-se oferecer uma base acessível e concreta para estudantes e pesquisadores que desejam se aprofundar no tema e evoluir para aplicações mais robustas e realistas.

Palavras-chave: Roteamento de Veículos, Frota Heterogênea, Algoritmos Genéticos, Otimização Logística, Formulação Matemática.

Abstract

This work presents an introductory and didactic approach to the Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem (HFVRP) through a simplified example that allows for a step-by-step visualization of the construction of constraints and the objective function aimed at minimizing logistical costs—such as travel distance, fuel consumption, and operating time. In real-world scenarios, finding the optimal route often becomes unfeasible due to the high combinatorial complexity involved, which demands efficient and scalable solution alternatives. In this context, a genetic algorithm-based approach is proposed, which, although it does not guarantee global optimality, can generate feasible routes with good practical results. In addition to presenting a functional model, this work aims to address a common gap in academic literature: the lack of visual clarity and detailed construction of the mathematical formulation steps. Thus, it intends to offer an accessible and concrete foundation for students and researchers who wish to delve deeper into the topic and evolve toward more robust and realistic applications.

Key-words: Vehicle Routing, Heterogeneous Fleet, Genetic Algorithms, Logistic Optimization, Mathematical Formulation.

Lista de Figuras

3.1	Grafo com 3 Clientes	12
3.2	Grafo com Depósitos 0 e 4 e Clientes	13
3.3	Grafo Depósitos e Clientes com 0 custo entre Depósitos	14
3.4	Variável de decisão x_{ijk}	15
3.5	Ilustração $c_{ijk}x_{ijk}$	16
3.6	Rota 0-3-2-40-1-4	17
3.7	Rota 0-3-40-1-2-4	18
3.8	Rota 3-2-0-2-4	19
4.1	Restrição 1	20
4.2	Exemplo Restrição 1	21
4.3	Restrição 2	22
4.4	Exemplo Restrição 2	22
4.5	Entradas no nó 2	23
4.6	Saídas do nó 2	23
4.7	Exemplo restrição 4	24
4.8	Grafo com 6 Clientes	25
4.9	Rota 0-3-2-40-1-4	30
4.10	Exemplo vetores de tempo	30
4.11	Exemplo $t_{ij} * x_{ijk}$	31
4.12	Rota 0-1-2-40-3-4	32
4.13	Rotas com demanda d_i	33
5.1	Fluxograma do processo evolutivo para criação de novas rotas na população	35
6.1	Valores da Função de Aptidão com todos elementos	37
6.2	Algoritmo de novos filhos	39

Lista de Tabelas

3.1	Matriz custo c_{ij1} , veículo 1	14
3.2	Matriz custo c_{ij2} , veículo 2	14
6.1	População inicial e função de aptidão dos indivíduos	36
6.2	Atribuindo range para o sorteamento	38
6.3	Indivíduos sorteados	38
6.4	Indivíduo sorteado e nova mutação	39
6.5	Selecionando os menos aptos	40
6.6	Aptidão dos descendentes F_3 e F_4	40
6.7	Nova seleção com Aptidão dos indivíduos	40

Sumário

Lista de Ilustrações	5
Lista de Tabelas	6
1 Introdução	8
2 Referencial Teórico	9
3 Formulação Matemática para o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea	10
4 Construindo Restrições	20
4.1 RESTRIÇÃO 1 - Os Veículos utilizados saem do Depósito - Nó 0	20
4.2 RESTRIÇÃO 2 - Os Veículos retornam ao Depósito - Nó 4	21
4.3 RESTRIÇÃO 3 - Tudo que entra sai	23
4.4 RESTRIÇÃO 4 - Cada Cliente é atendido somente por um veículo	24
4.5 RESTRIÇÃO 5 - Eliminação de Sub-Rotas	28
4.6 RESTRIÇÃO 6 - Tempo total de duração da rota	29
4.7 RESTRIÇÃO 7 - Capacidade dos veículos	31
5 Algoritmo Genético	34
5.1 Etapas de um Algoritmo Genético	34
5.2 Vantagens e Desvantagens dos Algoritmos Genéticos	35
5.3 Fluxograma do método proposto	35
6 Uma Prova Conceitual do Algoritmo Genético para a Resolução do Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea (PRVFH).	36
6.1 População Inicial	36
6.2 Estratégia de Seleção dos Pares (para realização dos cruzamentos)	37
6.3 Método de Seleção dos Pares	37
6.4 Estratégias para o Cruzamento	38
6.5 Mutação dos Genes (Como selecionar os indivíduos que sofrerão mutação)	39
6.6 Estratégia de Substituição da População	39
6.7 Condição de Parada	40

1 Introdução

Problemas complexos do mundo real podem ser solucionados por meio de softwares disponíveis ou pelo desenvolvimento de algoritmos eficientes de solução. Com a crescente utilização de ferramentas quantitativas nos sistemas produtivos, torna-se imprescindível o domínio de fundamentos teóricos matemáticos. Assim, conceitos matemáticos, quando corretamente aplicados, constituem a base para o desenvolvimento de técnicas robustas, capazes de oferecer soluções eficazes para os desafios encontrados na resolução de problemas complexos. É a integração entre teoria e prática que revelar-se-á essencial para enfrentar tais dificuldades.

Nesse contexto, o presente trabalho faz um estudo sobre a modelagem, formulação matemática e os fundamentos teóricos encontrados nas técnicas de solução que são aplicadas ao Problema de Roteamento de Veículos (*PRV*), um problema de natureza combinatória, com diversas aplicações, como no projeto de circuitos integrados, roteamento de veículos, programação da produção e robótica.

Devido à explosão combinatória inerente à resolução de problemas de Programação Linear Inteira (*PLI*), como no caso do *PRV*, as abordagens dividem-se em duas categorias principais: os métodos exatos e os métodos heurísticos de solução. Em problemas logísticos complexos como o roteamento de veículos, a busca por soluções de qualidade viável impõe uma escolha entre a exatidão e a eficiência. Enquanto os métodos exatos oferecem rigor matemático, os heurísticos revelam-se imprescindíveis frente à realidade prática, onde o tempo e a adaptabilidade se tornam diferenciais estratégicos.

De acordo com [Loesch e Hein \(1999\)](#), encontrar o equilíbrio entre eficiência e eficácia implica em reduzir a árvore de busca de soluções. As heurísticas atuam nesse sentido, orientando o processo de busca de forma mais direcionada, mesmo que eventualmente deixem de considerar algumas alternativas promissoras. Com uma boa heurística, é possível alcançar soluções satisfatórias para problemas complexos, como o *PRV*, dentro de tempos computacionais aceitáveis.

Este trabalho tem por objetivo geral traduzir o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea (*PRVFH*), uma variante do problema *PRV*, em uma representação matemática específica, utilizando variáveis, funções e restrições. Será mostrado como o problema apresenta significativa complexidade computacional, sendo classificado como um problema NP-difícil, isto é, o espaço de busca pela solução cresce exponencialmente com o aumento do número de clientes, rotas ou restrições envolvidas. Além disso, o trabalho tem como objetivo específico apresentar uma prova conceitual do Algoritmo Genético, uma técnica de solução heurística para o problema que, ainda sem a garantia de otimalidade, é capaz de fornecer soluções eficientes em tempo computacional razoável.

A importância do trabalho é justificada pelo foco especial dado na tradução da formulação matemática do *PRVFH*, onde a facilidade de compreensão do modelo não poderá ser confundida com a sua complexidade de solução. Também, pela importância do Algoritmo Genético, método heurístico de solução para o problema, inspirado na evolução das espécies, fundamental para a obtenção de soluções viáveis em cenários reais, conciliando qualidade e eficiência computacional.

2 Referencial Teórico

O Problema de Roteamento de Veículos (PRV) foi formalmente introduzido por [Dantzig e Ramser \(1959\)](#), como uma generalização do clássico Problema do Caixeiro Viajante (PCV). Seu objetivo original consistia em otimizar o fornecimento de gasolina para postos de serviço, estabelecendo rotas que minimizassem os custos operacionais.

[Laporte \(2010\)](#) aponta que o PCV representa a base teórica sobre a qual o PRV foi desenvolvido. A principal diferença reside na multiplicidade de veículos e nas restrições operacionais, como capacidades, janelas de tempo e demandas diferenciadas entre os clientes.

Diversas abordagens têm sido aplicadas à resolução do PRV ao longo das últimas décadas. As técnicas exatas, embora precisas, tornam-se inviáveis em casos com grande volume de dados devido ao crescimento exponencial da complexidade computacional. Por esse motivo, heurísticas e metaheurísticas se destacam como alternativas viáveis em contextos práticos.

Dentre as técnicas mais exploradas na literatura, destacam-se a *Variable Neighborhood Search* (VNS) e o *Simulated Annealing* (SA). [Morais \(2020\)](#) empregaram ambas as estratégias na resolução de instâncias reais do problema, observando bom desempenho prático. A VNS, proposta por [Mladenovic e Hansen \(1997\)](#), busca escapar de ótimos locais por meio de variações sistemáticas na vizinhança de soluções. Já o SA, originalmente descrito por [Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi \(1983\)](#), simula o processo físico de recozimento térmico como analogia para explorar soluções.

[Morelli e Reis \(2021\)](#) comparam as abordagens VNS e *Iterated Local Search* (ILS), destacando que a escolha da técnica deve considerar a topologia do espaço de busca e o comportamento das soluções vizinhas. O ILS, segundo [Souza \(2009\)](#), emprega perturbações estruturadas para gerar soluções iniciais mais promissoras.

Além disso, [Miranda \(2021\)](#) demonstraram a aplicabilidade do PRV em um contexto real, ao aplicar uma heurística simples — o algoritmo do vizinho mais próximo — em uma empresa local. A aplicação resultou em uma economia de aproximadamente 23% nos custos de transporte, reforçando a viabilidade prática dessas técnicas.

Em cenários mais exigentes, [Morais \(2020\)](#) propuseram uma abordagem híbrida (VNS_SA), combinando a exploração intensiva do SA com a flexibilidade adaptativa da VNS. Os resultados mostraram ganhos significativos em problemas com elevada complexidade.

Por fim, [Leite e Gomes \(2017\)](#) compararam a Heurística do Vizinho Mais Próximo (HVMP) com a Programação Linear Inteira (PLI). Seus estudos apontaram que, embora heurísticas simples sejam rápidas, podem gerar sobrecarga em parte da frota. Já a PLI, apesar de mais custosa computacionalmente, propicia uma distribuição de cargas mais balanceada.

Assim, a literatura evidencia que a escolha do método de solução para o PRV deve levar em conta as características da aplicação prática, o tamanho do problema e o grau de precisão exigido. Métodos híbridos e adaptativos vêm se consolidando como estratégias robustas para enfrentar as limitações computacionais dos métodos tradicionais.

3 Formulação Matemática para o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea

O problema de roteamento de veículos com frota heterogênea (*PRVFH*) é uma variação do problema clássico de roteamento de veículos (*PRV*), onde a frota de veículos não é homogênea, ou seja, os veículos possuem capacidades e características diferentes. O objetivo é otimizar as rotas para minimizar custos, considerando as particularidades de cada tipo de veículo na frota.

O problema de roteamento é modelado através de um grafo $G = \{N, A\}$, onde N é o conjunto de nós e A o conjunto de arestas. O conjunto de nós do grafo G inclui os depósitos e os n clientes. Será denotado por C o conjunto de n clientes, por K o conjunto de veículos e por S o conjunto de subrotas. Assim, tem-se:

As **Variáveis de Decisão** para o problema são binárias onde:

$$x_{ijk} = 1 \quad \text{se o cliente } j \text{ sucede a cliente } i \text{ no veículo } k$$

$$x_{ijk} = 0 \quad \text{caso contrário.}$$

A **Função Objetivo** (custo total da rota) é:

$$\text{Min} \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ijk} x_{ijk}$$

Onde c_{ijk} é o custo de ir do nó i para o nó j no veículo k . Frequentemente está associado ao tempo ou a distância percorrida por um veículo que inicia uma rota no depósito $i = 0$, percorre os clientes j e termina no depósito $j = n + 1$.

As Restrições para o problema são:

1 – Cada veículo k , quando realiza uma rota, deverá iniciar sua rota no depósito de origem, denotado por 0, garantindo como ponto de partida o depósito 0.

$$\sum_{(0,j) \in A} x_{0jk} = 1 \quad \forall k \in K$$

2 – Cada veículo deverá terminar sua rota no depósito de chegada, denotado por $n + 1$, onde n é o número de clientes do Conjunto C . Essa restrição garante o término da rota no depósito. Na prática, os depósitos 0 e $n + 1$ são coincidentes.

$$\sum_{(i,n+1) \in A} x_{i(n+1)k} = 1 \quad \forall k \in K$$

3 – Continuidade da visita ao cliente: Se um veículo atende (chega a) um cliente, ele obrigatoriamente,

depois de atender o cliente, segue para atender o próximo cliente. Em outras palavras, tudo que entra, precisa sair, garantindo a continuidade da rota e evitando estacionamentos indefinidos.

$$\sum_{(i,h) \in A} x_{ihk} - \sum_{(h,j) \in A} x_{hjk} = 0, \quad \forall h \in C, \forall k \in K$$

4 – Atendimento único por cliente: Cada cliente deverá ser atendido uma única vez por exatamente um veículo, de forma a evitar duplicidade de atendimento e garantir a cobertura total da demanda.

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1, \quad \forall i \in C$$

5 – Eliminação de sub-rotas: Devem ser evitados ciclos fechados entre subconjuntos de clientes que não envolvam os depósitos, garantindo rotas viáveis, conectadas e operacionais. Para restrição de exclusão de subrotas tem-se:

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1, \quad S \subseteq C, 2 \leq |S| \leq n, \forall k \in K$$

Onde S denota um conjunto de vértices que formam uma subrota (um ciclo) no grafo, sendo $|S|$ a cardinalidade do conjunto S .

6 – Restrição de tempo máximo da rota: Cada rota deve respeitar um limite máximo de tempo (ou distância) permitido, considerando a soma dos tempos de deslocamento e atendimento, de modo a refletir restrições operacionais e de jornada.

$$\sum_{i \in \mathbb{N} \setminus \{n+1\}} \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} t_{ij} x_{ijk} \leq D, \quad \forall k \in K$$

7 – Restrição de capacidade dos veículos: A carga total atendida por cada veículo não pode exceder sua capacidade máxima, respeitando os limites físicos e legais do transporte.

$$\sum_{i \in C} \left(d_i \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} x_{ijk} \right) \leq Q_k, \quad \forall k \in K$$

Logo, tem-se a seguinte Formulação Matemática para o Problema *PRVFH*.

$$\text{Min} \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ijk} x_{ijk}$$

s.a

$$\sum_{(0,j) \in A} x_{0jk} = 1 \quad \forall k \in K \tag{3.1}$$

$$\sum_{(i,n+1) \in A} x_{i(n+1)k} = 1 \quad \forall k \in K \tag{3.2}$$

$$\sum_{(i,h) \in A} x_{ihk} - \sum_{(h,j) \in A} x_{hjk} = 0, \quad \forall h \in C, \forall k \in K \tag{3.3}$$

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1, \quad \forall i \in C \quad (3.4)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1, \quad S \subseteq C, \quad 2 \leq |S| \leq n, \quad \forall k \in K \quad (3.5)$$

$$\sum_{i \in N \setminus \{n+1\}} \sum_{j \in N \setminus \{0\}} t_{ij} x_{ijk} \leq D, \quad \forall k \in K \quad (3.6)$$

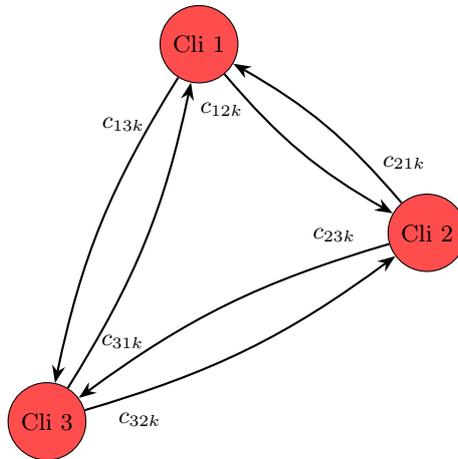
$$\sum_{i \in C} \left(d_i \sum_{j \in N \setminus \{0\}} x_{ijk} \right) \leq Q_k, \quad \forall k \in K \quad (3.7)$$

A formulação matemática para o problema do *PRVFH* será traduzida utilizando uma representação através de grafos. Será mostrado de forma detalhada a explosão combinatorial que dificulta a resolução por métodos exatos para problemas de grande porte. Seja um grafo $G = \{N, A\}$ onde N representa o conjunto de nós e A o conjunto de arestas do grafo.

O problema de roteamento é modelado através de um grafo G . Os elementos do conjunto $N = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ são os nós 0 e 4 (depósito), onde o depósito 0 indica o início da rota e o depósito 4 indica o final da rota. E os nós 1, 2 e 3 que são os clientes. O conjunto de arestas $A = \{(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4)\}$. Também, o conjunto $C = \{1,2,3\}$ representando os 3 clientes e o conjunto $K = \{1,2\}$ representando os 2 veículos. A seguir, tem-se a representação

Grafo Completo \mapsto Nós 1, 2 e 3 referente aos 3 Clientes do problema.

Figura 3.1: Grafo com 3 Clientes



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$C = \{1, 2, 3\}$$

$$N = \{1, 2, 3\}$$

Número de possibilidades de conexões:

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$$

Para representar os veículos utilizados no problema, foram adotados dois ícones distintos de caminhões com cores diferentes:

-  **Veículo 1** – representado na cor azul clara (cyan)
-  **Veículo 2** – representado na cor laranja

Essas cores foram utilizadas na legenda da figura e também ao lado esquerdo do grafo para facilitar a identificação visual dos veículos durante os deslocamentos.

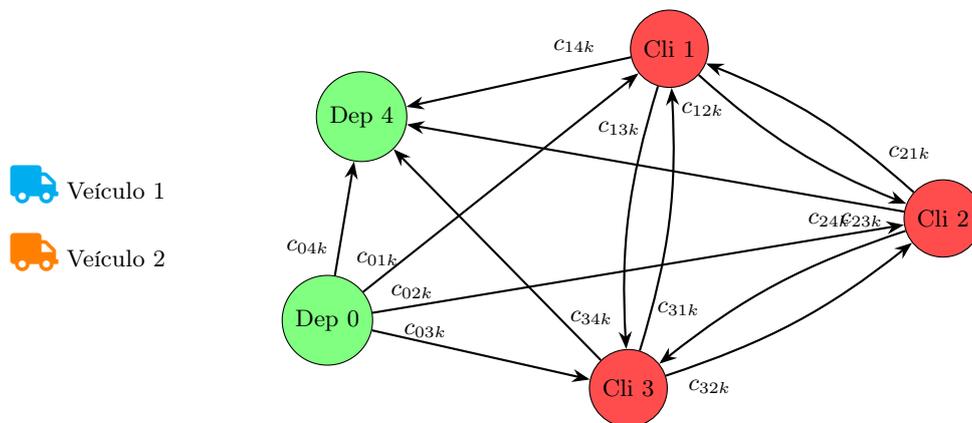
Além disso, ainda que no modelo seja considerado apenas **um depósito**, o grafo foi construído com dois nós distintos para representar pontos de partida e chegada.

- **Dep 0** – nó de saída, localizado na base do grafo
- **Dep 4** – nó de chegada, posicionado no topo do grafo

O artifício matemático considerado facilita a formulação e a análise do problema. No entanto, em uma aplicação prática no mundo real, esses dois depósitos podem representar o **mesmo local físico**, assumindo que o veículo retorna ao ponto de origem.

Os clientes são representados por nós vermelhos, sendo identificados pelo conjunto $C=\{1,2,3\}$, distribuídos ao longo do grafo para representar diferentes rotas.

Figura 3.2: Grafo com Depósitos 0 e 4 e Clientes



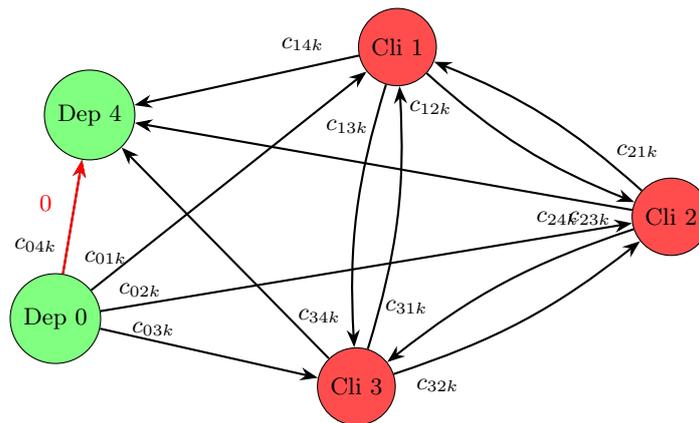
Fonte: Elaborado pelo autor.

TABELA DE CUSTOS

A tabela a seguir mostra o custo de deslocamento do veículo k nos arcos (i, j) .

	0	1	2	3	4
0	-	c_{01k}	c_{02k}	c_{03k}	c_{04k}
1	-	-	c_{12k}	c_{13k}	c_{14k}
2	-	c_{21k}	-	c_{23k}	c_{24k}
3	-	c_{31k}	c_{32k}	-	c_{34k}
4	-	-	-	-	-

Figura 3.3: Grafo Depósitos e Clientes com 0 custo entre Depósitos



Fonte: Elaborado pelo autor.

Considerando o conjunto de arestas do grafo

$$A = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$$

Então, para 2 veículos, as matrizes de custo são:

Matriz de custos c_{ijk} dos veículos 1 e 2

Tabela 3.1: Matriz custo c_{ij1} , veículo 1

	0	1	2	3	4
0	-	18.5	23.1	15.9	0
1	-	-	4.1	4.5	20.6
2	-	5.6	-	8.4	23.4
3	-	3.4	7.5	-	15.2
4	-	-	-	-	-



Tabela 3.2: Matriz custo c_{ij2} , veículo 2

	0	1	2	3	4
0	-	22.2	27.7	19.1	0
1	-	-	4.9	5.4	24.7
2	-	6.7	-	10.1	28.1
3	-	4.1	9.0	-	18.2
4	-	-	-	-	-



Fonte: Elaborado pelo autor.

A distância do Nó 0 para o Nó 4 não é uma distância real, podendo ser atribuído o valor 0.

Nesse caso, não temos um custo.

O arco indo do Nó 0 para o Nó 4 significa que o veículo **não foi utilizado**.

VARIÁVEL DE DECISÃO DO MODELO

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A, \quad \forall k \in K$$

$$K = \{1, 2\}$$

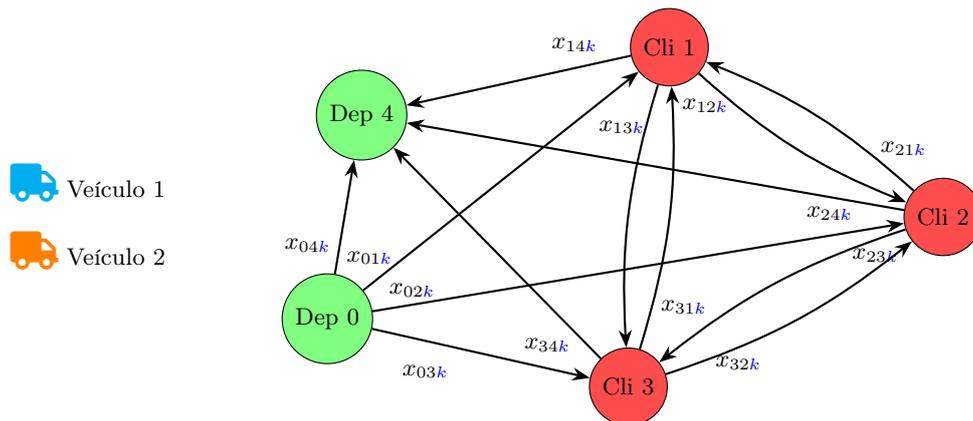
Para $k = 1$:						Para $k = 2$:					
	0	1	2	3	4		0	1	2	3	4
0	—	x_{011}	x_{021}	x_{031}	x_{041}	0	—	x_{012}	x_{022}	x_{032}	x_{042}
1	—	—	x_{121}	x_{131}	x_{141}	1	—	—	x_{122}	x_{132}	x_{142}
2	—	x_{211}	—	x_{231}	x_{241}	2	—	x_{212}	—	x_{232}	x_{242}
3	—	x_{311}	x_{321}	—	x_{341}	3	—	x_{312}	x_{322}	—	x_{342}
4	—	—	—	—	—	4	—	—	—	—	—

Definição da variável x_{ijk}

$x(i, j, k) = 1$ se o veículo k será utilizado para ir do nó i para o nó j e 0 caso contrário.

Uma decisão (Sim/Não)

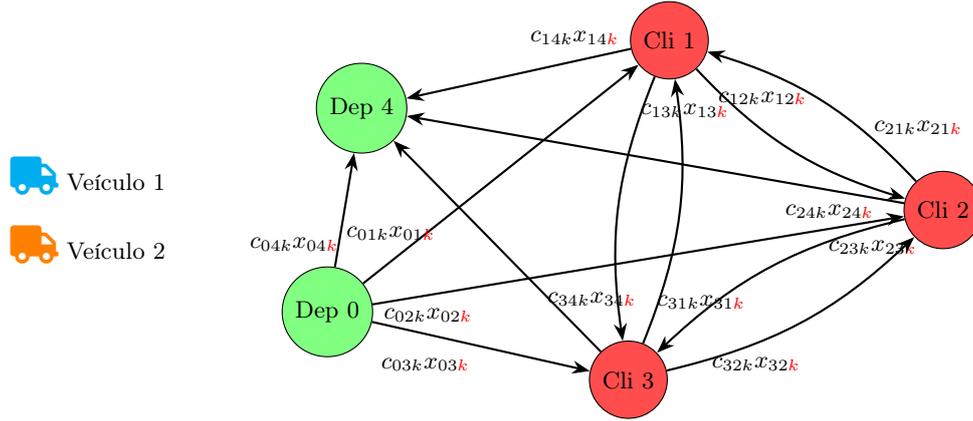
Figura 3.4: Variável de decisão x_{ijk}



Fonte: Elaborado pelo autor.

VARIÁVEL DE DECISÃO MULTIPLICADA PELOS CUSTOS

Figura 3.5: Ilustração $c_{ijk}x_{ijk}$



Fonte: Elaborado pelo autor.

FUNÇÃO OBJETIVO

$$\begin{aligned} \text{Min } z = & c_{011}x_{011} + c_{021}x_{021} + c_{031}x_{031} + c_{041}x_{041} + c_{121}x_{121} + c_{131}x_{131} + \\ & c_{141}x_{141} + c_{211}x_{211} + c_{231}x_{231} + c_{241}x_{241} + c_{311}x_{311} + c_{321}x_{321} + c_{341}x_{341} + \\ & c_{012}x_{012} + c_{022}x_{022} + c_{032}x_{032} + c_{042}x_{042} + c_{122}x_{122} + c_{132}x_{132} + c_{142}x_{142} + \\ & c_{212}x_{212} + c_{232}x_{232} + c_{242}x_{242} + c_{312}x_{312} + c_{322}x_{322} + c_{342}x_{342} \end{aligned}$$

Assim, tem-se a equação do somatório do produto dos custos pela variável de decisão

$$\text{Min } \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ijk}x_{ijk} \quad (3.8)$$

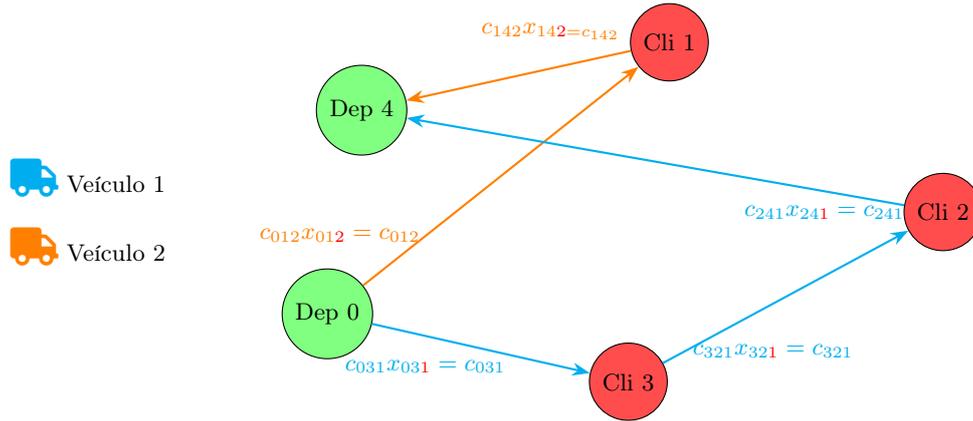
$$s.a \mapsto x_{ijk} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in A, \forall k \in K$$

Testando Soluções

Solução 1:

- Veículo 1: 0-3-2-4
- Veículo 2: 0-1-4

Figura 3.6: Rota 0-3-2-40-1-4



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\begin{aligned}
 \text{Min } z = & \cancel{c_{011}x_{011}} + \cancel{c_{021}x_{021}} + c_{031}x_{031} + \cancel{c_{041}x_{041}} + \cancel{c_{121}x_{121}} + \cancel{c_{131}x_{131}} + \\
 & \cancel{c_{141}x_{141}} + \cancel{c_{211}x_{211}} + \cancel{c_{231}x_{231}} + c_{241}x_{241} + \cancel{c_{311}x_{311}} + c_{321}x_{321} + \cancel{c_{341}x_{341}} + \\
 & c_{012}x_{012} + \cancel{c_{022}x_{022}} + \cancel{c_{032}x_{032}} + \cancel{c_{042}x_{042}} + \cancel{c_{122}x_{122}} + \cancel{c_{132}x_{132}} + c_{142}x_{142} + \\
 & \cancel{c_{212}x_{212}} + \cancel{c_{232}x_{232}} + \cancel{c_{242}x_{242}} + \cancel{c_{312}x_{312}} + \cancel{c_{322}x_{322}} + \cancel{c_{342}x_{342}}
 \end{aligned}$$

Cálculo de z :

$$z = c_{031}x_{031} + c_{241}x_{241} + c_{321}x_{321} + c_{012}x_{012} + c_{142}x_{142}$$

$$z = c_{031} + c_{241} + c_{321} + c_{012} + c_{142}$$

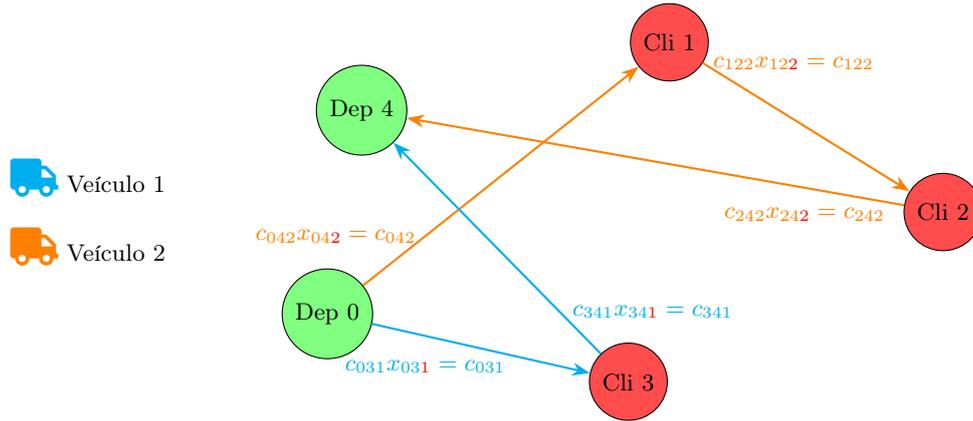
$$z = 15.9 + 23.4 + 7.5 + 22.2 + 24.7$$

$$z = 93.7$$

Solução 2:

- Veículo 1: 0-3-1-2-4
- Veículo 2: 0-4

Figura 3.7: Rota 0-3-40-1-2-4



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\begin{aligned}
 \text{Min } z = & \cancel{c_{011}x_{011}} + \cancel{c_{021}x_{021}} + c_{031}x_{031} + \cancel{c_{041}x_{041}} + \cancel{c_{121}x_{121}} + \cancel{c_{131}x_{131}} + \\
 & \cancel{c_{141}x_{141}} + \cancel{c_{211}x_{211}} + \cancel{c_{231}x_{231}} + c_{241}x_{241} + \cancel{c_{311}x_{311}} + \cancel{c_{321}x_{321}} + c_{341}x_{341} + \\
 & c_{012}x_{012} + \cancel{c_{022}x_{022}} + \cancel{c_{032}x_{032}} + \cancel{c_{042}x_{042}} + c_{122}x_{122} + \cancel{c_{132}x_{132}} + \cancel{c_{142}x_{142}} + \\
 & \cancel{c_{212}x_{212}} + \cancel{c_{232}x_{232}} + c_{242}x_{242} + \cancel{c_{312}x_{312}} + \cancel{c_{322}x_{322}} + \cancel{c_{342}x_{342}}
 \end{aligned}$$

Cálculo de z :

$$z = c_{031}x_{031} + c_{341}x_{341} + c_{012}x_{012} + c_{122}x_{122} + c_{242}x_{242}$$

$$z = c_{031} + c_{341} + c_{012} + c_{122} + c_{242}$$

$$z = 15.9 + 15.2 + 22.2 + 4.9 + 28.1$$

$$z = 86.3$$

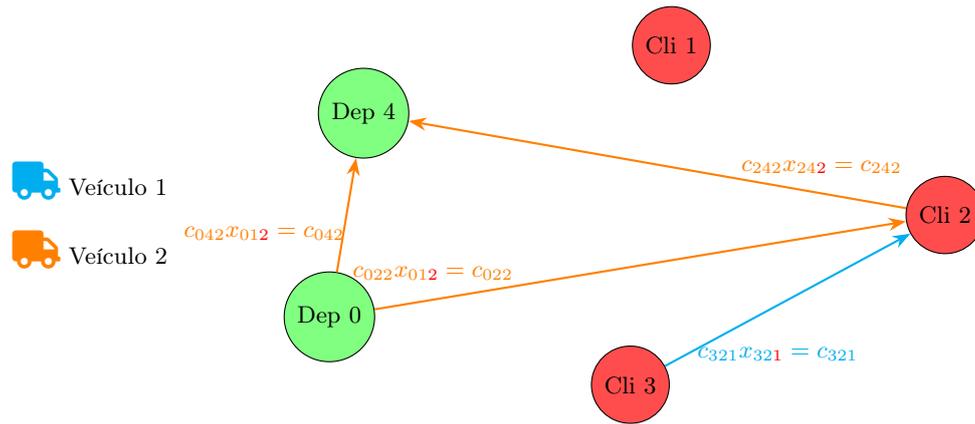
Solução 3 (não desejada):

- Veículo 1: 3-2
- Veículo 2: 0-2-4
- Veículo 2: 0-4

Problemas:

- Veículo 1 não sai do depósito nem retorna a ele
- O cliente 1 não é atendido
- O cliente 2 é atendido duas vezes
- O veículo 2 faz duas rotas

Figura 3.8: Rota 3-2-0-2-4



Fonte: Elaborado pelo autor.

4 Construindo Restrições

- *Partindo do depósito de início da rota.*
- *Voltando ao depósito de término da rota.*
- *Tudo que entra, sai.*
- *Cada cliente é atendido por um só veículo.*
- *Eliminação de sub-rotas.*
- *Tempo total de uso dos veículos.*
- *Capacidade de carga dos veículos.*

4.1 RESTRIÇÃO 1 - Os Veículos utilizados saem do Depósito - Nó 0

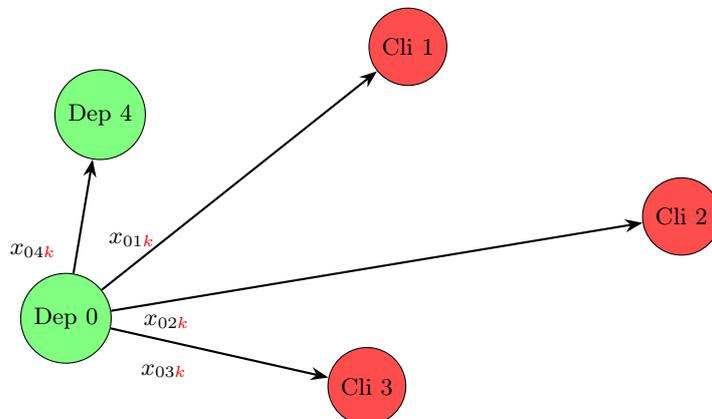
 $\mapsto x_{011} + x_{021} + x_{031} + x_{041} = 1$

 $\mapsto x_{012} + x_{022} + x_{032} + x_{042} = 1$

Restrição 1

$$\sum_{(0,j) \in A} x_{0jk} = 1, \quad \forall k \in K \quad (4.1)$$

Figura 4.1: Restrição 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplificando a Restrição 1

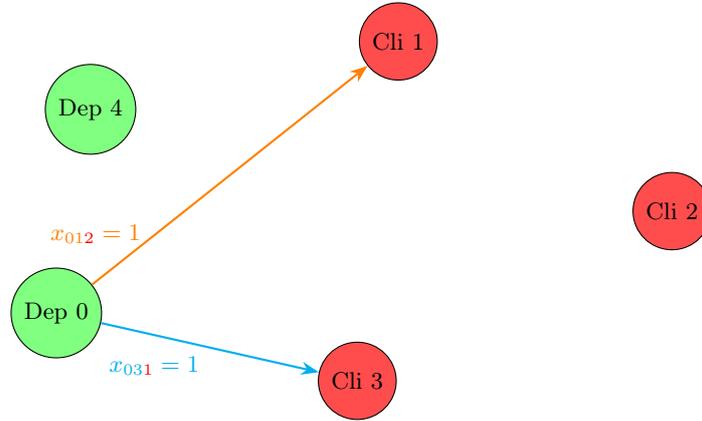
Caminhão 1

$$\begin{aligned}x_{011} + x_{021} + x_{031} + x_{041} &= 1 \\ 0 + 0 + 1 + 0 &= 1\end{aligned}$$

Caminhão 2

$$\begin{aligned}x_{012} + x_{022} + x_{032} + x_{042} &= 1 \\ 1 + 0 + 0 + 0 &= 1\end{aligned}$$

Figura 4.2: Exemplo Restrição 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa restrição garante que somente um cliente j , com $j=1,2,3$ é visitado quando o veículo k sai do depósito $i=0$.

4.2 RESTRIÇÃO 2 - Os Veículos retornam ao Depósito - Nó 4

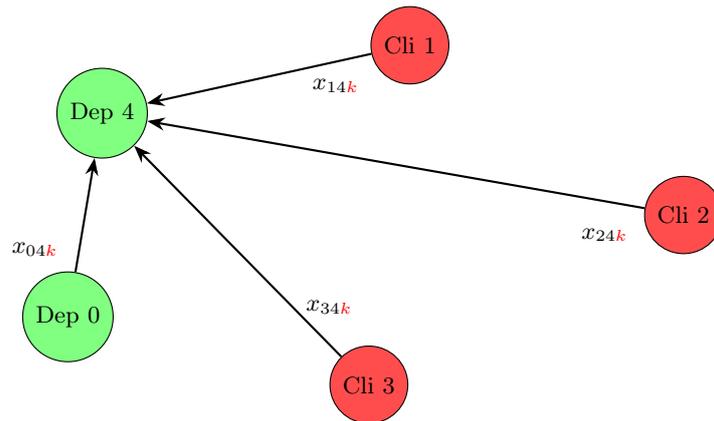
 $\mapsto x_{041} + x_{141} + x_{241} + x_{341} = 1$

 $\mapsto x_{042} + x_{142} + x_{242} + x_{342} = 1$

Restrição 2

$$\sum_{(i,n+1) \in A} x_{i(n+1)k} = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.2)$$

Figura 4.3: Restrição 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplificando a Restrição 2

Caminhão 1

$$x_{041} + x_{141} + x_{241} + x_{341} = 1$$

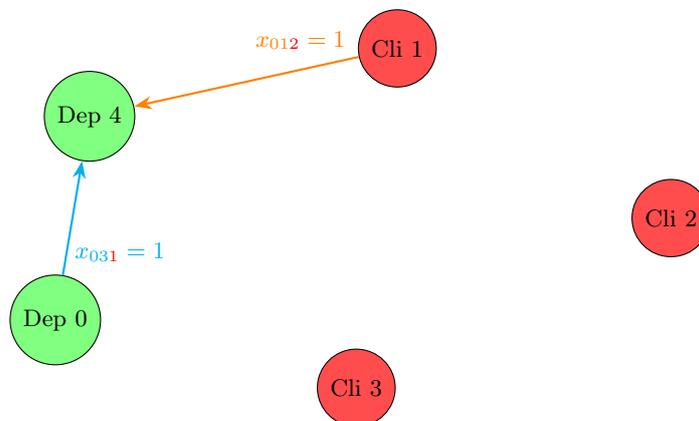
$$0 + 1 + 0 + 0 = 1$$

Caminhão 2

$$x_{042} + x_{142} + x_{242} + x_{342} = 1$$

$$1 + 0 + 0 + 0 = 1$$

Figura 4.4: Exemplo Restrição 2



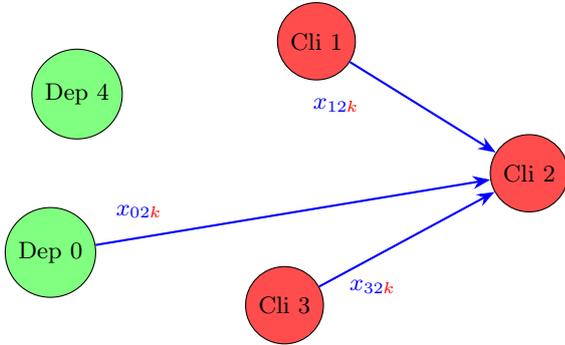
Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa restrição garante que o veículo k retorna ao depósito 4 somente a partir de um cliente i , com $i = 1, 2, 3$. Quando a variável de decisão $x_{04k} = 1$, então o veículo k não saiu do depósito.

$$x_{04k} + x_{14k} + x_{24k} + x_{34k} = 1, \quad \forall k \in K = \{1, 2\}$$

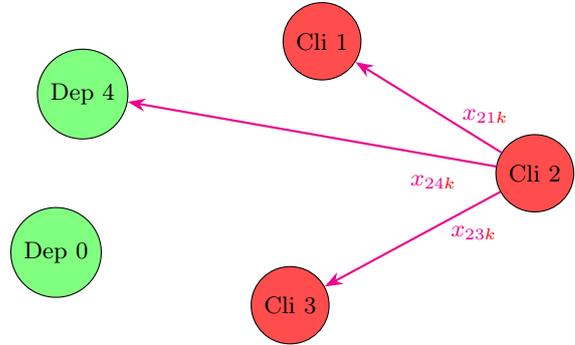
4.3 RESTRIÇÃO 3 - Tudo que entra sai

Figura 4.5: Entradas no nó 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.6: Saídas do nó 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

Restrição 3: Tudo que entra no nó 2 sai do nó 2, também escrita como uma diferença (lei de conservação de fluxo), ou seja:

$$x_{02k} + x_{12k} + x_{32k} = x_{21k} + x_{23k} + x_{24k}$$

$$\sum_{(i,h) \in A} x_{ihk} = \sum_{(h,j) \in A} x_{hjk}, \quad \forall h \in C, \forall k \in K$$

$$\sum_{(i,h) \in A} x_{ihk} - \sum_{(h,j) \in A} x_{hjk} = 0, \quad \forall h \in C, \forall k \in K \quad (4.3)$$

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$C = \{1, 2, 3\}$$

$$K = \{1, 2\}$$

$$A = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$$

Exemplificando o sistema para cada veículo:

$$\begin{cases} \text{1} & x_{011} + x_{211} + x_{311} - x_{121} - x_{131} - x_{141} = 0 \\ \text{2} & x_{021} + x_{121} + x_{321} - x_{231} - x_{241} - x_{341} = 0 \\ \text{3} & x_{031} + x_{131} + x_{231} - x_{311} - x_{321} - x_{341} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{1} & x_{012} + x_{212} + x_{312} - x_{122} - x_{132} - x_{142} = 0 \\ \text{2} & x_{022} + x_{122} + x_{322} - x_{212} - x_{232} - x_{242} = 0 \\ \text{3} & x_{032} + x_{132} + x_{232} - x_{312} - x_{322} - x_{342} = 0 \end{cases}$$

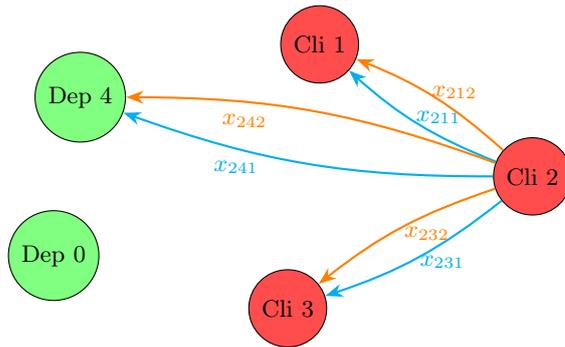
4.4 RESTRIÇÃO 4 - Cada Cliente é atendido somente por um veículo

Exemplificando para o Cliente 2.

$$\text{🚚} \rightarrow \text{2} \quad x_{211} + x_{231} + x_{241} + \cancel{x_{212}} + \cancel{x_{232}} + \cancel{x_{242}} = 1$$

$$\text{🚚} \rightarrow \text{2} \quad \cancel{x_{211}} + \cancel{x_{231}} + \cancel{x_{241}} + x_{212} + x_{232} + x_{242} = 1$$

Figura 4.7: Exemplo restrição 4



Fonte: Elaborado pelo autor.

Obs: O cliente 2 (nó 2) deve ser atendido por **apenas um veículo e uma única vez**.

Considerando que não há saída de veículos a partir do nó 4 (nó de chegada), existem exatamente **6 possibilidades de rota** envolvendo o atendimento ao nó 2.

Essas possibilidades são compostas por arcos direcionados do nó 2 para diferentes destinos, como ilustrado no grafo ao lado.

Construindo o somatório para todos os clientes:

$$\text{1} \quad x_{121} + x_{131} + x_{141} + x_{122} + x_{132} + x_{142} = 1$$

$$\text{2} \quad x_{211} + x_{231} + x_{241} + x_{212} + x_{232} + x_{242} = 1$$

$$\text{3} \quad x_{311} + x_{321} + x_{341} + x_{312} + x_{322} + x_{342} = 1$$

Então temos:

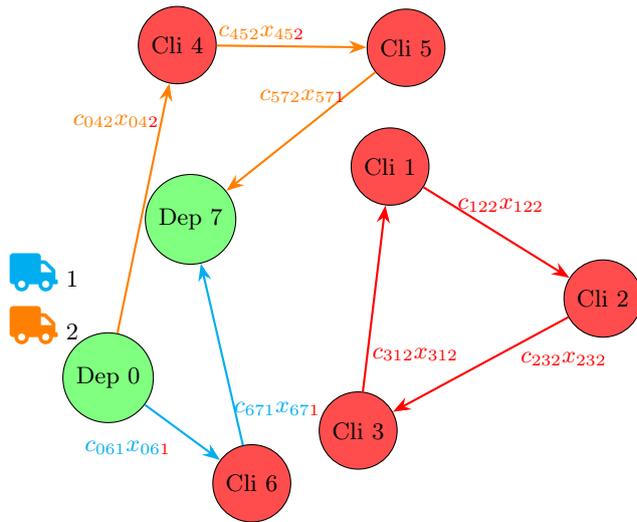
$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{C} \quad (4.4)$$

Falhas no Modelo Matemático

Vamos pegar como exemplo o seguinte grafo com 6 clientes e 2 depósitos:

$$\mathbf{C} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} \text{ e } \mathbf{D} = \{ 0, 7 \}$$

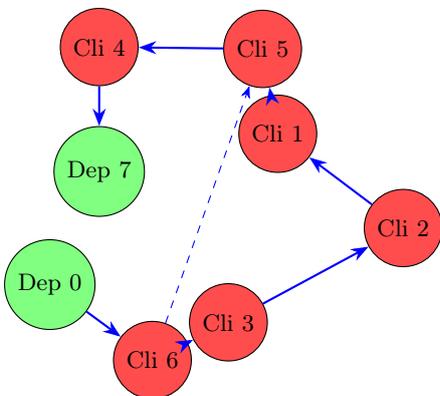
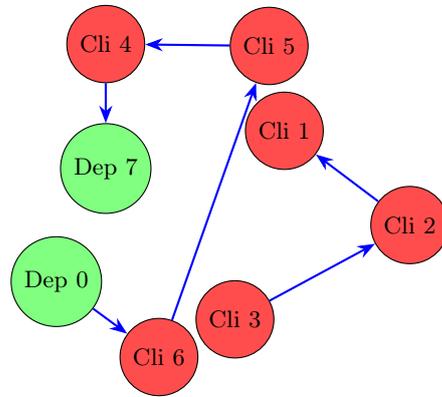
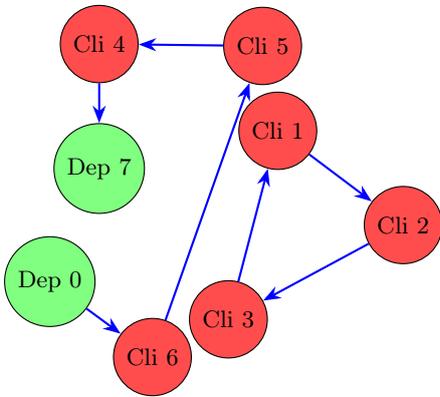
Figura 4.8: Grafo com 6 Clientes



Fonte: Elaborado pelo autor.

- Veículo $k = 1$, fazendo a Rota $0-6-7$
- Veículo $k = 2$, fazendo a Rota $0-4-5-7$
- O veículo 2 fica livre para fazer a subrota $3-2-1-3$ (Solução Inviável)
- O veículo 2 está saindo do depósito 0 , atendendo às restrições, no entanto existe uma subrota $3-2-1-3$, onde o veículo 2 está saindo do nó 3 .

Eliminação das Sub-Rotas



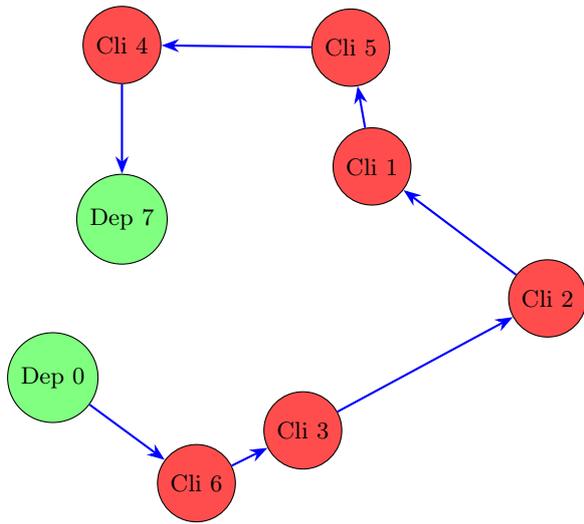
- Forçar a existência de dois arcos

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1,$$

$$S \subset \mathcal{C},$$

$$2 \leq |S| \leq n,$$

$$\forall k \in K$$



$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1, \quad |S| = 2$$

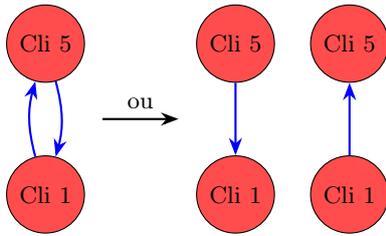
$$|S| = 3$$

$$S \subset \mathcal{C}, \quad |S| = 4$$

$$2 \leq |S| \leq 6, \quad |S| = 5$$

$$\forall k \in K \quad |S| = 6$$

Considerando $|S| = 2$



2 clientes

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$S = |2|$$

$$S = \{1, 5\}$$

$$x_{151} + x_{511} \leq |2| - 1$$

$$x_{151} + x_{511} \leq 1$$

Considerando Todas as Possibilidades

2 clientes

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$S = |\{2\}|$$

$$C = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{720}{48} = \mathbf{15}$$

$$S = \{1, 2\}$$

$$S = \{2, 3\}$$

$$S = \{3, 4\}$$

$$S = \{4, 5\}$$

$$S = \{5, 6\}$$

$$S = \{1, 3\}$$

$$S = \{2, 4\}$$

$$S = \{3, 5\}$$

$$S = \{4, 6\}$$

$$S = \{1, 4\}$$

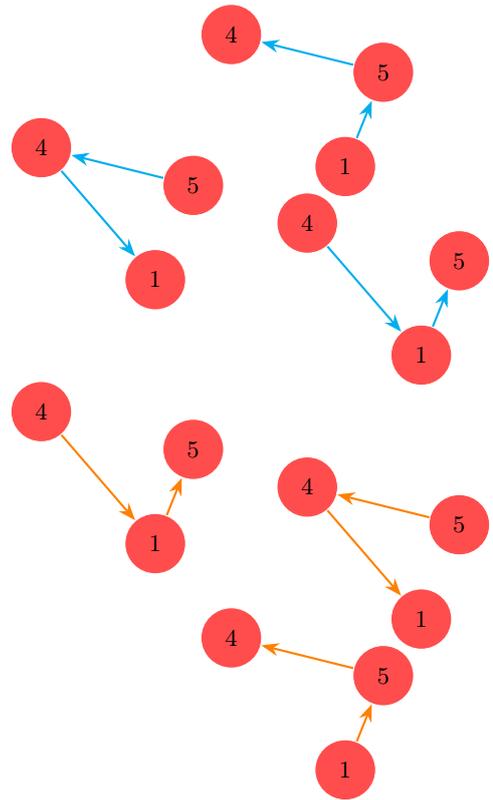
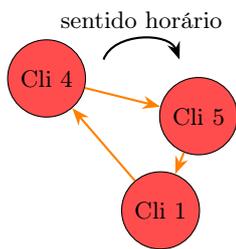
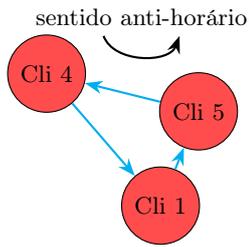
$$S = \{2, 5\}$$

$$S = \{3, 6\}$$

$$S = \{1, 5\}$$

$$S = \{2, 6\}$$

$$S = \{1, 6\}$$



Considerando $|S| = 3$

3 clientes

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$S = |\{3\}|$$

$$C = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{720}{36} = \mathbf{20}$$

$$S = \{1, 2, 3\}$$

$$S = \{2, 3, 4\}$$

$$S = \{3, 4, 5\}$$

$$S = \{4, 5, 6\}$$

$$S = \{1, 2, 4\}$$

$$S = \{2, 3, 5\}$$

$$S = \{3, 4, 6\}$$

$$S = \{1, 2, 5\}$$

$$S = \{2, 3, 6\}$$

$$S = \{3, 5, 6\}$$

$$S = \{1, 2, 6\}$$

$$S = \{2, 4, 5\}$$

$$S = \{1, 3, 4\}$$

$$S = \{2, 4, 6\}$$

$$S = \{1, 3, 5\}$$

$$S = \{2, 5, 6\}$$

$$S = \{1, 3, 6\}$$

$$S = \{1, 4, 5\}$$

$$S = \{1, 4, 6\}$$

$$S = \{1, 5, 6\}$$

Total de restrições para 6 clientes

$$\mathbf{2 \text{ clientes:}} \quad C = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{720}{48} = \boxed{15}$$

$$\mathbf{3 \text{ clientes:}} \quad C = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{720}{36} = \boxed{20}$$

$$\mathbf{4 \text{ clientes:}} \quad C = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{720}{48} = \boxed{15}$$

$$\mathbf{5 \text{ clientes:}} \quad C = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{6!}{5!(6-5)!} = \frac{720}{120} = \boxed{6}$$

$$\mathbf{6 \text{ clientes:}} \quad C = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{6!}{6!(6-6)!} = \frac{720}{720} = \boxed{1}$$

6 clientes

57 restrições por veículo!

4.5 RESTRIÇÃO 5 - Eliminação de Sub-Rotas

Exemplificando para 3 clientes

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1,$$

$$S \subset \mathcal{C},$$

$$2 \leq |S| \leq n,$$

$$\forall k \in K$$



$$\begin{cases} x_{121} + x_{211} \leq 1 \\ x_{131} + x_{311} \leq 1 \\ x_{231} + x_{321} \leq 1 \\ x_{121} + x_{211} + x_{131} + x_{311} + x_{231} + x_{321} \leq 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_{122} + x_{212} \leq 1 \\ x_{132} + x_{312} \leq 1 \\ x_{232} + x_{322} \leq 1 \\ x_{122} + x_{212} + x_{132} + x_{312} + x_{232} + x_{322} \leq 2 \end{cases}$$

$$C = \{1, 2, 3\}$$

$$K = \{1, 2\}$$

$$A = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), \\ (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$$

Todas as restrições até aqui

$$\text{Min } z = \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ijk} x_{ijk} \quad (4.5)$$

$$\sum_{(0,j) \in A} x_{0jk} = 1 \quad \forall k \in K \quad (1)$$

$$\sum_{(i,n+1) \in A} x_{i(n+1)k} = 1 \quad \forall k \in K \quad (2)$$

$$\sum_{(i,h) \in A} x_{ihk} - \sum_{(h,j) \in A} x_{hjk} = 0, \quad \forall h \in C, \forall k \in K \quad (3)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1, \quad \forall i \in C \quad (4)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1, \quad S \subseteq C, 2 \leq |S| \leq n, \forall k \in K \quad (5)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i,j) \in A, \forall k \in K \quad (4.6)$$

Cabe destacar que as restrições apresentadas até este ponto compõem a formulação clássica do Problema de Roteamento de Veículos (*PRV*), no qual se busca otimizar o atendimento a um conjunto de clientes por uma frota de veículos homogênea, respeitando limites básicos como unicidade de visita, balanceamento de carga e conectividade das rotas.

Entretanto, no contexto do Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea (*PRVFH*), essa formulação é expandida com a introdução de novas restrições que consideram características distintas dos veículos, como capacidades variadas, custos diferenciados e múltiplos depósitos. Essas extensões tornam o problema significativamente mais complexo do ponto de vista computacional, principalmente por aumentar o espaço de soluções viáveis e a dificuldade em encontrar soluções ótimas por métodos exatos.

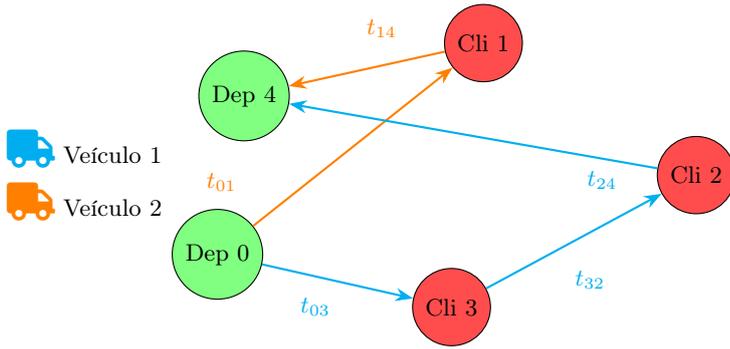
4.6 RESTRIÇÃO 6 - Tempo total de duração da rota

- t_{ij} → tempo de deslocamento entre o nó i e o nó j .
- D → tempo disponível para cada veículo.

Nesse caso todos os veículos têm o mesmo tempo disponível, caso contrário, D teria um índice k .

Tempo total de duração para uma determinada Rota

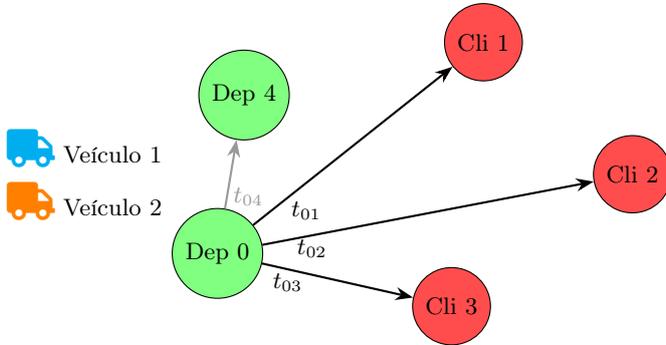
Figura 4.9: Rota 0-3-2-40-1-4



- Rota 1: $t_{03} + t_{32} + t_{24} \leq D$
- Rota 2: $t_{01} + t_{14} \leq D$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.10: Exemplo vetores de tempo



- **OBS:** O índice i varia de 0 até 3 (sem o nó 4). Não faz sentido t_{41}, t_{42}, \dots , pois o nó 4 é somente nó de chegada.
- O índice j varia de 1 até 4 (sem o nó 0). Não faz sentido t_{10}, t_{20}, \dots , pois o nó 0 é somente nó de saída.

Então temos a seguinte expressão:

$$\sum_{i \in \mathbb{N} \setminus \{n+1\}} \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} t_{ij} x_{ijk} \leq D, \quad \forall k \in K \quad (4.7)$$

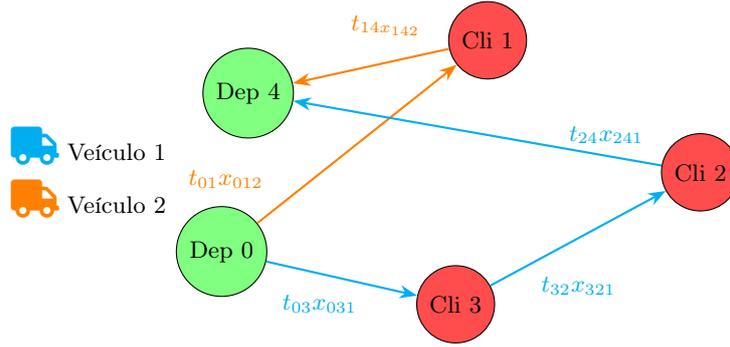
Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplificando a expressão somatório

$$\begin{cases} \text{Veículo 1} & \left\{ \begin{aligned} & t_{04}x_{041} + t_{01}x_{011} + t_{02}x_{021} + t_{03}x_{031} + t_{12}x_{121} + t_{13}x_{131} + t_{14}x_{141} + \\ & + t_{21}x_{211} + t_{23}x_{231} + t_{24}x_{241} + t_{31}x_{311} + t_{32}x_{321} + t_{34}x_{341} \leq D \end{aligned} \right. \\ \text{Veículo 2} & \left\{ \begin{aligned} & t_{04}x_{042} + t_{01}x_{012} + t_{02}x_{022} + t_{03}x_{032} + t_{12}x_{122} + t_{13}x_{132} + t_{14}x_{142} + \\ & + t_{21}x_{212} + t_{23}x_{232} + t_{24}x_{242} + t_{31}x_{312} + t_{32}x_{322} + t_{34}x_{342} \leq D \end{aligned} \right. \end{cases}$$

Tomando de exemplo o percurso $R_1 : 0 - 3 - 2 - 4$ e $R_2 : 0 - 1 - 4$ representado pelo grafo abaixo:

Figura 4.11: Exemplo $t_{ij} * x_{ijk}$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Lembrando, x_{ijk} é uma variável de decisão, então o somatório se dá apenas pelos elementos abaixo:

$$\overline{t_{04}x_{041}} + \overline{t_{01}x_{011}} + \overline{t_{02}x_{021}} + t_{03}x_{031} + \overline{t_{12}x_{121}} + \overline{t_{13}x_{131}} + \overline{t_{14}x_{141}} +$$

$$+ \overline{t_{21}x_{211}} + \overline{t_{23}x_{231}} + t_{24}x_{241} + \overline{t_{31}x_{311}} + t_{32}x_{321} + \overline{t_{34}x_{341}} \leq D$$

$$\overline{t_{04}x_{042}} + t_{01}x_{012} + \overline{t_{02}x_{022}} + \overline{t_{03}x_{032}} + \overline{t_{12}x_{122}} + \overline{t_{13}x_{132}} + t_{14}x_{142} +$$

$$+ \overline{t_{21}x_{212}} + \overline{t_{23}x_{232}} + \overline{t_{24}x_{242}} + \overline{t_{31}x_{312}} + \overline{t_{32}x_{322}} + \overline{t_{34}x_{342}} \leq D$$

Temos, para a Rota 1: $t_{03} + t_{32} + t_{24} \leq D$, e para a Rota 2: $t_{01} + t_{14} \leq D$.

Obs.: Esta restrição considera uma matriz t_{ij} que representa o tempo necessário para um veículo percorrer a aresta $(i, j) \in A$. No entanto, para fins didáticos e para evitar o aumento excessivo da complexidade do modelo, optou-se por desconsiderar a matriz de tempos neste estudo.

Caso quiséssemos incorporar variações no tempo de percurso entre as arestas com base no tipo de veículo, a matriz passaria a ter um terceiro índice k , caracterizando-a como t_{ijk} , onde k representa o veículo utilizado.

4.7 RESTRIÇÃO 7 - Capacidade dos veículos

- $d_i \rightarrow$ demanda do cliente i .
- $Q_k \rightarrow$ capacidade de cada veículo.

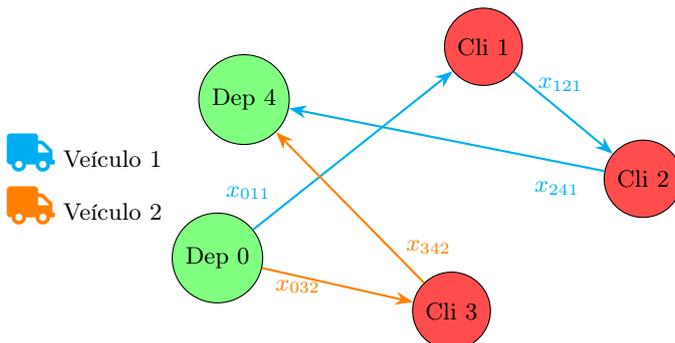
Para nosso estudo, o exemplo conta com dois veículos k_1 e k_2 .

Utilizamos como base a Restrição 4 para montar a equacionamento de nossa Restrição de Capacidade.

$$\begin{array}{l}
 \text{1} \quad x_{121} + x_{131} + x_{141} + x_{122} + x_{132} + x_{142} = 1 \\
 \text{2} \quad x_{211} + x_{231} + x_{241} + x_{212} + x_{232} + x_{242} = 1 \\
 \text{3} \quad x_{311} + x_{321} + x_{341} + x_{312} + x_{322} + x_{342} = 1
 \end{array}$$

Para o exemplo a seguir vamos utilizar a rota 0-1-2-40-3-4:

Figura 4.12: Rota 0-1-2-40-3-4



- Para $k = 1 \rightarrow d_1 + d_2 \leq Q_1$
- Para $k = 2 \rightarrow d_3 \leq Q_2$

Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\begin{array}{l}
 \text{1} \quad x_{121} + x_{131} + x_{141} + x_{122} + x_{132} + x_{142} = 1 \\
 \text{2} \quad x_{211} + x_{231} + x_{241} + x_{212} + x_{232} + x_{242} = 1 \\
 \text{3} \quad x_{311} + x_{321} + x_{341} + x_{312} + x_{322} + x_{342} = 1
 \end{array}$$

- Para $k = 1 \rightarrow d_1(x_{121}) + d_2(x_{241}) \leq Q_1$
- Para $k = 2 \rightarrow d_3(x_{342}) \leq Q_2$

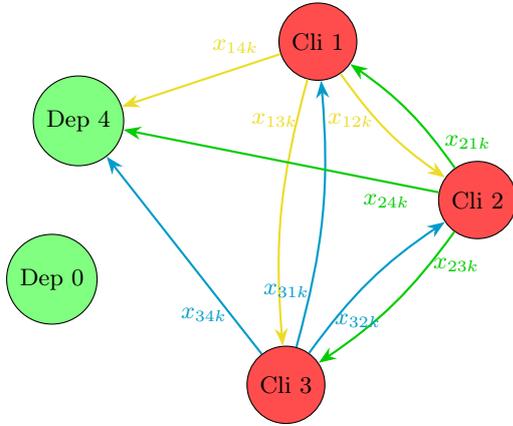
Para nosso exemplo temos as equações da seguinte forma:

$$\text{Veículo 1} \quad \left\{ d_1(x_{121} + x_{131} + x_{141}) + d_2(x_{211} + x_{231} + x_{241}) + d_3(x_{311} + x_{321} + x_{341}) \leq Q_1 \right.$$

$$\text{Veículo 2} \quad \left\{ d_1(x_{122} + x_{132} + x_{142}) + d_2(x_{212} + x_{232} + x_{242}) + d_3(x_{312} + x_{322} + x_{342}) \leq Q_2 \right.$$

Generalizamos para ter o somatório da última restrição.

Figura 4.13: Rotas com demanda d_i



O nó 0 representa um depósito sem demanda associada. Por isso, ele não é incluído nas somatórias que avaliam a carga transportada, já que apenas os clientes (com $d_i > 0$) impactam na restrição de capacidade dos veículos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\text{🚚} \quad \left\{ \begin{array}{l} d_1(x_{121} + x_{131} + x_{141}) + d_2(x_{211} + x_{231} + x_{241}) + d_3(x_{311} + x_{321} + x_{341}) \leq Q_1 \end{array} \right.$$

$$\text{🚛} \quad \left\{ \begin{array}{l} d_1(x_{122} + x_{132} + x_{142}) + d_2(x_{212} + x_{232} + x_{242}) + d_3(x_{312} + x_{322} + x_{342}) \leq Q_2 \end{array} \right.$$

Assim temos o seguinte somatório:

$$\sum_{i \in \mathcal{C}} \left(d_i \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} x_{ijk} \right) \leq Q_k, \quad \forall k \in K \tag{4.8}$$

5 Algoritmo Genético

Um Algoritmo Genético (AG), desenvolvido por [Holland \(1975\)](#), é uma técnica de otimização e busca inspirada nos princípios da seleção natural, conforme propostos pela biologia evolutiva. O algoritmo simula o processo evolutivo das espécies com o objetivo de encontrar soluções progressivamente melhores para um determinado problema.

Segundo [Goldberg e Luna \(2000\)](#), Holland utilizou em seu trabalho uma lista de símbolos binários para representar as cadeias do ácido nucleico, com o intuito de fundamentar uma teoria geral de sistemas de adaptação robusta. No entanto, acabou encontrando uma aplicação prática relevante na determinação de máximos e mínimos de funções matemáticas, o que facilitou a aceitação do AG no meio acadêmico.

Os AGs são parte da computação evolucionária e mostram-se especialmente úteis em cenários nos quais o espaço de busca é extremamente vasto, tornando inviável a exploração exaustiva de todas as possibilidades — como ocorre nos Problemas de Roteamento de Veículos e suas variações.

5.1 Etapas de um Algoritmo Genético

As principais etapas de um AG podem ser descritas da seguinte forma:

1. População Inicial

Gera-se um conjunto de soluções aleatórias, denominadas indivíduos ou cromossomos. Cada indivíduo representa uma possível solução para o problema.

2. Avaliação (Função de Aptidão)

Cada indivíduo é avaliado por meio de uma função de aptidão (*fitness function*), que determina a qualidade da solução representada.

3. Seleção

Os indivíduos mais aptos possuem maior probabilidade de serem selecionados para reprodução. Técnicas comuns de seleção incluem roleta, torneio e elitismo.

4. Cruzamento (Crossover)

Dois indivíduos (pais) são combinados para gerar novos indivíduos (filhos). O objetivo é herdar características vantajosas dos pais, por meio de operações que recombina seus cromossomos.

5. Mutação

Pequenas alterações aleatórias são aplicadas aos filhos. Isso promove diversidade na população e reduz a probabilidade de o algoritmo ficar preso em ótimos locais.

6. Substituição da População

A nova geração substitui parte ou toda a população anterior. O processo é repetido por um número pré-definido de gerações, ou até que um critério de parada seja alcançado.

5.2 Vantagens e Desvantagens dos Algoritmos Genéticos

Vantagens:

- Capacidade de encontrar boas soluções para problemas complexos e não lineares.
- Boa performance em escapar de ótimos locais, em comparação com métodos tradicionais.
- Não requer informações sobre o gradiente da função objetivo.

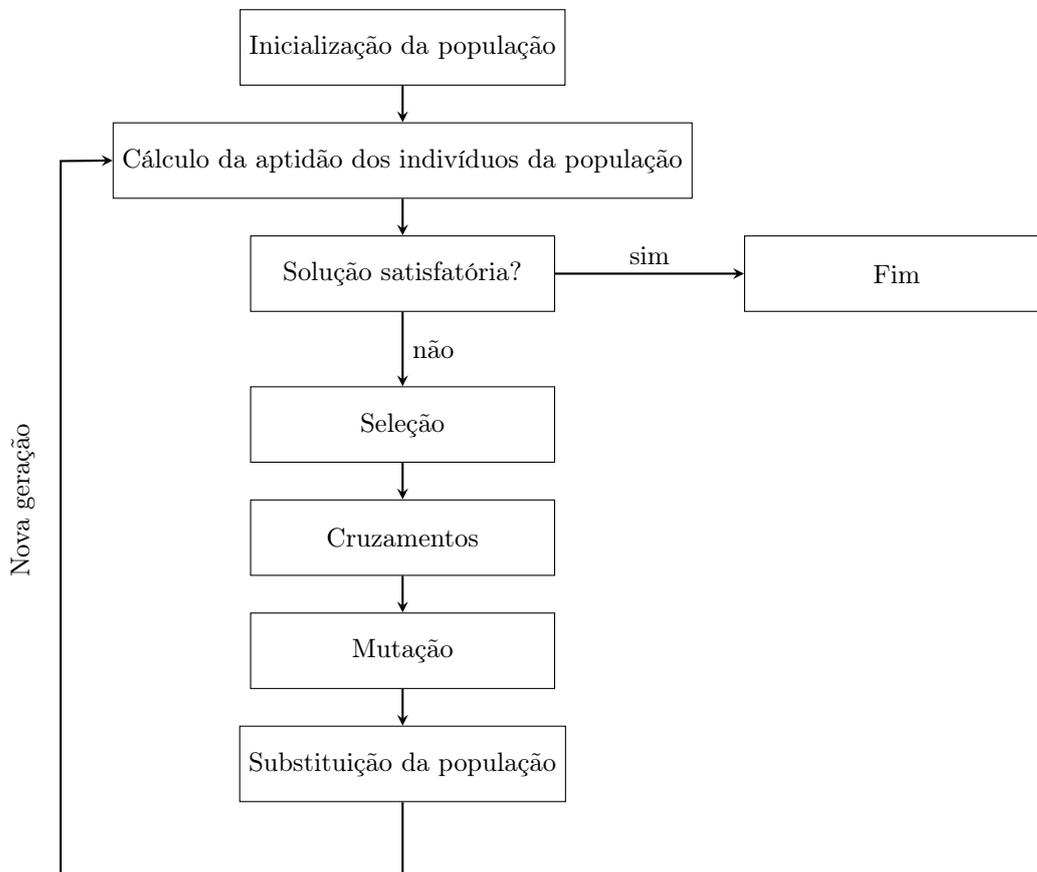
Desvantagens:

- Podem apresentar alto custo computacional (muitas gerações).
- Não garantem a obtenção da solução ótima, apenas soluções de boa qualidade.
- Exigem ajuste criterioso de parâmetros, como o tamanho da população e taxas de cruzamento e mutação.

5.3 Fluxograma do método proposto

A Figura 5.1 ilustra o fluxograma que sistematiza as etapas da abordagem utilizada para a geração de novos indivíduos no contexto da resolução do problema. A estrutura apresentada evidencia o ciclo iterativo do algoritmo, desde a etapa de inicialização da população até o encerramento do processo, condicionado à obtenção de uma solução satisfatória. Destacam-se, no corpo do fluxograma, os principais operadores evolutivos: seleção, cruzamento, mutação e substituição, que atuam na formação das novas gerações.

Figura 5.1: Fluxograma do processo evolutivo para criação de novas rotas na população



Fonte: Elaborado pelo autor.

6 Uma Prova Conceitual do Algoritmo Genético para a Resolução do Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea (*PRVFH*).

6.1 População Inicial

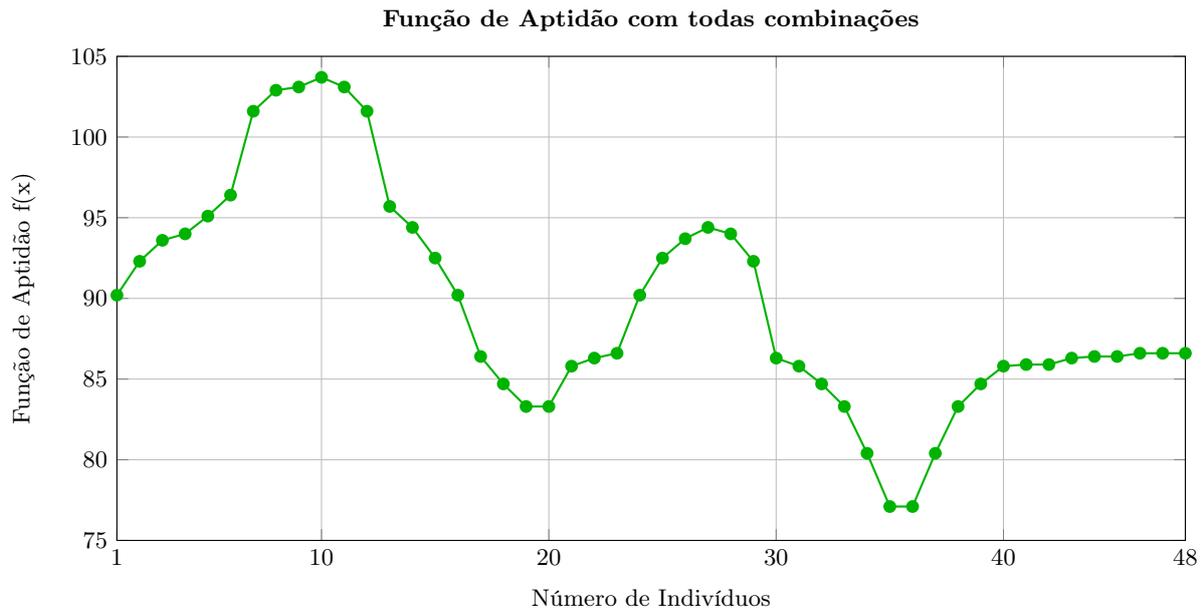
Suponha para o modelo do problema *PRVFH*, uma população com 4 indivíduos. Conforme a Tabela 6.1, cada indivíduo da população será representado por uma sequência (representação cromossômica) da rota realizada pelos Veículos 1 e 2 respectivamente, iniciando no depósito 0 e terminando no depósito 4. O número 40 representado no cromossomo, indica o término da Rota 1 (o Veículo 1 termina sua rota retornando para o depósito 4) e o início da Rota 2 (o Veículo 2 inicia sua rota saindo do depósito 0). A avaliação de cada indivíduo determina sua função de aptidão (custo total das Rotas 1 e 2), ou seja, uma medida da performance do cromossomo com relação ao problema a ser resolvido.

Tabela 6.1: População inicial e função de aptidão dos indivíduos

Indivíduo (x)	Representação Cromossômica	Função de Aptidão
I_1	$0 - 2 - 3 - 40 - 1 - 4$	93,6
I_2	$0 - 1 - 3 - 40 - 2 - 4$	94,0
I_3	$0 - 2 - 40 - 3 - 1 - 4$	94,4
I_4	$0 - 3 - 1 - 40 - 2 - 4$	95,7

A função de aptidão é decisiva na escolha dos pares (“Pais”) que serão utilizados para realizar os cruzamentos e gerar os novos descendentes. Na escolha dos pares, para fazer os cruzamentos, é interessante considerar os indivíduos de melhor aptidão, ou seja, aqueles que possuem melhor adaptação ou melhor função de aptidão. O gráfico mostra que o indivíduo I_4 representado pelo cromossomo $(0 - 3 - 1 - 40 - 2 - 4)$ está menos adaptado que o indivíduo I_2 representado pelo cromossomo $(0 - 1 - 3 - 40 - 2 - 4)$ pois a qualidade de solução do indivíduo I_4 é inferior à qualidade de solução do indivíduo para I_2 .

Figura 6.1: Valores da Função de Aptidão com todos elementos



Fonte: Elaborado pelo autor.

6.2 Estratégia de Seleção dos Pares (para realização dos cruzamentos)

A estratégia de seleção dos pares precisa levar em consideração o parâmetro r . O parâmetro “ r ” corresponderá à fração da população que será substituída na geração. Essa fração é utilizada para determinar a “quantidade de indivíduos” que irão gerar descendentes, pois cada par “*casal*” deverá gerar dois descendentes “*filhos*”. A política adotada deverá *privilegiar* a seleção dos indivíduos mais aptos (melhor função de aptidão). No entanto, não se deve impedir a seleção dos indivíduos menos aptos. A ideia é proporcionar uma variabilidade na descendência.

Assim, para selecionar os indivíduos deve-se adotar uma *escolha probabilística*, onde a seleção levará em consideração a fração r da população a qual será substituída na população. Por exemplo: se a fração $r = 0,4$, isso significa que 40% dos indivíduos da população serão substituídos na próxima geração. Sendo assim, a quantidade de indivíduos escolhidos para fazer o cruzamento precisa ser levada em consideração.

A regra geral é que: a cada 2 “*Pais*” (1 casal) sejam gerados 2 “*Filhos*” (2 descendentes).

Então, para uma população de 10 indivíduos, considerando $r = 0,4$, tem-se que 4 indivíduos serão selecionados para a próxima geração. Nesse caso será preciso escolher 4 Pais (2 casais) para gerar 4 Filhos (descendentes).

Para o exemplo do modelo *PRVFH*, se o valor for $r = 0,5$, então será necessário escolher 2 Pais (1 casal) para fazer o cruzamento, isto é, será preciso escolher a metade da população para fazer o cruzamento.

6.3 Método de Seleção dos Pares

O método utilizado para escolher os indivíduos que farão a reprodução será o método da Roleta. O método consiste em obter o somatório do valor da função de aptidão dos indivíduos, sendo possível gerar um número aleatório dentro do intervalo $[0, \text{Total do valor da função de aptidão dos indivíduos}]$. Através da determinação do valor da função de aptidão acumulada os indivíduos então, poderão ser localizados.

A Tabela 6.3, mostra os indivíduos 3 e 4 selecionados para fazer a operação de cruzamento.

Tabela 6.2: Atribuindo range para o sorteamento

Indivíduo (x)	Repres. Cromossômica	Função de Aptidão	Função de Apt. Acumulada
I_1	$0 - 2 - 3 - 40 - 1 - 4$	93,6	93,6
I_2	$0 - 1 - 3 - 40 - 2 - 4$	94,0	187,6
I_3	$0 - 2 - 40 - 3 - 1 - 4$	94,4	282,0
I_4	$0 - 3 - 1 - 40 - 2 - 4$	95,7	377,7
		Total: 377,7	

Tabela 6.3: Indivíduos sorteados

Sorteio	Indivíduo (x)	Repres. Cromossômica
231	I_3	$0 - 2 - 40 - 3 - 1 - 4$
310	I_4	$0 - 3 - 1 - 40 - 2 - 4$

6.4 Estratégias para o Cruzamento

O operador de cruzamento combina características dos cromossomos selecionados, gerando novos indivíduos que mantêm traços herdados dos pais. Para isso, é necessário definir em quantas partes o cromossomo será dividido e como essas partes serão recombinadas. A escolha da estratégia de cruzamento depende diretamente das restrições do problema em questão, sendo fundamental comparar diferentes abordagens e selecionar aquela que oferece os melhores resultados.

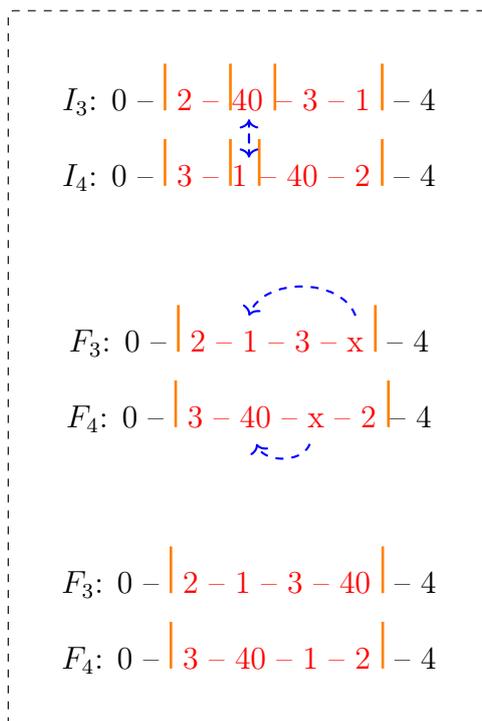
Conforme destacam [Pereira, Coelho, Machado et al. \(2018\)](#), diferentes estratégias de metaheurísticas podem impactar significativamente o desempenho da solução em problemas complexos, como no caso da alocação de berços em terminais portuários.

A Figura ?? mostra os quatro pontos de corte realizados nos cromossomos Pais, indivíduos (I_3) e (I_4), bem como a operação de cruzamento realizada para obtenção dos Filhos (F_3) e (F_4).

Dois pontos de corte são os que separam os nós fixos (0 e 4) e indicam o início da Rota 1 e o término da Rota 2. E os outros dois pontos de corte mostram a operação de cruzamento realizada para obtenção dos Filhos (F_3) e (F_4) a partir da herança dos Pais (I_4) e (I_3) respectivamente. O operador de cruzamento utilizado faz com que o Filho (F_3) herde do Pai (I_4) a rota ($0 - 2 - 1 - 3 - 4$) realizada pelo Veículo 1 e a rota ($0 - 4$) indicando que o veículo 2 não realizou rota. O Filho (F_4) herda do Pai (I_3) a rota ($0 - 3 - 4$) realizada pelo Veículo 1 e a rota ($0 - 1 - 2 - 4$) realizada pelo Veículo 2.

Observe que nos cromossomos, as posições marcadas com \mathbf{x} , são preenchidas para que não exista conflito. Assim, 40 fica na posição 4 para o (F_3). E o cliente 1 fica na posição 3 para o (F_4).

Figura 6.2: Algoritmo de novos filhos



Fonte: Elaborado pelo autor.

6.5 Mutação dos Genes (Como selecionar os indivíduos que sofrerão mutação)

O parâmetro m é o parâmetro de mutação do AG . Se considerarmos 4 indivíduos com $m = 0,25$, então cada indivíduo tem 25% de chance de sofrer uma mutação.

Assim, para cada descendente sorteamos um número aleatório do intervalo $[0, 1]$, se o valor sorteado for menor que m , então o indivíduo é selecionado para mutação.

Considerando a mutação, em relação aos dois descendentes (Filhos 3 e 4), a mutação faz uma troca entre duas posições. O Filho 3, faz a troca da posição do cliente 3 com a posição do 40.

Tabela 6.4: Indivíduo sorteado e nova mutação

Descendentes	Representação Cromossômica	Sorteio	Selecionado	Mutação
F_3	$0 - 2 - 1 - 3 - 40 - 4$	0,2	Sim	$0 - 2 - 1 - 40 - 3 - 4$
F_4	$0 - 3 - 40 - 1 - 2 - 4$	0,626	Não	

6.6 Estratégia de Substituição da População

O tamanho da população n é fixo e o parâmetro r determina a fração da população que será substituída. Assim, precisamos determinar quais os indivíduos da geração atual serão substituídos pelos descendentes (Filhos 3 e 4).

Se toda população for substituída então $r = 1$. Se os menos aptos forem substituídos então a estratégia é a elitista. Por exemplo, se $r = 0,4$ com $n = 10$ então os 4 novos descendentes substituirão os indivíduos menos

aptos.

Observemos que no exemplo didático está sendo adotado $r = 0,5$ (metade da população está sendo substituída) e a estratégia adotada é a elitista. Nessa estratégia serão descartados os 2 indivíduos menos aptos.

A tabela a seguir mostra os indivíduos 3 e 4, da população inicial, como os indivíduos menos aptos.

Tabela 6.5: Selecionando os menos aptos

Indivíduo (x)	Representação Cromossômica	Função de Aptidão	Dois menos Aptos
I_1	0 - 2 - 3 - 40 - 1 - 4	93,6	
I_2	0 - 1 - 3 - 40 - 2 - 4	94,0	
I_3	0 - 2 - 40 - 3 - 1 - 4	94,4	x
I_4	0 - 3 - 1 - 40 - 2 - 4	95,7	x

A tabela 6.6 mostra os descendentes (Filhos 3 e 4) que foram obtidos após a realização das operações de cruzamento e mutação

Tabela 6.6: Aptidão dos descendentes F_3 e F_4

Indivíduo (x)	Representação Cromossômica	Função de Aptidão
Descendente 1 (F_3)	0 - 2 - 1 - 40 - 3 - 4	86,6
Descendente 2 (F_4)	0 - 3 - 40 - 1 - 2 - 4	86,3

A tabela 6.7 mostra a nova população, onde os indivíduos menos aptos foram substituídos pelos descendentes F_3 e F_4 e então se tornaram os novos I_3 e I_4 .

Tabela 6.7: Nova seleção com Aptidão dos indivíduos

Indivíduo (x)	Representação Cromossômica	Função de Aptidão
I_1	0 - 2 - 3 - 40 - 1 - 4	93,6
I_2	0 - 1 - 3 - 40 - 2 - 4	94,0
$F_3 \rightarrow I_3$	0 - 2 - 1 - 40 - 3 - 4	86,6
$F_4 \rightarrow I_4$	0 - 3 - 40 - 1 - 2 - 4	86,3

6.7 Condição de Parada

O parâmetro f (para a função de aptidão) determina a condição de parada do *AG*. Assim, o interesse, especificamente no exemplo do problema *PRVFH*, é encontrar um indivíduo com **função de aptidão** (i) tal que $i \leq f$, já que estamos procurando uma solução com menor custo.

Então, adotando o parâmetro $f = 86,3$, para a população atual apresentada na Tabela 6.7, o algoritmo vai comparar cada função de aptidão do indivíduo i com o parâmetro f . Nesse caso, tem-se que o indivíduo 4 apresenta a melhor solução. A rota (**0** - **3** - **40** - **1** - **2** - **4**) com custo total igual a 86,3 é a melhor rota encontrada.

Considerações Finais

Este trabalho teve como finalidade apresentar uma abordagem heurística para o *PRVFH* — Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea — que se destaca por sua alta complexidade combinatória, especialmente em contextos mais próximos da realidade logística, onde há múltiplos depósitos, tipos de veículos com capacidades distintas e diversas restrições operacionais.

Optou-se, neste estudo, por trabalhar com uma instância simplificada contendo 1 depósito e 3 clientes, justamente com o objetivo de generalizar o problema de forma clara e didática. Esse recorte permitiu visualizar com maior facilidade todas as restrições envolvidas no modelo, além de servir como base para futuras pesquisas que queiram ampliar o escopo para cenários mais realistas. Dessa forma, abre-se a possibilidade de adaptação do modelo para problemas do mundo real, mantendo-se a estrutura central proposta.

Nesse cenário, torna-se evidente a limitação dos métodos exatos, cujo tempo de execução cresce de forma exponencial com o número de clientes e opções de roteamento. Para ilustrar essa complexidade, tomemos como exemplo uma instância com 35 clientes, 2 depósitos e 3 tipos de veículos diferentes. O número de combinações possíveis ultrapassa a casa de 10^{38} soluções viáveis. Mesmo utilizando um processador atual como o Intel Core i7-12700, capaz de realizar cerca de 10^{10} operações por segundo, seriam necessários aproximadamente 100 anos para avaliar todas essas possibilidades, considerando uma única operação por avaliação. Quando ampliamos o cenário para 50 clientes, 3 depósitos e 4 tipos de veículos, esse número sobe para a ordem de 10^{60} , o que demandaria alguns milhões de anos de processamento contínuo — uma realidade completamente inviável do ponto de vista computacional.

Diante desse desafio, foi aplicada uma meta-heurística baseada em algoritmos genéticos, com o objetivo de buscar boas soluções em um tempo computacional aceitável. Embora não haja garantia matemática de que a solução obtida seja a ótima global, a abordagem permite alcançar resultados bastante satisfatórios, aproximando-se da otimalidade em muitos casos práticos.

Além disso, o método proposto alia eficiência e flexibilidade, podendo ser adaptado com facilidade para incorporar diferentes restrições do mundo real, como janelas de tempo, custos variados por tipo de veículo, e limitações de carga — o que reforça sua aplicabilidade em cenários reais de logística e transporte.

Em resumo, este trabalho demonstra que, diante de problemas de grande porte e alta complexidade, como o *PRVFH*, soluções heurísticas bem estruturadas podem oferecer um equilíbrio importante entre qualidade da solução e viabilidade computacional, sendo uma alternativa inteligente quando métodos exatos se tornam inviáveis.

Referências

- DANTZIG, George B.; RAMSER, John H. The truck dispatching problem. **Management Science**, v. 6, n. 1, p. 80–91, 1959.
- GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. **Otimização Combinatória e Programação Linear: modelos e algoritmos**. Rio de Janeiro: Campus, 2000.
- HOLLAND, J. H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems**. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press, 1975.
- KIRKPATRICK, S.; GELATT, C. D.; VECCHI, M. P. Optimization by Simulated Annealing. **Science**, v. 220, n. 4598, p. 671–680, 1983.
- LAPORTE, Gilbert. **Vehicle Routing: Models and Algorithms**. [S.l.]: Springer, 2010.
- LEITE, Fulano; GOMES, Sicrano. Comparação entre HVMP e PLI em problemas de roteamento. **Revista de Pesquisa Operacional**, 2017.
- LOESCH, C.; HEIN, N. **Pesquisa Operacional: Fundamentos e Modelos**. Blumenau: Editora da Furb, 1999.
- MIRANDA, Fulano et al. O uso do PCV em pequenas empresas de logística. **Revista de Logística Aplicada**, 2021.
- MLADENOVIC, Nenad; HANSEN, Pierre. Variable neighborhood search. **Computers & Operations Research**, v. 24, n. 11, p. 1097–1100, 1997.
- MORAIS, Fulano et al. Aplicação de VNS e SA em problemas de roteamento com frota heterogênea. **Revista Brasileira de Pesquisa Operacional**, 2020.
- MORELLI, Fulano; REIS, Beltrano. Comparações entre ILS e VNS em problemas de roteamento. **Anais do ENEGEP**, 2021.
- PEREIRA, E. D.; COELHO, A. S.; MACHADO, C. M. S. et al. Metaheuristic Analysis Applied to the Berth Allocation Problem: Case Study in a Port Container Terminal. **Pesquisa Operacional (Online)**, v. 38, p. 247–272, 2018.
- SOUZA, João. **Busca Local Iterativa: Princípios e Aplicações**. [S.l.]: Editora UFSC, 2009.