

Universidade Federal do Rio Grande
Instituto de Matemática, Estatística e Física
Graduação em Física Bacharelado

Angelo E. S. Hartmann

Decomposições Voronoi e Delaunay da Distribuição Espacial
de Galáxias do Aglomerado Coma

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Física Bacharelado do Instituto de
Matemática, Estatística e Física da Universidade
Federal do Rio Grande como requisito parcial
para obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Fabricio Ferrari

Rio Grande, 2017

Angelo E. S. Hartmann

Decomposições Voronoi e Delaunay da Distribuição Espacial
de Galáxias do Aglomerado Coma

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de
Física Bacharelado do Instituto de Matemática, Estatística e Física
da Universidade Federal do Rio Grande como requisito parcial
para obtenção do título de Bacharel em Física.

Comissão Examinadora:

Fabricao Ferrari (Orientador)

Instituto de Matemática, Estatística e Física – IMEF Furg

Evelise Gausmann

Instituto de Matemática, Estatística e Física – IMEF Furg

Matheus Jatkoske Lazo

Instituto de Matemática, Estatística e Física – IMEF Furg

Aprovado em: ____ de ____ de _____.

Theories are *nets* cast to catch what we call 'the world': to rationalize, to explain, and to master it. We endeavour to make the mesh ever finer and finer.

Karl Popper, 1934.

RESUMO

Levantamentos recentes de distribuição espacial de galáxias – como *2dFRGS*, *SDSS* e *VIPERS* – revelam que galáxias raramente são encontradas isoladas. Pelo contrário, apresentam a tendência de se aglomerarem em grupos, formando, em escalas maiores, aglomerados e superaglomerados de matéria. A distribuição espacial de galáxias desempenha um papel fundamental na formação e evolução destas estruturas. A abordagem tradicional incorre, no entanto, em fragilidades lógicas básicas. Técnicas, como a Função de Correlação de dois pontos, e modelos, como a "Espuma Voronoi", permitem um alto grau de liberdade no ajuste de parâmetros. O presente trabalho propõe uma forma de caracterizar a Distribuição Espacial de Galáxias a partir de uma *métrica característica*, guiada pelo critério dos vizinhos naturais e obtida por meio da Decomposição Delaunay, sem peso de densidade atribuído às células. Pela Decomposição Voronoi, pode-se obter resultados robustos acerca da distribuição de densidades local. O Aglomerado Coma constitui, para esse propósito, uma amostra rica de galáxias e subestruturas que estão sendo, paralelamente, analisadas pelo nosso Grupo de Astrofísica Teórica e Computacional (GATC) via Teoria de Redes.

Palavras-chave: aglomerados de galáxias, padrões de distribuição espacial, análise estatística, vizinhos naturais, métodos geométricos.

ABSTRACT

The recent sky surveys – as the *2dFRGS*, *SDSS* and *VIPERS* maps – revealed that galaxies are rarely found isolated. On the contrary, galaxies are located in groups, shaping into groats that make up massive and compact clusters and superclusters of matter. Spatial galaxy distribution plays a fundamental role in the formation and evolution of this structures. The traditional approach, however, contains basic weakness. Techniques like two-point correlation function and Voronoi foam enable a high degree of freedom. We propose a metric to characterize the spatial distribution of galaxies without depending on the shape or scale of the distribution. We compare the spatial pattern distribution of 1064 galaxies of the Coma Cluster with a synthetic sample of points generated by the Homogeneous Poisson Point Process. With Delaunay Tessellations, we obtain the characteristic distance between the galaxies of Coma Cluster. With Voronoi Tessellations, we studied the local distribution of densities of the Coma Cluster.

Key words: galaxy clusters, spatial patterns, statistics, natural neighbors, geometrical methods.

SUMÁRIO

| | |
|---|-----|
| Resumo | i |
| Abstract | ii |
| Sumário | iii |
| Lista de Figuras | iv |
| Lista de Tabelas | vii |
| Introdução | 1 |
| Capítulo I: Distribuição Espacial de Galáxias | 4 |
| 1.1 Estruturas em Larga Escala | 4 |
| 1.2 Grupos e Aglomerados de Galáxias | 13 |
| 1.3 O Aglomerado Coma | 19 |
| Capítulo II: Decomposições Voronoi e Delaunay | 26 |
| 2.1 Decomposições Voronoi | 27 |
| 2.2 Decomposição Delaunay | 31 |
| 2.3 Cenário Cosmológico | 35 |
| Capítulo III: Aplicação: Aglomerado Coma | 42 |
| 3.1 Dados do SDSS DR12 | 43 |
| 3.2 Delaunay de Coma e a distribuição de distâncias | 45 |
| 3.3 Voronoi de Coma e a distribuição de densidades | 51 |
| Considerações finais | 55 |
| Bibliografia | 58 |
| Appendix A: Implementação dos Algoritmos | 61 |
| Appendix B: Quantidades calculadas a partir da Decomposição Delaunay de Coma | 78 |

LISTA DE FIGURAS

| <i>Number</i> | <i>Page</i> |
|--|-------------|
| 1.1 Distribuições de pontos estatisticamente isotrópicas. Extraído de: Peter e Uzan, 2009. | 6 |
| 1.2 Distribuição de Galáxias descoberta por meio do <i>Two degree Field Redshift Galaxy Survey</i> (2dFRGS). Os pontos representam as posições de 221 414 galáxias do catálogo final do 2FRGS, que revela a disposição espacial da matéria em diferentes estruturas: paredes, filamentos e superaglomerados ao redor de enormes vazios cósmicos. Extraído de: Van de Weygaert e W. Schaap, 2009. | 8 |
| 1.3 Radiação Cósmica de Fundo observada pelo Telescópio Planck (2013). Créditos: ESA e Colaboração Planck. | 10 |
| 1.4 Distribuição de Galáxias em Larga Escala na faixa entre $0,5 < z < 1,05$ – entre 5 e 8 bilhões de anos atrás, em escala temporal, revelando cerca de 90.000 novas distâncias de Galáxias. Créditos: Colaboração VIPERS. | 11 |
| 1.5 Os dois campos profundos do Projeto VIPERS situados no Levantamento do Projeto SDSS Main (Principal) e SDSS LRG (Galáxias Vermelhas Luminosas). Extraído de: Guzzo e et al, 2014. | 12 |
| 1.6 Dois grupos compactos de galáxias: o Quinteto de Stephan (à direita) e o Sexteto de Seyfert (à esquerda). Extraído de: Schneider, 2015. | 15 |
| 1.7 Classificação morfológica de aglomerados de galáxias de Rood e Sastry, 1971. Extraído de: Schneider, 2015. | 16 |
| 1.8 Aglomerado Coma na faixa de Raios-X. Créditos: Matthias Bartelmann. | 18 |
| 1.9 O Aglomerado Coma: mosaico da combinação de dados <i>óticos</i> do <i>Sloan Digital Sky Survey</i> (mostrados em <i>azul</i>) e <i>infravermelhos</i> do <i>Spitzer Space Telescope</i> (em <i>vermelho</i> e <i>verde</i> , para maiores e menores comprimentos de onda, respectivamente). Créditos: NASA, JPL-Caltech, GSFC e SDSS. | 19 |
| 1.10 Galáxias do Aglomerado Coma legendadas. Créditos: Martin Germano. | 20 |

| | | |
|------|--|----|
| 1.11 | Galáxias elípticas de Coma: NGC 4889 e NGC 4874. Créditos: ESA/Hubble & NASA. | 20 |
| 1.12 | Galáxias espirais barradas de Coma: NGC 4911 (acima) e NGC 4921 (abaixo). Créditos: NASA, ESA e Hubble Heritage Team (STScI/AURA) e Adam Block/Mount Lemmon SkyCenter/University of Arizona. | 21 |
| 1.13 | Galáxia lenticular de Coma M85 (ao centro), a espiral NGC 4394 (à esquerda), lenticular anã IC 3292. Créditos: Alfredo Sánchez - SPAG Monfrague Robotic Remote Observatory. | 22 |
| 1.14 | Galáxias Anãs de Coma. Créditos: NASA, JPL-Caltech, L. Jenkins (GSFC). | 23 |
| 1.15 | Distribuição espacial de galáxias Anãs Ultra-Compactas (UCDs) de Coma. Extraído de: Chiboucas et al., 2011. | 24 |
| 1.16 | Galeria de galáxias do Aglomerado Coma: Na linha 1, as gigantes elípticas NGC 4889 e NGC 4881; em seguida, as espirais NGC 4921 e NGC 4911; na última linha, a Starburst M82 e a localização de Galáxias Anãs. | 25 |
| 2.1 | Vórtices de Descartes. Extraído de: Descartes, 1982. | 26 |
| 2.2 | (a.) Decomposição Voronoi e (b.) envoltória convexa da mesma distribuição de pontos no plano Euclidiano, gerados por distribuição aleatória uniforme em Python (Apêndice A). | 28 |
| 2.3 | Decomposições Voronoi (2-dim) degeneradas. Extraído de: Okabe, 2000. | 30 |
| 2.4 | Decomposição Voronoi-Poisson de 245 pontos no Plano Euclidiano. Os pontos roxos do DVP representam os núcleos fundamentais e os pontos amarelos, os vértices de Voronoi. | 31 |
| 2.5 | Centro de um círculo circunscrito ao triângulo ABC. Extraído de: Lanczos, 1970. | 32 |
| 2.6 | Círculos vazios de uma Triangulação de Delaunay. Extraído de: Okabe, 2000. | 32 |

| | | |
|------|--|----|
| 2.7 | Triângulos de Delaunay (linhas sólidas), com seus vértices (círculos preenchidos) e circuncentros (círculos abertos – que correspondem a vértices de Voronoi). As linhas pontilhadas indicam as arestas de Voronoi. a. Os ângulos a, b, c são menores que $\pi/2$. b. Um dos ângulos – neste caso, b – é maior que $\pi/2$; conseqüentemente, o circuncentro se situa fora do triângulo. c. Um triângulo de Delaunay com dois vértices muito próximos – a uma distância D – e um terceiro vértice mais afastado – a uma altura H da base D . Extraído de: Icke e Van de Weygaert, 1987. | 33 |
| 2.8 | Triangulação Delaunay-Poisson de 245 pontos no Plano Euclidiano. | 35 |
| 2.9 | A Rede Cósmica em quatro tempos cósmicos distintos: na primeira linha, duas fatias quando o Universo tinha $t = 1.0$ Gyr e 4.7 Gyr; na segunda linha, $t = 13.6$ Gyr. Extraído de: Projeto Simulação do Milênio. | 38 |
| 2.10 | Decomposição Delaunay de uma estrutura filamentar de pontos e sua vizinhança. A decomposições geradas são mostradas em três aproximações sucessivas, indicadas pelos quadrados. Os quadros revelam a forte adaptatividade da Decomposição Delaunay à densidade local e à geometria da distribuição espacial de pontos. Extraído de: W. E. Schaap, 2007. | 39 |
| 3.1 | Função de correlação de 2 pontos do Aglomerado Coma em relação ao Processo Pontual de Poisson (PPP), com distâncias calculadas pela função "pdist". | 43 |
| 3.2 | Distribuição espacial de 1064 galáxias do Aglomerado Coma. Fonte: Dados do Catálogo SDSS–DR12 (Tempel et al., 2017). | 44 |
| 3.3 | Função de correlação de 2 pontos do Aglomerado Coma em relação ao PPP, com distâncias calculadas pela Decomposição Delaunay. | 45 |
| 3.4 | Histograma de Distâncias de todos com todos calculadas pela função 'pdist' do Python: (a.) Aglomerado Coma; (b.) PPP. | 46 |
| 3.5 | Vizinhos naturais (marcações vermelhas) a partir da Decomposição Delaunay: (a.) do Aglomerado Coma; (b.) do PPP. | 48 |
| 3.6 | Histograma de distâncias dos vizinhos naturais a partir da Decomposição Delaunay: (a.) do Aglomerado Coma; (b.) do PPP. | 50 |
| 3.7 | Histograma de densidades dos Poliedros de Voronoi: (a.) do Aglomerado Coma; (b.) do Processo Pontual de Poisson. | 53 |

LISTA DE TABELAS

| <i>Number</i> | <i>Page</i> |
|--|-------------|
| 1.1 Definição das classes de riqueza de Abell. Extraído de: Schneider, 2015. | 15 |
| 1.2 Definição das classes de distância de Abell. Extraído de: Schneider, 2015. | 16 |
| 2.1 Núcleos Fundamentais e relações constituintes da DV no Espaço Euclidiano \mathcal{E} de dimensão 3. | 30 |
| 2.2 Relação entre os elementos geométricos das Decomposições Voronoi e Delaunay no Espaço Euclidiano \mathcal{E} de dimensões 2 e 3. | 34 |
| 2.3 Elementos constituintes da DV no Modelo Espuma de Voronoi, de Icke e Van de Weygaert, 1989. | 37 |
| 2.4 Elementos constituintes das Decomposições Voronoi e Delaunay na nossa proposta. | 40 |
| 3.1 Comparação entre o cálculo de distâncias pela função "pdist" e pela Decomposição Delaunay 3-dim do Aglomerado Coma e do PPP. | 49 |
| 3.2 Relação dos elementos geométricos calculados a partir da Decomposição Voronoi 3-dim do Aglomerado Coma e do PPP. Os valores referentes ao PPP contêm as mesmas dimensões de unidades das quantidades da amostra física. | 52 |
| B.1 ObjID; coordenadas X, Y, Z de 1064 galáxias do Aglomerado Coma (Tempel et al., 2017); média, mediana e valor máximo das distâncias dos respectivos vizinhos naturais de cada galáxia, calculados pela Decomposição Delaunay de Coma. | 78 |

INTRODUÇÃO

Levantamentos recentes de Distribuições Espaciais de Galáxias – como o [Sloan Digital Sky Survey \(SDSS\)](#) e o [Vimos Public Extragalactic Redshift Survey \(VIPERS\)](#) – revelam que galáxias raramente são encontradas isoladas. Galáxias, em geral, são encontradas em grupos, moldando-se em forma de grupos e cúmulos que compõem aglomerados e superaglomerados de galáxias (Martínez, 2009).

Um aspecto notável dos mapeamentos realizados é que estas estruturas se interconectam e se rearranjam na forma de *filamentos* alongados, *panquecas* e *paredes* (tipo folhas) de matéria cósmica, originando, conseqüentemente, regiões colossais de *vazios cósmicos*. O Universo observável constitui-se, desse modo, como uma verdadeira *rede cósmica*, que se torna gradativamente *uniforme* à medida que observamos o passado longínquo do Universo (seção 1.1).

As galáxias constituem, portanto, os fósseis cosmológicos da formação e evolução do Universo. É consenso na comunidade astronômica que o estudo da distribuição de galáxias é fundamental para a compreensão da origem, formação e evolução das estruturas e subestruturas cósmicas.

O debate que perpassa as tentativas de se explicar a formação e a evolução de estruturas no Universo enfrenta a seguinte questão: Qual é a escala¹ de distância na qual a distribuição de matéria cósmica se torna uniforme e uma transição para a homogeneidade pode ser precisamente localizada? (Saslaw, 2008).

As técnicas mais comuns adotadas no estudo de distribuição de galáxias em larga escala são estatísticas espaciais de segunda ordem, como a Função de Correlação de dois pontos e a sua Transformada de Fourier, o Espectro de Potências (Martínez e Saar, 2001) (seção 1.2).

O algoritmo *Friends of Friends* (FoF) é comumente aplicado para identificar grupos e aglomerados de galáxias em mapeamentos como o *SDSS* e o *2dFGRS* (Tempel et al., 2017). O método FoF utiliza as distâncias de galáxias como estimativa média para identificar os grupos e aglomerados.

¹Para os propósitos da Cosmologia Contemporânea, distâncias menores que ~100 Mpc são consideradas "pequenas". *Parsec* pc é a unidade de distâncias astronômicas definida como a distância de um objeto (uma estrela distante) tal que um observador nesse objeto veria o raio da órbita da Terra com um tamanho angular de 1". Para fins de comparação, podemos fazer as seguintes equivalências: 1 pc=206 265 ua=3.26 ly; onde 1 ua (*unidade astronômica*) é o comprimento do eixo maior da órbita da Terra ao redor do Sol e equivale a $1.495\,978\,70 \times 10^{11}$ m; 1 ly (*ano-luz*) é a distância que a luz percorre em 1 ano e corresponde a 9.4607×10^{15} m (Mo, Bosch e White, 2010)

Um modelo que é capaz de reproduzir a formação e evolução de estruturas cósmicas a partir da distribuição de galáxias é a "Espuma de Voronoi" ("Voronoi Foam"), uma aplicação das Decomposições Voronoi e Delaunay à distribuição de galáxias introduzido por Icke e Van de Weygaert, [1987](#).

Uma Decomposição Voronoi é uma forma única de particionar uma região do espaço ocupada por um conjunto de pontos (núcleos fundamentais) em células, onde cada célula é definida com base na distância média a todos os demais núcleos contíguos pertencentes ao mesmo conjunto (seção [2.1](#)).

Se, ao invés de delimitarmos a região de "domínio" de cada núcleo, conectarmos diretamente cada núcleo aos seus vizinhos mais próximos por meio de triangulações, obtemos a decomposição dual de Voronoi, conhecida como a Decomposição Delaunay (seção [2.2](#)).

O modelo "Espuma de Voronoi" é uma realização particular do processo de Decomposição Voronoi do Espaço 3-dim, composto de quatro elementos geometricamente distintos: os Poliedros de Voronoi (que representam os vazios cósmicos), os Polígonos (panquecas), as Arestas (paredes) e os Vértices de Voronoi (aglomerados de galáxias). A "Espuma de Voronoi" consiste, desse modo, em uma representação geométrica da arquitetura de estruturas cósmicas (seção [2.3](#)).

A abordagem tradicional da distribuição de galáxias permite, no entanto, um alto grau de liberdade no ajuste de parâmetros. Por um lado, torna-se mais conveniente pela relativa simplicidade computacional dos métodos comumente aplicados e pela facilidade de se interpretar os modelos paramétricos (uma vez que se tem controle dos parâmetros iniciais).

Ao mesmo tempo, incorre em fragilidades lógicas básicas, justamente por permitir que os parâmetros inseridos no modelo sejam alterados. A alteração de um único parâmetro introduzido no modelo afeta todos os resultados. O modelo de Weygaert, embora seja direcionado a aglomerados de galáxias, atribui um peso de densidade ao Poliedros de Decomposição Voronoi a fim de ajustar os aglomerados aos vértices de Voronoi.

Além disso, no caso da Função de Correlação de dois pontos, Hong et al., [2016](#) mostram que a técnica falha em caracterizar a topologia de duas amostras de distribuições diferentes.

Uma metodologia com maior grau de objetividade é trabalhar com Decomposições Voronoi e Delaunay do espaço sem atribuir peso de densidade a qualquer elemento

geométrico das decomposições e fazendo valer, para o cálculo de distâncias tridimensionais, apenas o critério da contiguidade espacial dos pontos – conhecido também como o critério dos "vizinhos naturais".

A proposta do presente trabalho consiste em caracterizar a Distribuição Espacial de Galáxias a partir de uma *métrica* que esteja submetida ao critério dos vizinhos naturais e que seja obtida por meio da Decomposição Delaunay, sem qualquer peso de densidade (seção 2.3).

Como consequência natural da Decomposição Delaunay, essa distância característica deve ser capaz de indicar o quanto as galáxias de um aglomerado estão concentradas ou dispersas, sem depender da forma ou da escala da distribuição.

O Aglomerado Coma (Fig. 1.10) constitui, para esse propósito, uma amostra rica de galáxias e subestruturas que estão sendo, paralelamente, analisadas pelo nosso Grupo de Astrofísica Teórica e Computacional (GATC) via Teoria de Redes (seções 1.3 e 3.1).

Aplicando a Decomposição Voronoi à mesma amostra, podemos, ainda, caracterizar a distribuição de densidades dos poliedros de Voronoi.

A principal diferença entre o nosso modelo e o de Weygaert é que os núcleos fundamentais de Voronoi, na nossa proposta, correspondem particularmente a cada galáxia da amostra, enquanto que na "Espuma de Voronoi", as galáxias e seus aglomerados são ajustados de modo a ocuparem os *vértices* de Voronoi.

Com isso, o presente estudo será baseado na caracterização da distribuição de galáxias unicamente em termos das distâncias, calculadas com Delaunay sob o critério da contiguidade espacial (seção 3.2), e das densidades associadas aos Poliedros de Voronoi pelo inverso dos respectivos volumes (seção 3.3).

Capítulo 1

DISTRIBUIÇÃO ESPACIAL DE GALÁXIAS

O objetivo deste primeiro capítulo é colocar a distribuição espacial de galáxias como tópico em discussão.

Na seção 1.1, apresentamos algumas ferramentas de análise estatística da distribuição espacial de galáxias – como a função de correlação, o espectro de potências e o Processo Pontual de Poisson Homogêneo; e discutimos a conexão com a Cosmologia e com alguns dos principais resultados observacionais das últimas décadas, como os Levantamentos de Dados do 2dFRGS, SDDS e VIPERS, bem como a radiação cósmica de fundo do Satélite Planck.

Em seguida, reconstruímos na seção 1.2 alguns tópicos da abordagem tradicional da distribuição de galáxias – como a construção de catálogos de aglomerados de galáxias, em especial o Catálogo de Abell; a classificação morfológica de aglomerados; a distinção entre aglomerados e grupos; as classes de riqueza e distância de Abell; e observações de aglomerados no domínio dos Raios-X.

Por fim, na seção 1.3, apresentamos uma caracterização do nosso objeto de estudo – o Aglomerado Coma.

1.1 Estruturas em Larga Escala

O estudo quantitativo da distribuição espacial de galáxias exige mapeamentos do Universo observável em termos das coordenadas das galáxias no céu. As duas coordenadas angulares – (θ, ϕ) , que equivalem à ascensão reta e à declinação (α, δ) , respectivamente – podem ser facilmente obtidas.

A coordenada radial r , entretanto, não pode ser obtida diretamente. Se conhecermos o desvio para o vermelho z de cada galáxia de interesse, podemos atribuir a cada uma delas uma velocidade da "linha de visada" escrita em termos de z , na forma

$$v \cong zc, \tag{1.1}$$

onde c é a velocidade da luz. Se todas as galáxias estivessem distribuídas de forma homogênea no espaço, teriam uma velocidade v devida à expansão cósmica e poderíamos atribuir a cada galáxia uma distância radial seguindo a relação de

Hubble (Makler, 2010) ,

$$r \cong \frac{v}{H_0}. \quad (1.2)$$

onde H_0 é conhecido como a "constante" de Hubble e, em geral, é parametrizado na forma (Makler, 2010)

$$H_0 = 100 \text{ hkm/sMpc}. \quad (1.3)$$

No entanto, é justamente devido às aglomerações locais de matéria que cada galáxia tem o seu movimento próprio, além da expansão (Makler, 2010). As velocidades podem ser escritas como uma combinação linear da componente devida à expansão do Universo, v_{exp} , com a componente da velocidade peculiar, v_{pec} , de cada objeto.

Se movermos um cubo com gás ideal a uma velocidade v , as moléculas desse gás teriam uma velocidade resultante que é combinação da velocidade relativa, própria a cada uma, com o movimento global médio do cubo.

Na situação cosmológica, a velocidade (de expansão) do cubo aumenta com a distância, enquanto que as velocidades peculiares não variam com a distância, mas dependem da densidade local de matéria. Esse efeito é observado, por exemplo, no Aglomerado Coma, no qual as galáxias possuem um movimento próprio em relação a uma média – nesse caso, da ordem de $7.0 \times 10^3 \text{ km s}^{-1}$ (Makler, 2010).

Dessa forma, a medida individual do desvio para o vermelho de uma galáxia fornece a componente radial em termos de

$$cz = v_{exp} + v_{pec} = H_0 r + v_{pec}. \quad (1.4)$$

Para pequenos valores de z , onde a relação linear de Hubble é válida, fazendo-se uma média das velocidades peculiares em um volume com grande número de galáxias, o segundo termo da Eq. 1.4 fica próximo de zero.

Nestas condições, um mapa com as coordenadas (z, θ, ϕ) de cada galáxia fornece uma boa representação tridimensional de estruturas em larga escala.

Desde a publicação das *Kosmologische Betrachtungen*¹ de Einstein, 1917 – que inauguram a Cosmologia como ciência testável –, todos os principais modelos com a pretensão de descreverem a história evolutiva do Universo assumiram o que ficou conhecido como o *Princípio Cosmológico*.

¹"Considerações Cosmológicas".

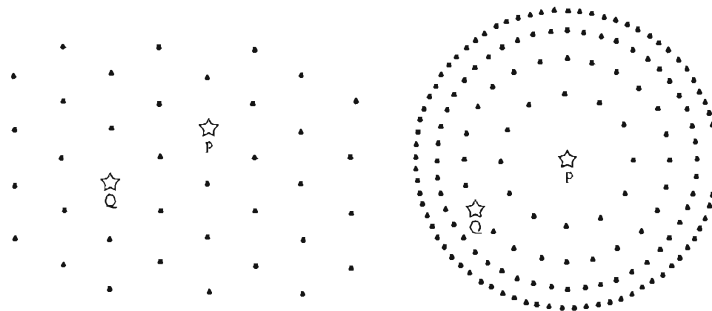
Einstein introduziu-o sob a influência do **Princípio de Ernst Mach**, de acordo com o qual,

as leis da Física são determinadas pela distribuição de matéria em larga escala (Coles e Lucchin, 2002).

Trata-se justamente disso: o Princípio Cosmológico (PC) supõe que o Universo é espacialmente isotrópico e homogêneo. O conteúdo da primeira parte do PC afirma que um observador, localizado em um ponto qualquer, observa exatamente as mesmas porções de matéria em todas as direções; em síntese: o Universo é o mesmo em todas as direções (como ilustra a Fig.1.1).

Restam, então, duas opções: ou os pontos espacialmente distribuídos são equivalentes entre si ou são distinguíveis e, portanto, o observador ocupa o centro de uma esfera, única posição possível.

Figura 1.1: Distribuições de pontos estatisticamente isotrópicas. Extraído de: Peter e Uzan, 2009.



O Princípio Copernicano, por sua vez, exclui a segunda possibilidade, pois, do contrário, pontos – como P ou Q da Fig. 1.1 – teriam uma posição privilegiada no Universo. Sobrevive, portanto, a condição de homogeneidade: todos os pontos são estatisticamente equivalentes (Peter e Uzan, 2009).

Dessa forma, havia o consenso na comunidade astronômica de que a distribuição de matéria deveria ser homogênea em todas as escalas.

Para a surpresa de todos, os primeiros mapeamentos de rubro-desvios de galáxias, realizados na década de 1980, revelaram a existência de subestruturas cósmicas – aglomerados se chocando e formando *superaglomerados*, que, em escalas maiores, se encontram formando *filamentos* e *paredes* de matéria cósmica; entre as quais, observam-se regiões enormes de *vazios cósmicos* (Makler, 2010).

A Estrutura do Universo em larga escala assume, portanto, uma forma "esponjosa", na qual a matéria ocupa seus tecidos filamentosos e os "buracos" da esponja, vazios cósmicos, são estruturas cósmicas com componentes dinâmicos próprios.

Outra grande surpresa foi revelada à medida que mapeamentos mais profundos do Universo foram realizados: em escalas cada vez maiores, acima de algumas centenas de Mpc, a distribuição de matéria cósmica tende à homogeneidade, como mostra a Fig. 1.2.

A confirmação observacional de que, em escalas cada vez maiores, a distribuição de matéria cósmica tende à homogeneidade gerou, como era de se esperar, outras questões fundamentais para a Cosmologia.

Em particular, a seguinte questão: em que escala, precisamente, a distribuição de matéria é homogênea e uma transição para a uniformidade pode ser localizada (Saslaw, 2008)?

De tal situação, emerge a proposta feita por Peebles, 1971, de caracterizar a distribuição espacial de galáxias, em relação a uma estrutura (sintética) estatisticamente homogênea de pontos, por meio de uma função ξ que correlaciona os dois volumes, $d^3\mathbf{r}_1$ e $d^3\mathbf{r}_2$, respectivamente.

Sendo assim, a probabilidade de encontrar duas galáxias, simultaneamente, nas regiões $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1 + d^3\mathbf{r}_1)$ e $(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2 + d^3\mathbf{r}_2)$ é dada por

$$dP = \bar{n}^2 \xi_{GG}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2, \quad (1.5)$$

onde \bar{n} é o número de densidade média de galáxias no espaço e $\xi_{GG}(r)$ é conhecida como a *função de correlação de dois pontos*.

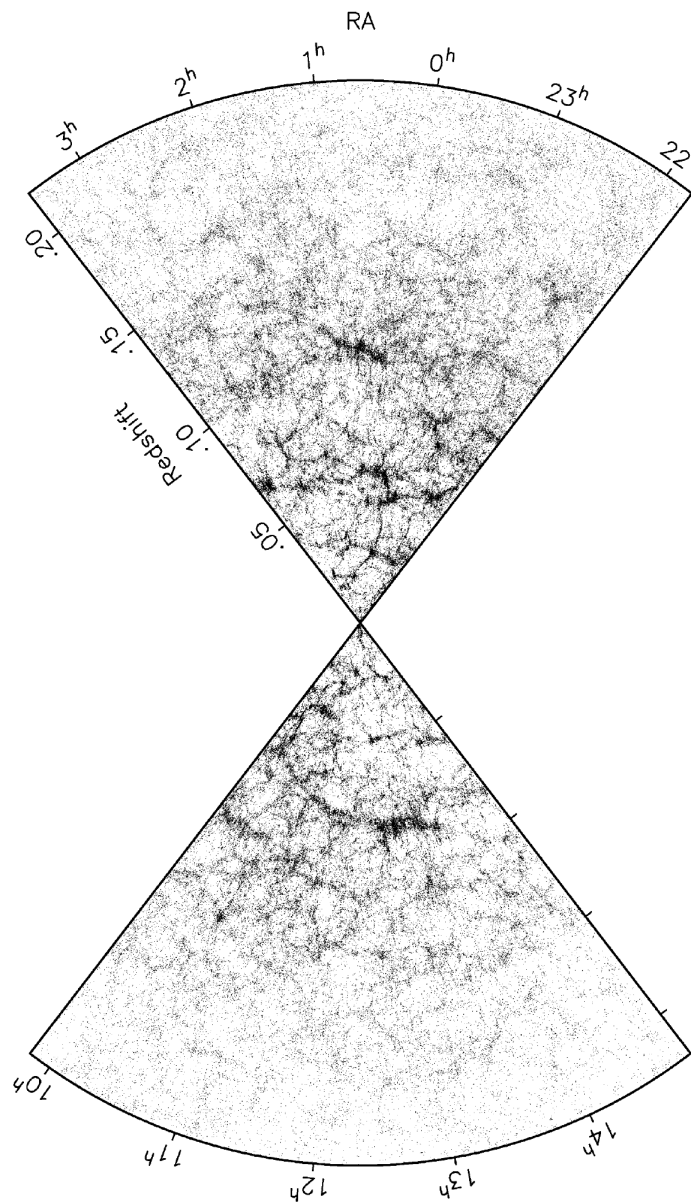
Essa definição da função ξ é interessante porque podemos testar, diretamente, as condições de homogeneidade e isotropia que a estrutura sintética deve satisfazer (Padmanabhan, 2006):

$$\text{Homogeneidade} \implies \xi_{GG}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \xi_{GG}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2); \quad (1.6)$$

$$\text{Isotropia} \implies \xi_{GG}(\mathbf{r}) = \xi_{GG}(|\mathbf{r}|). \quad (1.7)$$

De acordo com as relações acima, *homogeneidade estatística* significa que todos os momentos de uma distribuição de probabilidades permanece inalterada sob uma translação espacial; e *isotropia estatística* implica que estas quantidades devem ser invariantes sob ação de rotações (Peter e Uzan, 2009). Somente com estas definições que o Princípio Cosmológico mantém o seu conteúdo físico.

Figura 1.2: Distribuição de Galáxias descoberta por meio do *Two degree Field Redshift Galaxy Survey* (2dFRGS). Os pontos representam as posições de 221 414 galáxias do catálogo final do 2FRGS, que revela a disposição espacial da matéria em diferentes estruturas: paredes, filamentos e superaglomerados ao redor de enormes vazios cósmicos. Extraído de: Van de Weygaert e W. Schaap, 2009.



A função de $\xi_{GG}(r)$, na Eq. 1.5, é definida como o excesso de probabilidade de encontrar um par de galáxias separadas por uma distância r , típica da estrutura homogênea. Assim, se $\xi_{GG}(r) > 0$, temos uma aglomeração do par de galáxias GG em relação à estrutura homogênea.

Estudos (Padmanabhan, 2006) mostram que

$$\xi_{GG}(r) \simeq \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma}, \quad r_0 = 5.0(5) / \text{hMpc} \quad \gamma = 1.77 \pm 0.04 \quad (1.8)$$

onde $10 \text{ [hkpc]} \lesssim r \lesssim 10 \text{ [hMpc]}$.

A função de correlação pode ser aplicada a catálogos de aglomerados com grande número de galáxias – como o Catálogo de Abell (ver seção 1.2). A correlação para aglomerados, denotada por $\xi_{AA}(r)$, retorna, de acordo com Padmanabhan, 2006, um valor da ordem de

$$\xi_{AA}(r) \simeq \left(\frac{r}{25h^{-1}\text{kpc}}\right)^{-1.8}. \quad (1.9)$$

Comparando $\xi_{AA}(r)$ com $\xi_{GG}(r)$, podemos afirmar que aglomerados são mais fortemente correlacionados que galáxias individuais – em concordância com os levantamentos de dados.

A estrutura sintética de pontos, introduzida na definição 1.5 acima, é gerada pelo Processo Pontual de Poisson Homogêneo – referido nas demais partes do trabalho como PPP. Os pontos são gerados pela distribuição de Poisson e distribuídos em um volume, com mesmas dimensões da amostra física, por distribuição uniforme aleatória (ver Apêndice A).

O fato de o PPP ser capaz de produzir estruturas espaciais homogêneas o torna um dos mais relevantes processos estatísticos da Cosmologia (Saslaw, 2008) e será amplamente utilizado no presente trabalho.

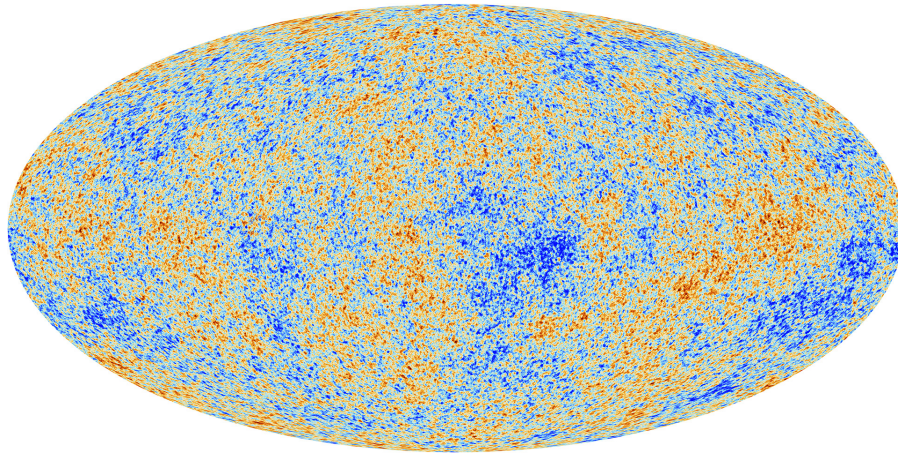
Resta-nos, ainda, dizer se a exigência da isotropia é resguardada pelas observações. Podemos fazer isso levando a função de correlação para o espaço de Fourier, pela relação

$$P_\delta(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{r} \xi(r) \exp^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (1.10)$$

onde $P_\delta(\mathbf{k})$ é o espectro de potências.

O espectro de potências reproduz o comportamento da função de correlação no espaço de configuração. O mapa da Radiação Cósmica de Fundo (RCM) é exatamente isso: os tamanhos de correlação característicos correspondem aos picos de intensidade medidos pelo espectro de potência $P_\delta(\mathbf{k})$.

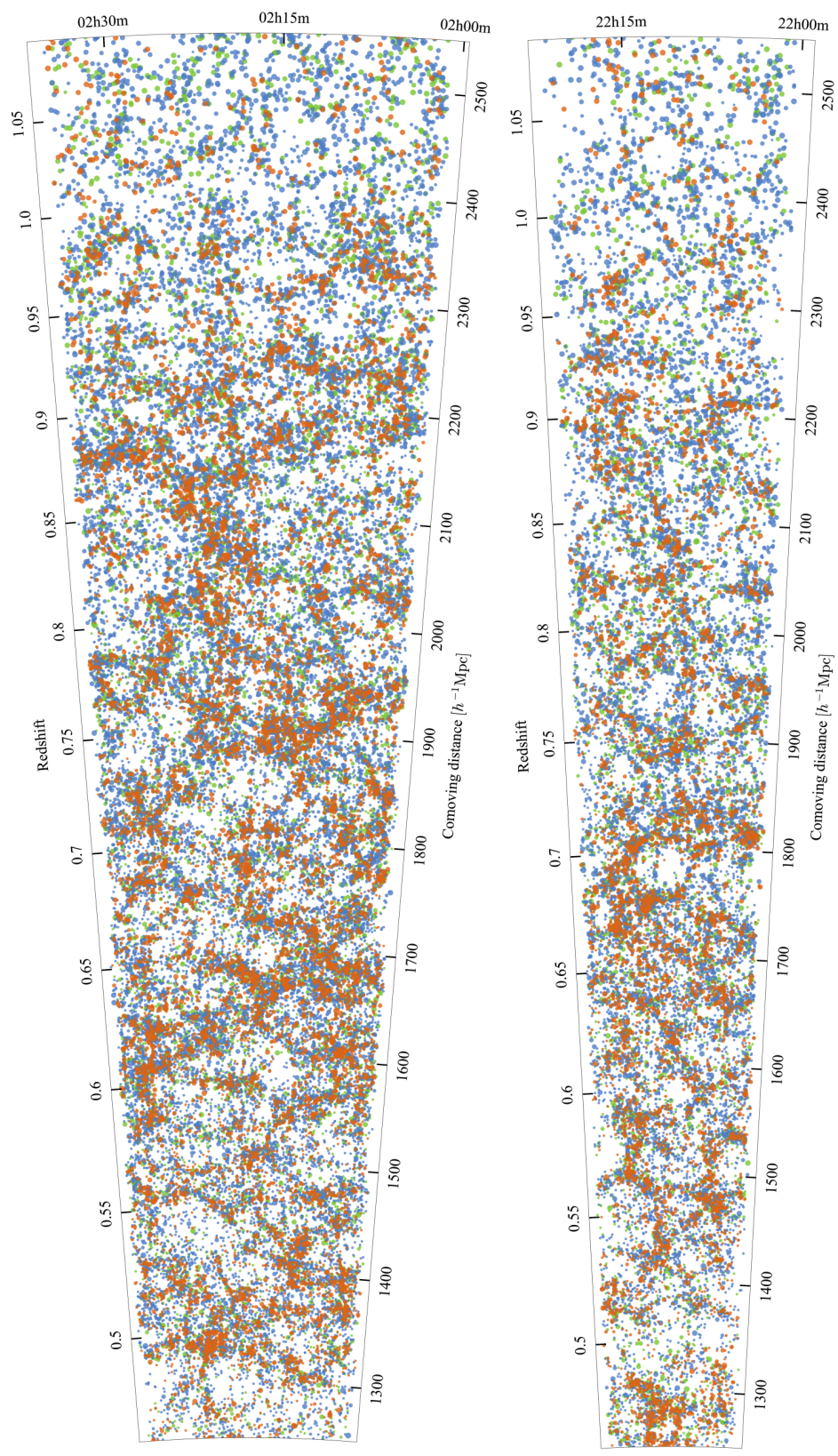
Figura 1.3: Radiação C3smica de Fundo observada pelo Telesc3pio Planck (2013).
Cr3ditos: [ESA](#) e [Colabora33o Planck](#).



Embora a RCF apresente anisotropias locais – como mostra a Fig. 1.3, sob a a33o de rota33o, a distribui33o global permanece a mesma (~ 2.7 K). Logo, a isotropia, assumida por Einstein em 1917, 33 corroborada pela observa33o de RCM.

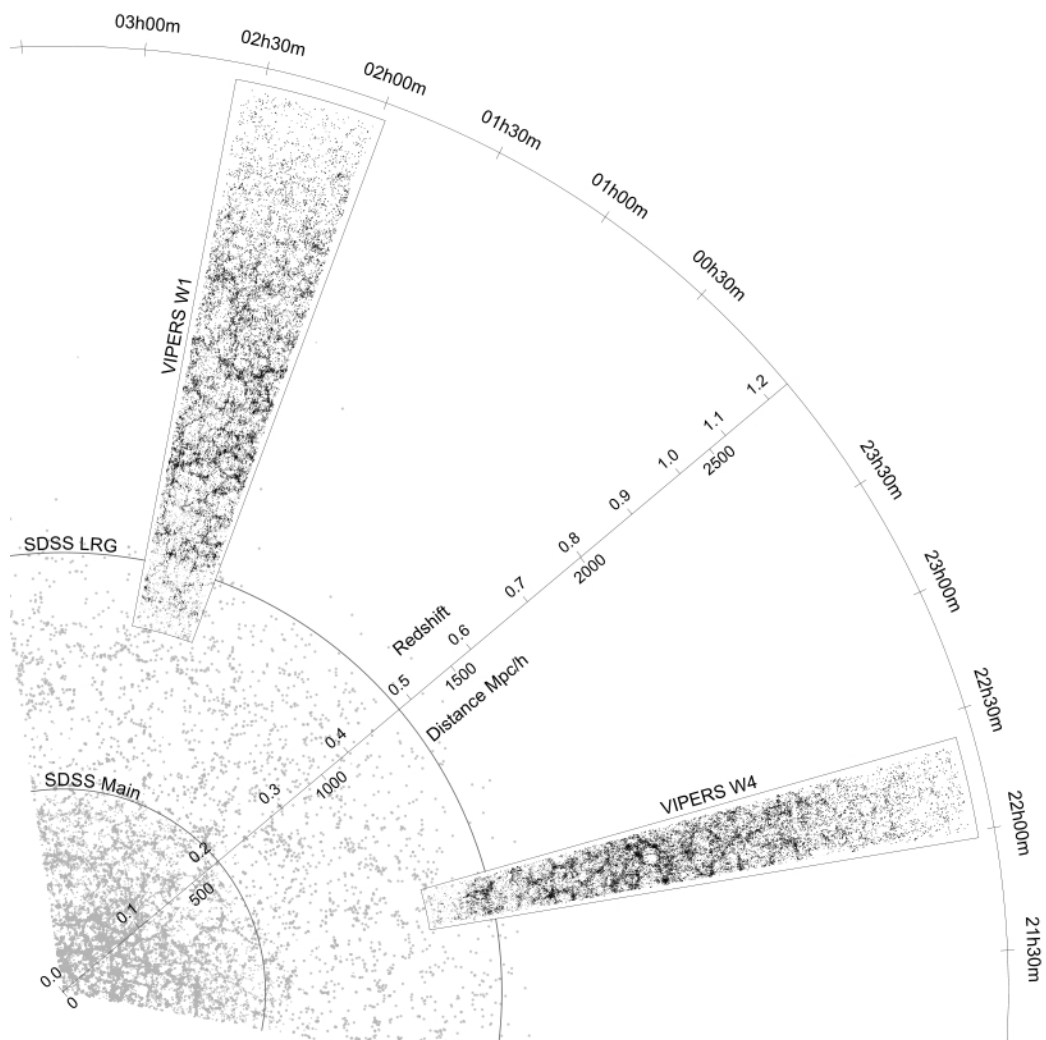
Finalizamos a se33o com a distribui33o de gal33xias at33 $z \sim 1$, revelada pelo [Projeto VIPERS](#) (Fig.1.4) e os dois campos profundos situados no [Levantamento do Projeto SDSS Main](#) (Fig.1.5).

Figura 1.4: Distribuição de Galáxias em Larga Escala na faixa entre $0,5 < z < 1,05$ – entre 5 e 8 bilhões de anos atrás, em escala temporal, revelando cerca de 90.000 novas distâncias de Galáxias. Créditos: [Colaboração VIPERS](#).



O Projeto VIPERS tem gerado um conjunto de dados com grau de precisão estatística sem precedentes, levando o mapeamento até um desvio para o vermelho próximo de $z \sim 1$, enquanto que sofisticados levantamentos – como o 2dFRGS e o SDSS – cobriam até $z \sim 0.2$.

Figura 1.5: Os dois campos profundos do Projeto VIPERS situados no Levantamento do Projeto SDSS Main (Principal) e SDSS LRG (Galáxias Vermelhas Luminosas). Extraído de: Guzzo e et al, 2014.



1.2 Grupos e Aglomerados de Galáxias

Galáxias não estão uniformemente distribuídas no espaço e raramente são encontradas isoladas (Makler, 2010). Em geral, apresentam a tendência de se agruparem e formarem novos tipos estruturas – denominadas *aglomerados de galáxias* (Fig. 1.2).

Os primeiros catálogos de aglomerados surgem no Século 18, com Charles Messier e Wilhelm Herschel, de forma independente. Não estava estabelecida, entretanto, o conceito hodierno – o que os instrumentos da época permitiam observar eram "nuvens" de estrelas, as famosas *nebulosas*, no sentido histórico.

Além disso, é interessante ressaltar que o "Universo-- até início do Século 20 – correspondia à Via Láctea. Se as nebulosas observadas por Messier e Herschel pertenciam ou não à nossa Galáxia começou a ser debatido nos anos 1920s a partir dos trabalhos publicados por Edwin Hubble e Melvin Slipher².

A natureza extragaláctica das "nebulosas" passou a ser aceita pela comunidade com os trabalhos de Lundmark e Fritz Zwick, ao considerarem que, ao contrário do que o nome possa sugerir, "aglomerados de galáxias" não são apenas coleções de galáxias.

Fritz Zwicky, 1937, foi o primeiro a chamar a atenção da comunidade astronômica ao fato de que uma quantidade enorme de matéria deveria ser levada em conta para vincular as galáxias do Aglomerado Coma, com altas velocidades, em uma região do espaço de forma permanente.

Zwicky estava disposto a defender a tese de que aglomerados constituem outro tipo de objeto astronômico, com estrutura dinâmica e espacial própria, cuja formação e evolução devem ser exploradas para conseguirmos traçar a história evolutiva do Universo.

A partir dos anos 1950s, a pesquisa sobre aglomerados de galáxias incorporou gradativamente uma série de tópicos relacionados à formação e evolução a destas estruturas – desde a distribuição espacial de galáxias, suas propriedades e tipos dominantes, a existência de subaglomerados (internos) e superaglomerados, até o estágio dinâmico dos aglomerados e a natureza da matéria escura.

O trabalho seminal de George Abell, 1957, intitulado *The distribution of rich clusters of galaxies*, é um marco na História da Ciência. Abell identificou regiões no céu que apresentam alta densidade de galáxias (Schneider, 2015). A identificação foi

²Uma revisão histórica detalhada pode ser encontrada no texto de Andrea Biviano, [From Messier to Abell: 200 years of science with galaxy clusters](#).

feita a olho a partir de placas fotográficas captadas pelo Mapeamento Celeste do Observatório Palomar (POSS – *Palomar Observatory Sky Survey*), da região Norte da esfera celeste.

O critério adotado por Abell para a identificação de aglomerados refere-se a um excesso de densidade de galáxias dentro de um ângulo sólido especificado. De acordo com esse critério, um aglomerado contém ≥ 50 galáxias em um intervalo de magnitude $m_3 < m < m_3 + 2$, onde m_3 é a magnitude aparente da terceira galáxia mais brilhante do aglomerado. Estas galáxias devem estar localizadas dentro de um círculo de raio angular

$$\theta_A = \frac{1'.7}{z}, \quad (1.11)$$

onde z é o desvio para o vermelho estimado e θ_A é o *Raio de Abell* de um aglomerado.

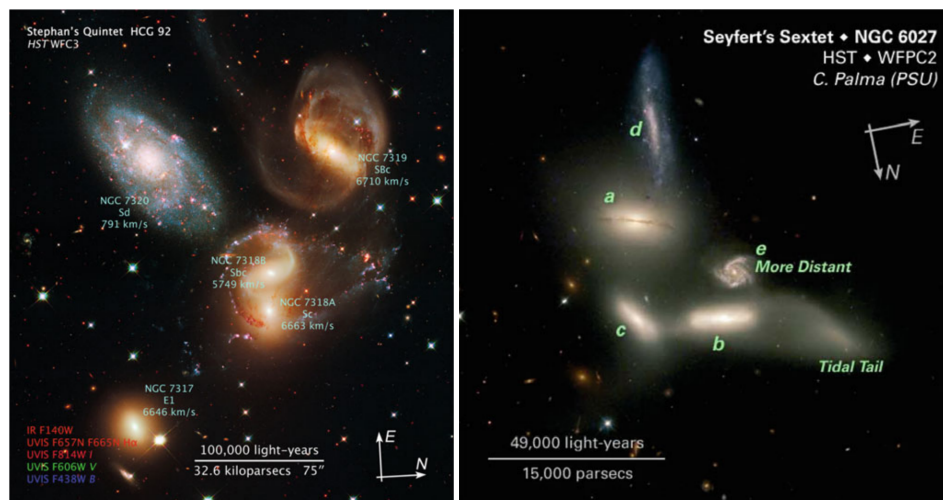
A razão para escolher a terceira galáxia mais brilhante é que a luminosidade da galáxia mais brilhante pode variar consideravelmente de um aglomerado para outro. Abell foi muito cuidadoso com a interpretação das galáxias mais brilhantes na região celeste sob estudo – que poderiam estar, por exemplo, localizadas a uma distância mais próximas de nós (Schneider, 2015).

O desvio para o vermelho z é estimado pela hipótese de que a luminosidade da décima galáxia mais brilhante em um aglomerado é a mesma para todos os aglomerados. Uma calibração dessa distância estimada é realizada para os aglomerados cujo desvio para o vermelho, z , é conhecido.

O Raio de Abell de um aglomerado corresponde a um raio físico de ≈ 1.5 Mpc e o desvio para o vermelho deve ser da ordem de $0.02 \leq z \leq 0.2$ para a seleção dos aglomerados de Abell.

O Catálogo de Abell contém 1682 aglomerados que satisfazem o critério acima; outros 1030 objetos estão listados, mas não preenchem o critério plenamente, como o número de galáxias por exemplo. Conjuntos menores de 50 galáxias são considerados *grupos de galáxias*. A Fig. 1.6 mostra dois grupos *compactos* de galáxias, uma classe especial de grupos de galáxias que têm suas projeções com separação muito pequena (Schneider, 2015).

Figura 1.6: Dois grupos compactos de galáxias: o Quinteto de Stephan (à direita) e o Sexteto de Seyfert (à esquerda). Extraído de: Schneider, 2015.



Uma extensão do Catálogo de 1958, agora cobrindo a região Sul da esfera celeste, foi publicada por Abell, Corwin e Olowin, 1989. O Catálogo ACO contém 4076 aglomerados, incluindo o Catálogo original.

Os Catálogos Abell e ACO classificam os aglomerados em dois tipos principais – de acordo com a "riqueza" (*richness*) e a distância. As classes de riqueza de aglomerados variam em uma escala de 0 a 5. A classe de riqueza 0 contém entre 30 e 49 e, portanto, não pertence ao Catálogo no sentido estrito.

Tabela 1.1: Definição das classes de riqueza de Abell. Extraído de: Schneider, 2015.

| Classe de riqueza | Contagem de galáxias | Quantidade no Catálogo de Abell |
|-------------------|----------------------|---------------------------------|
| (0) | (30–40) | (≥ 1000) |
| 1 | 50–79 | 1224 |
| 2 | 80–129 | 383 |
| 3 | 130–199 | 68 |
| 4 | 200–299 | 6 |
| 5 | ≥ 300 | 1 |

De acordo com a Tab. 1.1, podemos notar que o número de aglomerados decresce rapidamente à medida que o indicador riqueza aumenta. Logo, há alguns poucos aglomerados com maior quantidade de galáxias. O único aglomerado que pertence à classe de riqueza 5 é o Abell 665, ou simplesmente A 665.

A definição das classes de distância de Abell – Tab. 1.2 – é baseada na magnitude aparente m_{10} da décima galáxia mais brilhante do aglomerado. As distâncias estimadas contêm, nessa tabela, um erro grosseiro, já que a seleção realizada por Abell era visual, a partir de placas fotográficas.

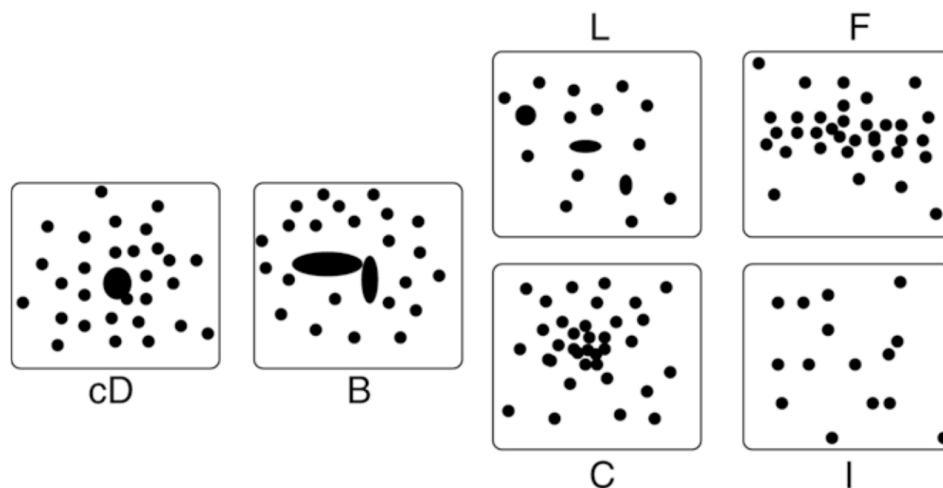
Tabela 1.2: Definição das classes de distância de Abell. Extraído de: Schneider, 2015.

| Classe de distância | m_{10} | Desvio para o vermelho estimado | Quantidade no Catálogo de Abell ($R \geq 0$) |
|---------------------|-----------|---------------------------------|--|
| 1 | 13.3–14.0 | 0.0283 | 9 |
| 2 | 14.1–14.8 | 0.0400 | 2 |
| 3 | 14.9–15.6 | 0.0577 | 33 |
| 4 | 15.7–16.4 | 0.0787 | 60 |
| 5 | 16.5–17.2 | 0.131 | 657 |
| 6 | 17.3–18.0 | 0.198 | 921 |

Outro trabalho clássico de seleção de aglomerados é o Catálogo de Zwicky, Herzog e Wild, 1968, que, apesar de conter maior número de aglomerados, não é muito utilizado pelo fato de ser menos criterioso na seleção dos objetos.

Os aglomerados podem ser classificados de acordo com a morfologia da sua distribuição espacial de galáxias. Há diversas propostas de classificação morfológica de aglomerados. Uma delas é a configuração disposta na Fig. 1.7, proposta por Rood e Sastry, 1971.

Figura 1.7: Classificação morfológica de aglomerados de galáxias de Rood e Sastry, 1971. Extraído de: Schneider, 2015.



Os autores sugerem seis classes morfológicas de aglomerados:

- **cD** é o aglomerado dominado por uma galáxia elíptica gigante, indicada pelo tipo-cD, como o [A 2199](#), por exemplo;
- **B** é o aglomerado dominado por uma binária, duas galáxias brilhantes gigantes, a exemplo do Aglomerado Coma – [A 1656](#);
- **L** é o aglomerado que possui o alinhamento linear de suas galáxias dominantes, como ocorre com o Aglomerado Perseus – [A 426](#);
- **F** corresponde ao aglomerado com distribuição espacial oblata de galáxias, como o Aglomerado Hércules – [A 2151](#);
- **C** é o tipo morfológico de aglomerados com um único núcleo, formado por suas galáxias mais brilhantes, como Corona Borealis – [A 2065](#);
- **I** é a classe de aglomerados com distribuição irregular de galáxias, como o [A 400](#).

Considerando que essa classificação morfológica representa uma descrição *visual* da distribuição de galáxias dos aglomerados, a definição exata quanto a qual classe um aglomerado pertence não é nosso principal interesse.

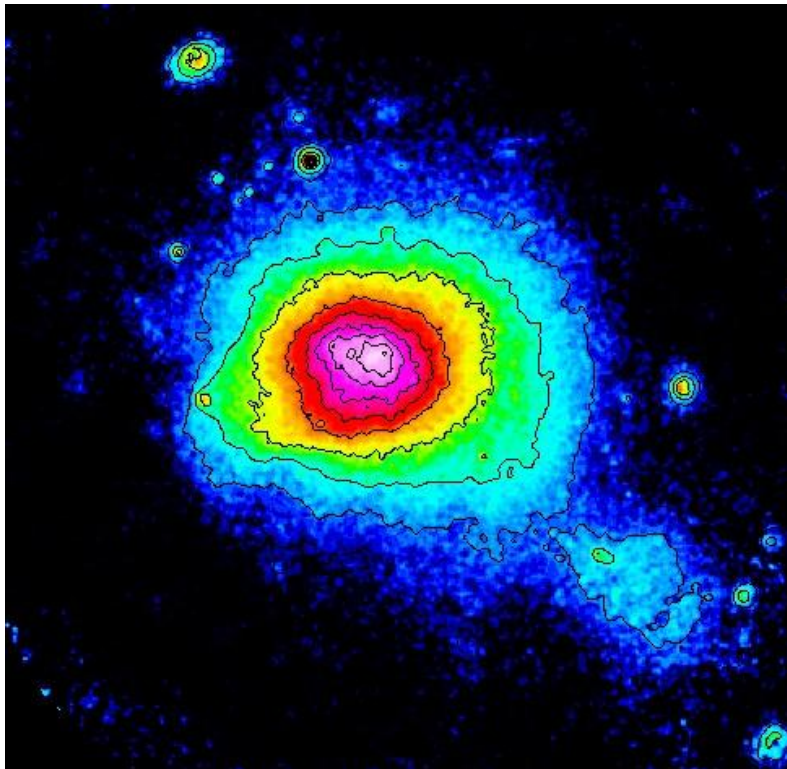
A classificação, no entanto, fornece uma primeira impressão geral do sistema – se ele está em um estado de equilíbrio dinâmico ou em processo de fusão com outro aglomerado, se apresenta uma distribuição *regular* ou *irregular* de galáxias.

Além disso, é possível identificar uma diferenciação física entre aglomerados a partir de sua classificação morfológica, como correlações entre a distribuição espacial de galáxias e o tipo dominante das galáxias. Uma delas, por exemplo, é que **aglomerados regulares** são dominados por galáxias do tipo inicial (*early-type galaxies*), que são basicamente elípticas e lenticulares; enquanto que **aglomerados irregulares** possuem uma fração significativa de galáxias espirais (Mo, Bosch e White, 2010).

Outra característica é que aglomerados regulares são, em geral, dominados por uma galáxia do tipo cD e possuem uma alta densidade de galáxias em sua região central. Os aglomerados irregulares, por sua vez, são significativamente menos densos e formam subestruturas com destaque.

Observações no domínio dos Raios-X revelaram que aglomerados de galáxias são emissores intensos dessa faixa do espectro eletromagnético. A emissão da radiação de Raios-X não está concentrada nas galáxias individualmente, mas difundida espacialmente por todo o aglomerado, como ilustra a Fig.1.8. A fonte emissora dos Raios-X é o gás quente que permeia o aglomerado, com temperatura que varia de 10^7 a 10^8 Kelvin.

Figura 1.8: Aglomerado Coma na faixa de Raios-X. Créditos: [Matthias Bartelmann](#).



As observações e a espectroscopia de Raios-X são ferramentas imprescindíveis para obtermos uma compreensão detalhada das propriedades dos aglomerados e dos processos que ocorrem no Meio Intra-Aglomerado (ICM).

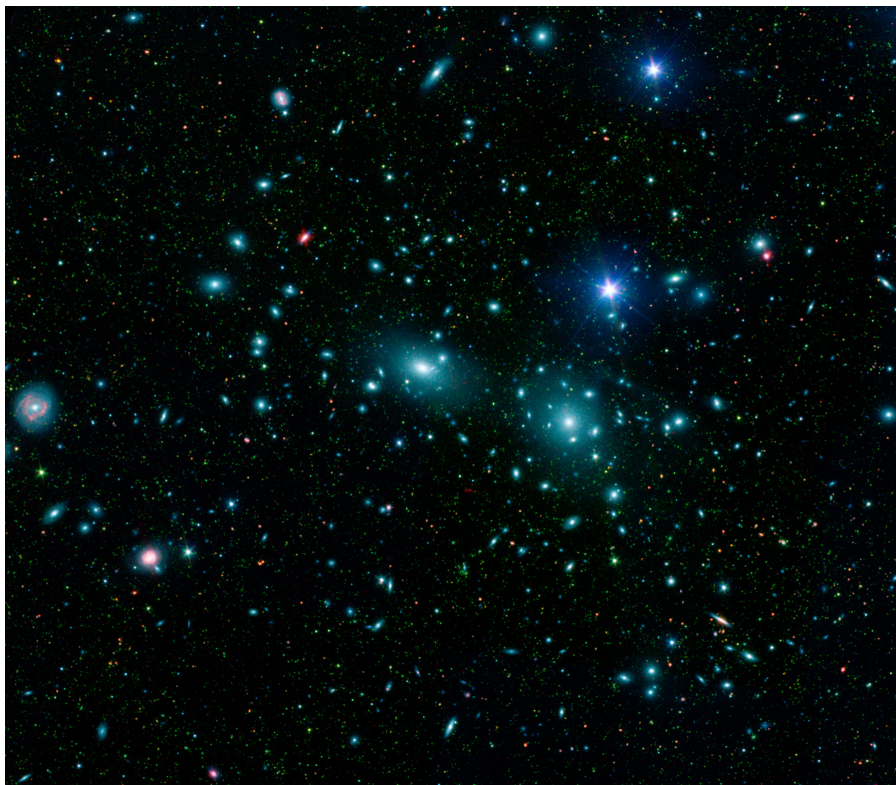
É curioso notar que a imagem dos Raios-X de um aglomerado, como a Fig.1.8, corrobora o conceito de aglomerado como uma entidade física e não apenas como uma coleção de objetos.

Os aglomerados de galáxias são os maiores agregados de matéria e, portanto, os blocos de construção de Estruturas em Larga Escala do Universo. Consequentemente, como traços das estruturas cósmicas, fornecem importantes testes aos modelos cosmológicos, bem como a calibração e correção de parâmetros cosmológicos.

1.3 O Aglomerado Coma

A uma distância de ≈ 90 Mpc da Terra, **Coma** é o aglomerado de galáxias massivo e regular mais próximo de nós. Por apresentar uma rica variedade de galáxias em diferentes tipos morfológicos e, conseqüentemente, estágios evolutivos distintos, o Aglomerado Coma é considerado um dos principais laboratórios de análise da formação e evolução de galáxias.

Figura 1.9: O Aglomerado Coma: mosaico da combinação de dados *óticos* do *Sloan Digital Sky Survey* (mostrados em *azul*) e *infravermelhos* do *Spitzer Space Telescope* (em *vermelho* e *verde*, para maiores e menores comprimentos de onda, respectivamente). Créditos: [NASA](#), [JPL-Caltech](#), [GSFC](#) e [SDSS](#).



A sua localização celeste é definida pela ascensão reta entre 191° e 199° , declinação entre 24° e 32° e *redshift* entre 0.019 e 0.028. Possui velocidade radial de 6925 km s^{-1} , desvio para o vermelho $z = 0.023 \pm 0.001$.

Com mais de mil galáxias luminosas, Coma é dominado por duas gigantes elípticas em sua região central: a [NGC 4889](#) e a [NGC 4874](#), como ilustra a Fig.1.11. A primeira possui uma velocidade radial da ordem de 6495 km s^{-1} e um desvio para o vermelho $z = 0.021665(43)$. No centro da NGC 4889, há um buraco negro gigante supermassivo (McConnell et al., [2012](#)).

A NGC 4874 é cerca de dez vezes maior que a Via Láctea, que tem diâmetro de disco com cerca de 10^6 ly; possui uma velocidade radial de $7176(3) \text{ km s}^{-1}$ e desvio para o vermelho $z = 0.023\,937(10)$.

Ao contrário das espirais, as galáxias elípticas são tipicamente encontradas em regiões de alta densidade espacial ou nos núcleos dos halos de aglomerados e possuem menor velocidade de dispersão que as espirais.

Figura 1.10: Galáxias do Aglomerado Coma legendadas. Créditos: [Martin Germano](#).

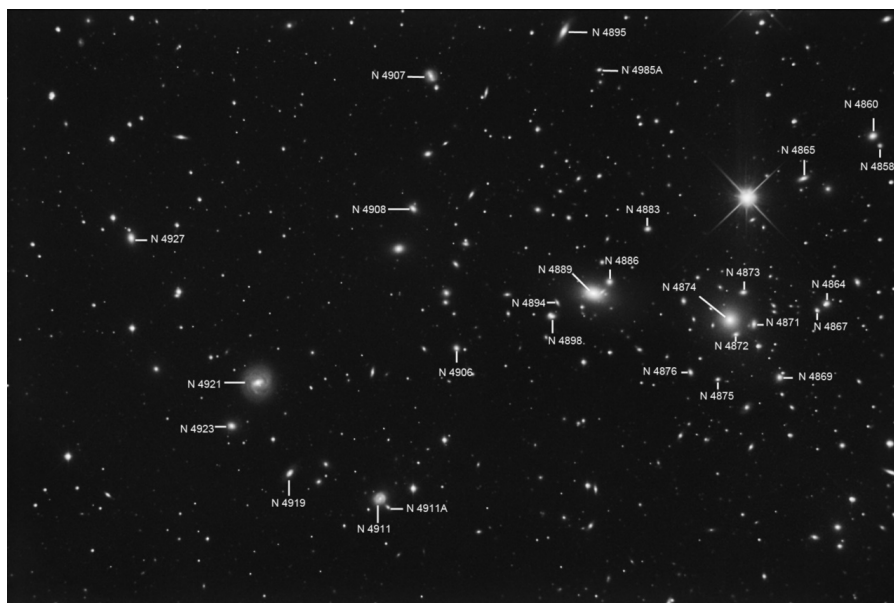


Figura 1.11: Galáxias elípticas de Coma: NGC 4889 e NGC 4874. Créditos: [ESA/Hubble & NASA](#).



A primeira imagem da Fig. 1.12 é uma combinação de capturas da espiral barrada NGC 4911, feitas pelo Telescópio Espacial Hubble durante os anos de 2006, 2007 e

2009. A NGC 4911 possui velocidade radial $v_r = 7985(5) \text{ km s}^{-1}$ e um desvio para o vermelho $z = 0.026635(17)$

Figura 1.12: Galáxias espirais barradas de Coma: NGC 4911 (acima) e NGC 4921 (abaixo). Créditos: [NASA, ESA e Hubble Heritage Team \(STScI/AURA\)](#) e [Adam Block/Mount Lemmon SkyCenter/University of Arizona](#).



A imagem revela os caminhos com alta concentração de gás e poeira que circundam o centro da galáxia. À direita superior da NGC 4911, em interação com seus braços espirais mais externos, está a sua vizinha NGC 4911A.

Em seguida, na mesma Fig. 1.12, está a espiral mais brilhante de Coma – a NGC 4921 (M101), cuja velocidade radial é $v_r = 5482(4) \text{ km s}^{-1}$ e desvio para o vermelho $z = 0.018286(13)$

A NGC 4921 é considerada protótipo de galáxias espirais anêmicas – aquelas cujos braços espirais contêm brilho muito mais fraco em relação às espirais normais. Brilho fraco sugere que há pouco gás e, conseqüentemente, pouca atividade de formação estelar na galáxia. O fato de serem observadas galáxias anêmicas em Coma sugere que este tipo de galáxia perde uma fração significativa do seu gás para o ambiente (Lee e Jang, 2016).

A Galáxia M85, identificada também por NGC 4382, é um exemplo de galáxias lenticulares de Coma. A M85 está a uma distância de ≈ 60 milhões de anos luz; possui diâmetro estimado em 125 000 ly, velocidade peculiar de 729 km s^{-1} e desvio para o vermelho $z = 0.002432$.

Figura 1.13: Galáxia lenticular de Coma M85 (ao centro), a espiral NGC 4394 (à esquerda), lenticular anã IC 3292. Créditos: Alfredo Sánchez - SPAG Monfrague Robotic Remote Observatory.

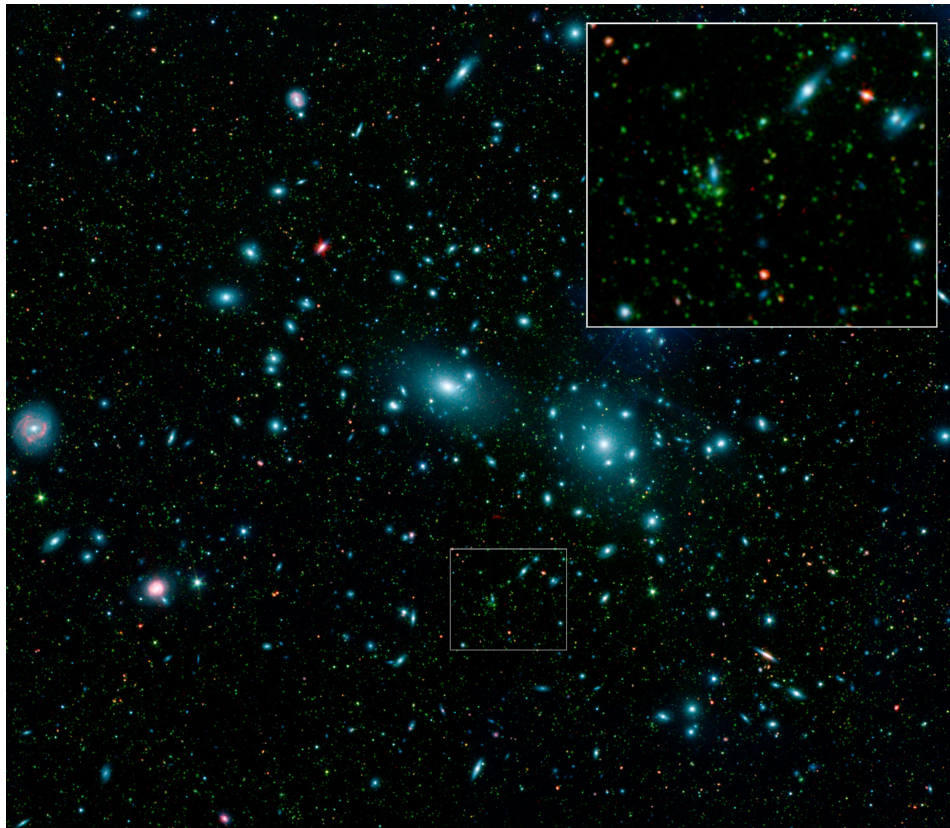


Descoberta pelo astrônomo francês Pierre Méchain, colaborador de Messier, a M85 está interagindo com a galáxia espiral vizinha NGC 4394 (à sua esquerda) e com

uma pequena galáxia espiral barrada, a NGC 4419 (não identificada na Figura), ambas pertencentes ao Aglomerado Coma.

À direita da M85 (Fig.1.13), está a galáxia lenticular anã IC 3292, com $z \approx 0.002325$ e velocidade peculiar de 679 km s^{-1} .

Figura 1.14: Galáxias Anãs de Coma. Créditos: NASA, JPL-Caltech, L. Jenkins (GSFC).



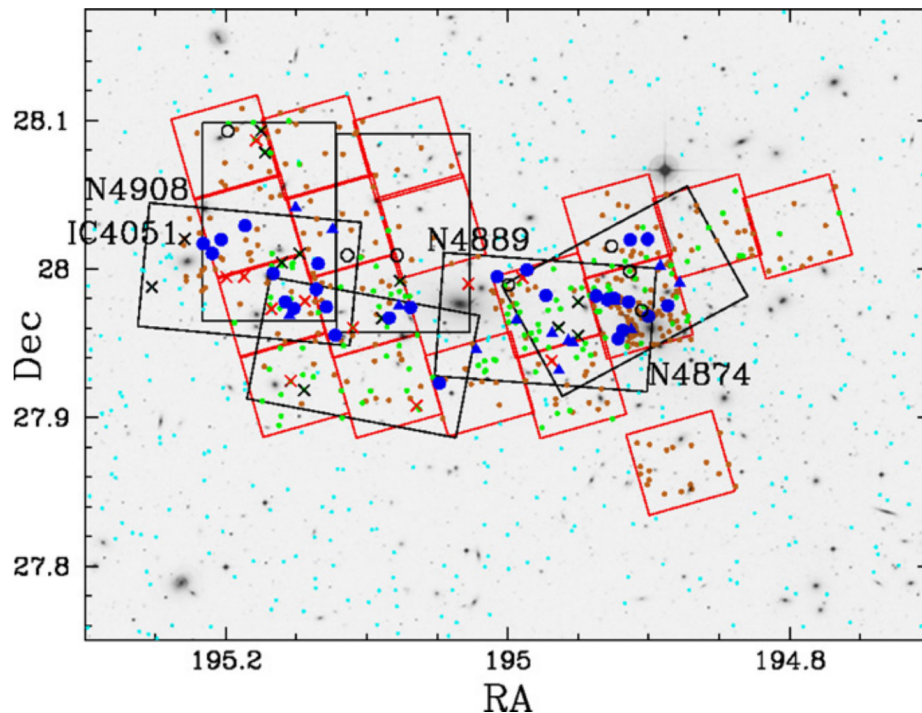
Recentemente, uma nova classe de galáxias foi descoberta, caracterizada observacionalmente por objetos com brilho superficial altamente compacto. Trata-se de galáxias anãs ultra-compactas, referidas pela sigla UCDS – *ultra-compact dwarf galaxies*. Em geral, são objetos compactos e de baixa magnitude³, com raio efetivo que varia entre $7 \text{ pc} < r_e < 100 \text{ pc}$. São, portanto, maiores que aglomerados globulares típicos com tamanho $\approx 2\text{--}5 \text{ pc}$ e menores que as gigantes elípticas, que são da ordem de algumas centenas de parsec.

Chiboucas et al., 2011, chamaram a atenção ao fato de que as UCDs de Coma tendem a se agruparem na vizinhança de galáxias gigantes e que compartilham de

³Na banda V, entre -13.5 e -10.5 .

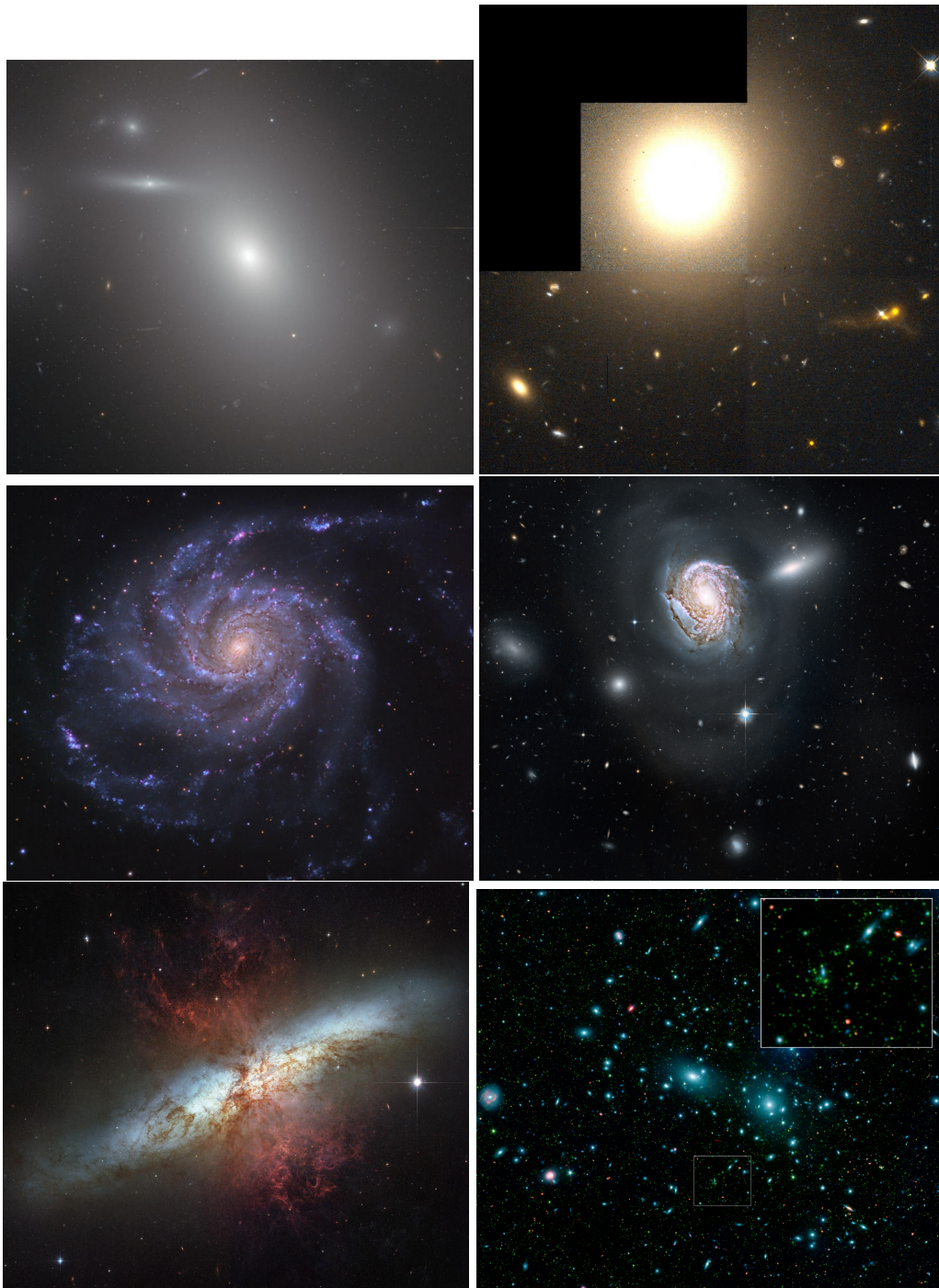
propriedades físicas típicas da galáxia hospedeira – como a sua metalicidade, por exemplo.

Figura 1.15: Distribuição espacial de galáxias Anãs Ultra-Compactas (UCDs) de Coma. Extraído de: Chiboucas et al., 2011.



A Fig. 1.15 mostra a distribuição de galáxias UCDs de Coma. As caixas vermelhas indicam os campos fotografados com a Câmera Avançada para Mapeamentos (ACS) e os retângulos pretos, pelo Espectrômetro de Imageamento de Baixa Resolução (LRIS). Os pontos verdes representam os candidatos iniciais a UCDs, os marrons são os candidatos acrescentados e os cianos, candidatos escolhidos pelo critério da cor. As bolas azuis localizam as UCDs confirmadas e os triângulos, as não confirmadas. Os círculos abertos marcam as posições de elípticas anãs compactas. Por fim, os X's são os candidatos, determinados a partir do desvio para o vermelho, a serem ou estrelas (pretos) ou galáxias de fundo (vermelhos) (Chiboucas et al., 2011).

Figura 1.16: Galeria de galáxias do Aglomerado Coma: Na linha 1, as gigantes elípticas NGC 4889 e NGC 4881; em seguida, as espirais NGC 4921 e NGC 4911; na última linha, a Starburst M82 e a localização de Galáxias Anãs.



Capítulo 2

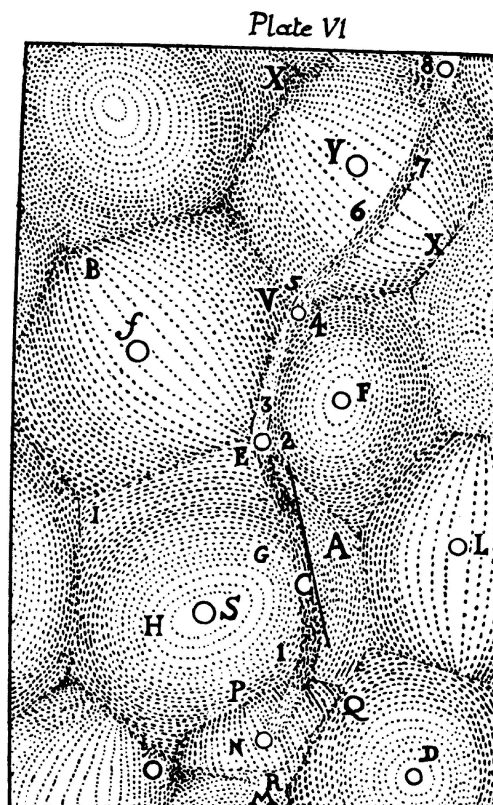
DECOMPOSIÇÕES VORONOI E DELAUNAY

Geometry *is* physics and thus of
cosmic importance.

Cornelius Lanczos

Podemos encontrar registros de decomposições do espaço físico em regiões "celulares" nas obras de René Descartes¹. A teoria dos vórtices, de Descartes, é uma tentativa de explicar fenômenos celestes observáveis na época de Galileu, Tycho e Kepler – tais como as órbitas planetárias e o movimento de cometas.

Figura 2.1: Vórtices de Descartes. Extraído de: Descartes, 1982.



Um vórtice, na concepção de Descartes, consiste em um grande anel circular que representa a trajetória de partículas materiais, como ilustra a Fig.2.1.

¹Em específico, nos escritos *Princípios da Filosofia e O Mundo ou Tratado da Luz*.

Na arquitetura cósmica de Descartes, há um *plenum* – a massa contínua – que preenche todo o espaço e que é composto por uma *rede de vórtices* separados e, no entanto, interconectados. Dessa forma, o Mundo, na descrição de Descartes, é um sistema contínuo de vórtices: não há vazios.

As decomposições de Descartes, embora não sejam puramente geométricas, pois são conduzidas por sua Filosofia Natural, registram o interesse pela compreensão e descrição do espaço. De fato, o entendimento da Geometria como a *ciência do espaço* só se consolidou após os trabalhos de Gauss. Seu contemporâneo, o matemático alemão Johann P. G. Dirichlet, retomou a noção geométrica das decomposições de Descartes no estudo das formas quadráticas.

A construção formal do método das decomposições, no entanto, surge apenas com o trabalho "Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques", do matemático russo Georgy Voronoi, 1908 – e, por isso, leva o nome *Decomposições Voronoi*. Em homenagem póstuma a Voronoi, o francês Boris Delaunay, 1934, publica o formalismo de um método dual – que ficou conhecido como as *Decomposições Delaunay*.

O objetivo deste segundo capítulo é apresentar a geometria das Decomposições Voronoi (seção 2.1) e Delaunay (seção 2.2) no Espaço Euclidiano de duas e três dimensões; discutir algumas aplicações à Astronomia e à Cosmologia e propor uma interpretação das decomposições tridimensionais aplicada à distribuição espacial de galáxias (seção 2.3).

2.1 Decomposições Voronoi

Dado um conjunto finito \mathcal{N} de pontos distintos no espaço Euclidiano \mathcal{E} N -dimensional, podemos associar a cada ponto $n_i \in \mathcal{N}$ uma região definida pela distância média aos seus n_j pontos contíguos. O resultado desse processo é uma decomposição do espaço em um conjunto de regiões – ou *domínios* – convexos², associados aos pontos geradores – ou *núcleos fundamentais*. Denominamos esse processo de *Decomposição Voronoi*³ (DV) de \mathcal{N} (Voronoi, 1908; Okabe, 2000).

Dessa forma, a cada núcleo fundamental n_i , para o qual n_j é seu contíguo, há uma

²Uma região ou um conjunto de pontos é dito convexo se, para qualquer par arbitrário de pontos desse conjunto, todo segmento de reta que conecta o par esteja contido no conjunto. No Espaço Euclidiano 3-dim, por exemplo, há nove Poliedros Regulares, dos quais cinco são convexos (Sólidos Platônicos) e quatro são não-convexos (Poliedros de Kepler-Poinsot).

³Também conhecida como Diagrama de Voronoi, recebeu, ao longo da História, diferentes denominações: Decomposição de Dirichlet, Diagrama de Thiessen, Diagrama de Wigner-Seitz, Transformação de Blum (Okabe, 2000).

única célula de Voronoi Π_i tal que um ponto u qualquer do plano pertence a Π_i se estiver mais próximo de n_i que de n_j , ou seja,

$$\Pi_i = \{u \mid d(u, n_i) \leq d(u, n_j), \quad \forall j \neq i\}, \quad (2.1)$$

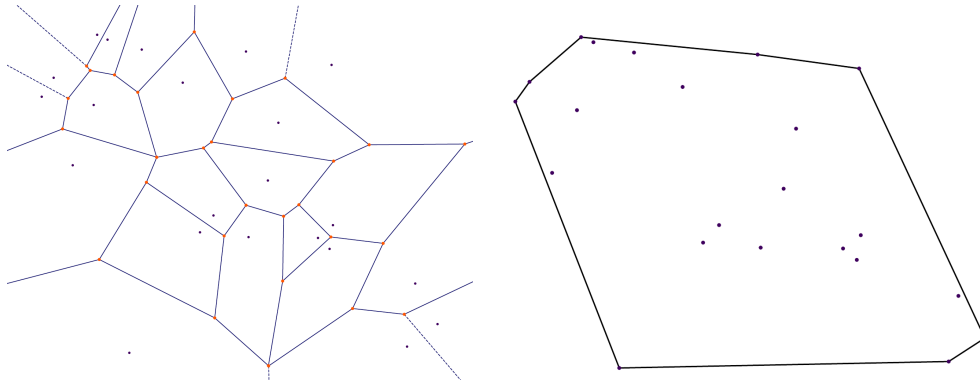
onde $d(n_i, n_j)$ é a distância euclidiana entre u_i e u_j .

Segue-se que a DV Π de um conjunto de pontos $i = \{1, \dots, m\}$ no espaço \mathcal{E} N -dimensional é dada por

$$\Pi = \{\Pi_1, \dots, \Pi_m\}, \quad 2 < m < \infty. \quad (2.2)$$

No caso em que $N=2$, \mathcal{E} é o plano Euclidiano e as células de Voronoi Π_i formam polígonos convexos regulares, como ilustra a Fig.2.2. No Espaço \mathcal{E} 3-dim, as células de Voronoi são poliedros convexos regulares – e, por isso, denominadas *Poliedros de Voronoi*.

Figura 2.2: (a.) Decomposição Voronoi e (b.) envoltória convexa da mesma distribuição de pontos no plano Euclidiano, gerados por distribuição aleatória uniforme em Python (Apêndice A).



A relação \leq na Eq.2.1 determina uma célula de Voronoi Π_i como um conjunto fechado. Podemos definir, de modo análogo, uma célula de Voronoi aberta Π_i^0 como

$$\Pi_i^0 = \{u \mid d(u, n_i) < d(u, n_j), \quad \forall j \neq i\}, \quad (2.3)$$

De fato, ambas as definições, Eqs.2.1–2.3, são aceitáveis para cobrir uma DV. Isso porque não é possível garantir que todos os núcleos n_i terão suas células de Voronoi bem definidas – como ocorre com os n_i mais externos do conjunto.

Nesse caso, devemos lançar mão de uma construção geométrica que delimita a nossa amostra de núcleos. Trata-se de uma *envoltória convexa* de Π – o menor conjunto

convexo de pontos que envolve os núcleos n_i , conforme ilustra a Fig.2.2b no caso bidimensional.

As células Π_i fechadas contêm sua própria borda, denotada por $\partial\Pi_i$. Devido à igualdade estar inclusa na relação da Eq.2.1, é necessário que uma aresta de Voronoi Λ_{ij} , no espaço \mathcal{E} 2–dim, seja o segmento de linha compartilhado pelos polígonos de Voronoi Π_i e Π_j , ou seja,

$$\Lambda_{ij} = \Pi_i \cap \Pi_j, \quad \forall j \neq i. \quad (2.4)$$

No plano, a borda é formada por segmentos de linha – ditas *arestas de Voronoi* e denotadas por Λ_{ij} . Os índices i, j indicam apenas que as arestas Λ_{ij} são determinadas por dois núcleos n_i, n_j contíguos.

No espaço \mathcal{E} 3–dim, dois núcleos contíguos – e, portanto, a intersecção de dois Poliedros – definem um *plano de Voronoi*, Σ_{ij} . As arestas de Voronoi Λ_{ijk} são determinadas pela intersecção de três poliedros de Voronoi,

$$\Lambda_{ij} = \Pi_i \cap \Pi_j \cap \Pi_k, \quad (2.5)$$

e, por isso, denotadas por três índices i, j, k .

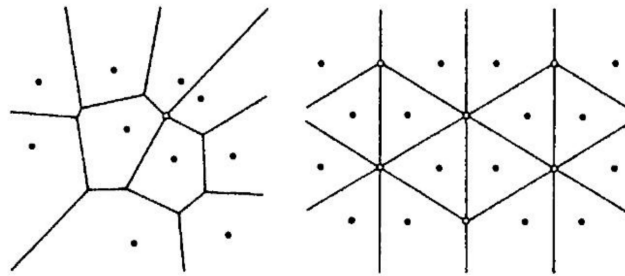
Surge, assim, uma forma de definir a DV em termos da composição das arestas Λ_{ijk} , ou seja, das bordas $\partial\Pi_i$, de modo que

$$\Pi = \bigcup_i \partial\Pi_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.6)$$

Torna-se intuitivo a partir dessa nova definição uma interpretação da DV como a constituição de uma rede espacial, que se adapta de acordo com a distribuição dos núcleos. Podemos denominá-la de *rede de Voronoi* (Okabe, 2000). É curioso notar que não há restrição alguma quanto à escala da distribuição espacial dos núcleos.

O ponto final de uma aresta Λ_{ij} (no plano) é um *vértice de Voronoi*, compartilhado por três ou mais polígonos de Voronoi e denotado por V_{ijk} . Se um vértice de Voronoi é compartilhado por quatro ou mais núcleos, dizemos que a decomposição Π correspondente é uma DV *degenerada*, como ilustra a Fig.2.3. Do contrário, se apenas três arestas se encontram em um vértice V_{ijk} , temos uma DV *não-degenerada*, como ocorre na Fig.2.2.

Figura 2.3: Decomposições Voronoi (2-dim) degeneradas. Extraído de: Okabe, 2000.



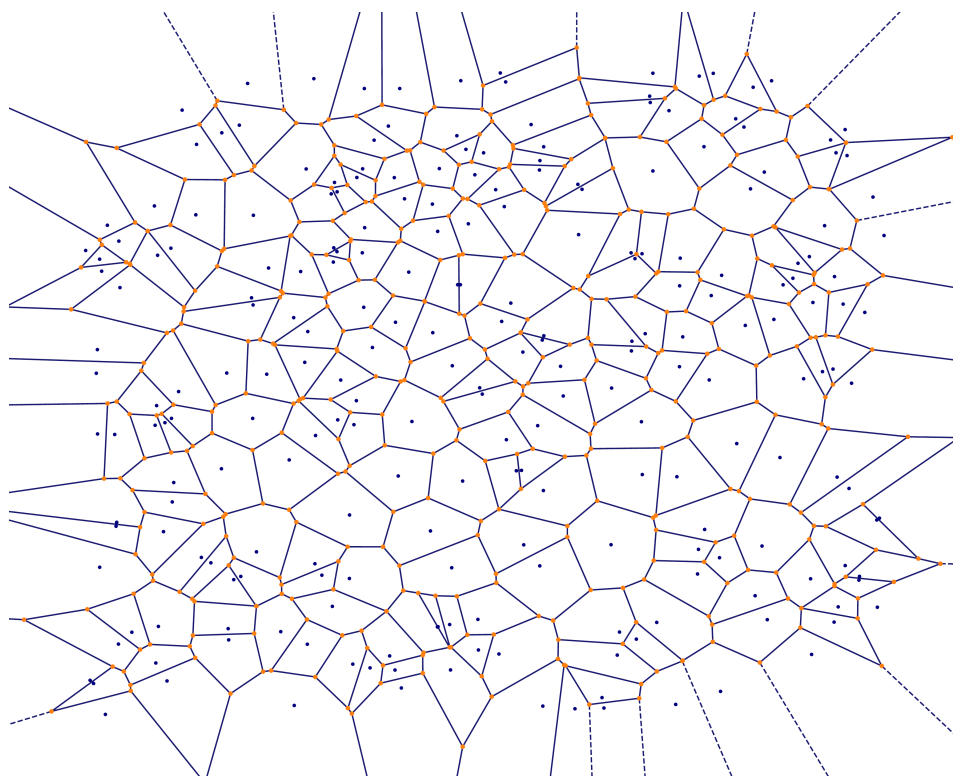
O paralelo que estamos fazendo entre as DV no plano e no espaço 3-dim serve apenas para nos dar uma noção intuitiva da geometria de uma DV. Estamos, de fato, interessados pela DV no caso tridimensional. A Tabela 2.1 sintetiza os principais elementos geométricos desse caso.

Tabela 2.1: Núcleos Fundamentais e relações constituintes da DV no Espaço Euclidiano \mathcal{E} de dimensão 3.

| Núcleos Fundamentais | Definem elementos de Voronoi | Notação |
|----------------------|------------------------------|-----------------|
| n_i | Poliedros | Π_i |
| n_i, n_j | Planos | Σ_{ij} |
| n_i, n_j, n_k | Arestas | Λ_{ijk} |
| n_i, n_j, n_k, n_l | Vértices | V_{ijkl} |

Vamos considerar um conjunto de núcleos distribuídos aleatoriamente no plano Euclidiano pelo Processo Pontual de Poisson Homogêneo (PPP). Por se tratar de um caso especial da DV, tal situação é denominada *Decomposição Voronoi–Poisson* (DVP), como ilustra a Fig. 2.4. Esse tipo de DV tem sido amplamente utilizado na investigação de diversas situações empíricas, tanto nas ciências naturais, como nas ciências sociais (Okabe, 2000).

Figura 2.4: Decomposição Voronoi-Poisson de 245 pontos no Plano Euclidiano. Os pontos roxos do DVP representam os núcleos fundamentais e os pontos amarelos, os vértices de Voronoi.



O nosso interesse pelo PPP reside justamente no fato de este ser capaz de reproduzir estruturas estatisticamente homogêneas. Por essa razão, a Decomposição Voronoi-Poisson servirá para validar os nossos resultados em relação a estruturas que não apresentam distribuição espacial homogênea.

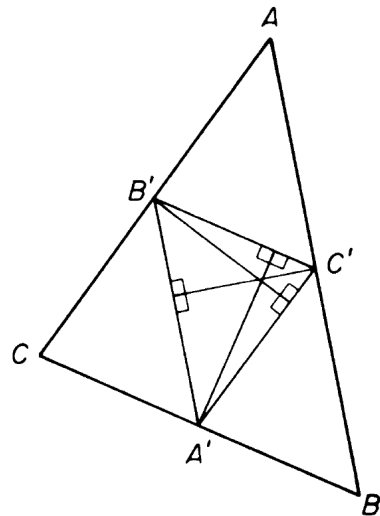
2.2 Decomposição Delaunay

Quando conectamos diretamente os núcleos aos seus contíguos, obtemos um novo tipo decomposição local do Espaço \mathcal{E} que, embora esteja diretamente relacionada à Decomposição Voronoi da mesma distribuição de núcleos, pode ser definida de modo totalmente independente.

Da Geometria Euclidiana Plana, sabemos que os bissetores⁴ ortogonais aos lados AB , AC e BC do triângulo ABC , como na Fig.2.6, se interseitam em um ponto – que é exatamente o centro do círculo circunscrito aos vértices do triângulo ABC (Lanczos, 1970).

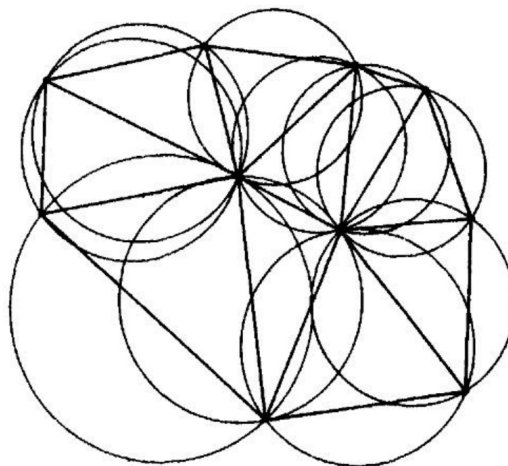
⁴Segmentos de linha que dividem objetos geométricos em partes iguais ou congruentes. No espaço 3-dim, os bissetores são planos.

Figura 2.5: Centro de um círculo circunscrito ao triângulo ABC. Extraído de: Lanczos, 1970.



Define-se um *triângulo de Delaunay* como o conjunto fechado de pontos que conectam três núcleos contíguos e cujo círculo a eles circunscrito não contém nenhum outro núcleo. Os vértices de um triângulo de Delaunay são conhecidos como *vértices de Delaunay* e os segmentos de linha que os conectam, *arestas de Delaunay*.

Figura 2.6: Círculos vazios de uma Triangulação de Delaunay. Extraído de: Okabe, 2000.

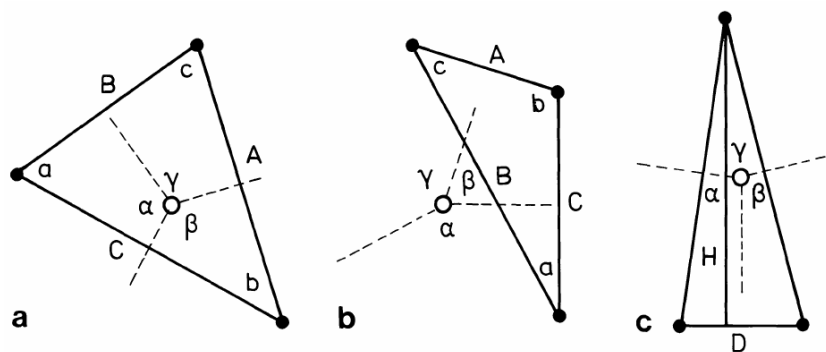


A conexão entre o triângulo de Delaunay e a Decomposição Voronoi 2-dim do mesmo conjunto de núcleos está nos vértices de Voronoi:

– os bissetores que passam por A' , B' e C' na Fig. 2.6 correspondem às arestas de Voronoi no plano;

- a intersecção dos bissetores corresponde a um vértice de Voronoi no plano;
- assim, o vértice de Voronoi é o centro do círculo vazio circunscrito aos vértices do triângulo de Delaunay.

Figura 2.7: Triângulos de Delaunay (linhas sólidas), com seus vértices (círculos preenchidos) e circuncentros (círculos abertos – que correspondem a vértices de Voronoi). As linhas pontilhadas indicam as arestas de Voronoi. **a.** Os ângulos a, b, c são menores que $\pi/2$. **b.** Um dos ângulos – neste caso, b – é maior que $\pi/2$; conseqüentemente, o circuncentro se situa fora do triângulo. **c.** Um triângulo de Delaunay com dois vértices muito próximos – a uma distância D – e um terceiro vértice mais afastado – a uma altura H da base D . Extraído de: Icke e Van de Weygaert, 1987.



Em três dimensões, cada vértice de Voronoi corresponde, de forma única na métrica Euclidiana, ao centro da esfera circunscrita aos quatro (três) núcleos que definem o mesmo vértice. Essa correspondência forma uma única decomposição dual à DV denominada *Decomposição Delaunay* (Delaunay, 1934).

Dessa forma, cada conjunto de quatro núcleos contíguos $\{n_i, n_j, n_k, n_l\}$ – que define um vértice de Voronoi V_{ijk} tridimensional (cf. Tab.2.1) – determina, de forma única no Espaço \mathcal{E} , um tetraedro que contém uma esfera vazia circunscrita aos quatro núcleos.

A Tabela 2.2 relaciona os elementos geométricos das Decomposições Voronoi e Delaunay em duas e três dimensões. É interessante notar o paralelo entre os elementos da Decomposição Delaunay em 2 e 3-dim, a menos dos tetraedros.

Além disso, podemos notar que a dualidade entre as duas decomposições está presente também nas dimensões dos objetos formados: o mesmo núcleo n_i que gera um Poliedro – objeto de dimensão 3 – na Decomposição Voronoi é um vértice – objeto adimensional – na Decomposição Delaunay. Em contrapartida, os quatro núcleos contíguos n_i, n_j, n_k, n_l que definem um Vértice de Voronoi, determinam, de

forma única, um Tetraedro de Delaunay. Situação semelhante ocorre com as duas linhas intermediárias da Tabela.

Tabela 2.2: Relação entre os elementos geométricos das Decomposições Voronoi e Delaunay no Espaço Euclidiano \mathcal{E} de dimensões 2 e 3.

| Núcleos | Voronoi | | Delaunay | |
|----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| | Espaço 2-dim | Espaço 3-dim | Espaço 2-dim | Espaço 3-dim |
| n_i | Polígonos | Poliedros | Vértices | Vértices |
| n_i, n_j | Arestas | Planos | Arestas | Arestas |
| n_i, n_j, n_k | Vértices | Arestas | Triângulos | Triângulos |
| n_i, n_j, n_k, n_l | — | Vértices | — | Tetraedros |

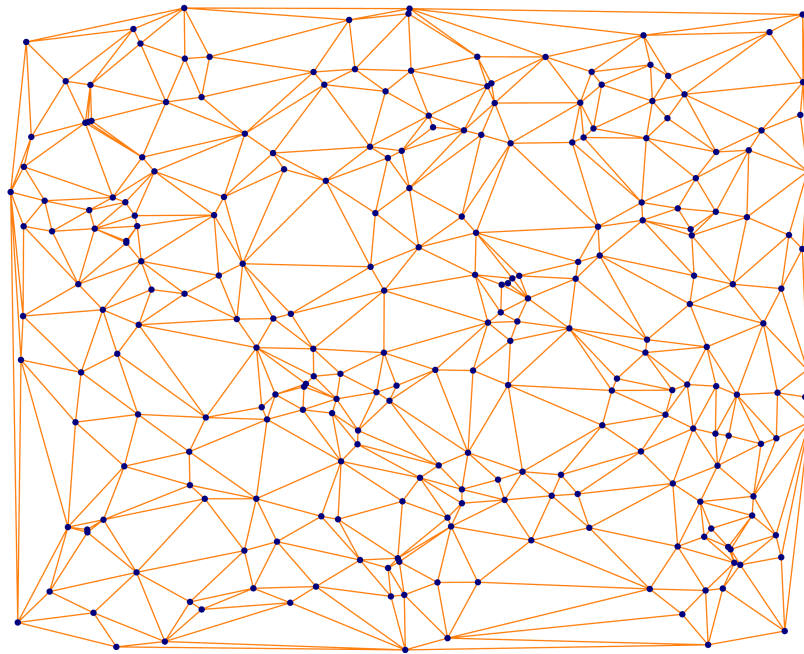
Apresentamos, a seguir, uma síntese das principais propriedades da Decomposição Delaunay no Espaço Euclidiano 3-dim:

- (i.) o circuncentro de um tetraedro de Delaunay (o centro de uma circunfera) é o vértice da DV tridimensional correspondente;
- (ii.) os núcleos fundamentais que formam os tetraedros de Delaunay são equidistantes ao vértice de Voronoi correspondente;
- (iii.) os tetraedros de Delaunay, por definição, satisfazem o "critério da esfera vazia"; todas as circunferas dos tetraedros de Delaunay são esferas vazias; no caso bidimensional, equivale ao "critério do círculo vazio";
- (iv.) o grafo⁵ Delaunay é o dual do grafo Voronoi (W. E. Schaap, 2007).
- (v.) as arestas externas de Delaunay formam a envoltória convexa do conjunto de núcleos de interesse;

As propriedades (i.)–(iii.) são extensões naturais das noções bidimensionais anteriormente discutidas. A propriedade (iv.) é uma conexão entre as Decomposições Voronoi e Delaunay e a teoria de grafos – que será melhor explorada nos próximos passos da presente pesquisa, especialmente em termos da teoria de redes (Hong et al., 2016). A proposição (v.) é consequência direta da definição de envoltória convexa.

⁵Estrutura formada por um conjunto de objetos que estão, de algum modo, conectados aos pares. Os objetos são representados pelos vértices do grafo e as conexões, por segmentos de linhas. Em geral, são não-orientados. Há uma série de propriedades da Decomposição Delaunay que podem ser exploradas em termos da teoria de grafos (Okabe, 2000).

Figura 2.8: Triangulação Delaunay-Poisson de 245 pontos no Plano Euclidiano.



De forma análoga à Decomposição Voronoi–Poisson, a Decomposição Delaunay bidimensional de pontos gerados pelo PPP denomina-se *Triangulação Delaunay–Poisson*. A Fig.2.8 ilustra a Triangulação de Delaunay do mesmo conjunto de pontos da Fig.2.4.

A relevância desse tipo de estrutura estatística de pontos surge mediante a aplicação das Decomposições Voronoi e Delaunay à cenários cosmológicos – e, em especial, à distribuição espacial de galáxias.

2.3 Cenário Cosmológico

O primeiro registro das Decomposições Voronoi e Delaunay em um periódico de Astronomia é o artigo de Kiang, 1966, "Random fragmentation in two and three dimensions". Kiang aplica as decomposições ao espectro de massa de nuvens interestelares e chama a atenção ao fato de que a fragmentação de áreas e volumes por Voronoi e Delaunay não depende de nenhum parâmetro arbitrário. O autor conclui, com ênfase, que tal metodologia poderia ser aplicada a qualquer situação astrofísica com uma distribuição estatística aleatória subjacente.

A aplicação das Decomposições Voronoi e Delaunay à Cosmologia surge pela

primeira vez com o artigo de Matsuda e Shima, 1984, "Topology of Supercluster-Void Structure". Neste é sugerida a similaridade entre as decomposições Voronoi em duas dimensões e os resultados de simulações numéricas de um Universo dominado por neutrino, proposto por Melott em 1983. Apesar disso, os autores não exploram que mecanismo físico poderia gerar esse tipo de resultado.

Foram necessárias um pouco mais de duas décadas até que as Decomposições Voronoi e Delaunay fossem introduzidas de forma sistemática na Astronomia e na Cosmologia. Em uma série de quatro artigos intitulados *Fragmenting the Universe*, publicados no final dos anos 1980, R. van de Weygaert e V. Icke apresentam um estudo estatístico dos elementos geométricos de Voronoi e Delaunay por meio da função de correlação de dois pontos.

Inicialmente, a novidade consistia no fato de as decomposições espaciais serem capazes de reproduzir, em modelos cinemáticos, os padrões anisotrópicos observados da distribuição de matéria cósmica. A expectativa era de que as decomposições pudessem ser aplicadas não apenas às situações cosmológicas, como também a outros "cenários de fragmentação-- tais como aglomerados de galáxias, a formação estelar, a estatística de estruturas celulares em atmosferas turbulentas e a densidade de meios interestelares (Icke e Van de Weygaert, 1987).

O modelo de Icke & Weygaert para a distribuição espacial de galáxias toma forma no segundo artigo da série *Fragmenting the Universe*, "Voronoi vertices as Abell clusters"(Icke e Van de Weygaert, 1989). Nele, a DV é construída de forma a reproduzir o "esqueleto" da distribuição de matéria. Como sugere o título, os aglomerados do Catálogo de Abell, 1957 ocupam os vértices de uma Decomposição de Voronoi em três dimensões.

Em larga escala, a reconstituição das subestruturas cósmicas observadas – aglomerados de galáxias, filamentos, panquecas e vazios cósmicos – é denominada pelos autores de *Espuma de Voronoi* ("Voronoi foam"). O interesse primário, apesar de não constar no título, decorre do padrão não-homogêneo de distribuição de galáxias, ou seja, na formação de enormes regiões de vazios cósmicos.

O modelo Espuma de Voronoi assume o espaço físico como sendo, localmente, Euclidiano e faz corresponder quatro tipos de subestruturas cósmicas – aglomerados de galáxias, filamentos, panquecas e vazios cósmicos – a quatro elementos geometricamente distintos da DV: vértices, arestas, polígonos e poliedros, conforme listado na Tab. 2.3. A Decomposição Delaunay não é considerada nesse estágio da

Espuma de Voronoi.

As células de Voronoi são, de acordo com esse modelo, interpretadas como regiões de vazios cósmicos em expansão, cujos limites consistem de paredes (polígonos de Voronoi) e filamentos (arestas de Voronoi) de matéria cósmica. Os vértices, por sua vez, resultam do encontro dos filamentos de matéria – e, por isso, são ocupados por aglomerados de galáxias.

Tabela 2.3: Elementos constituintes da DV no Modelo Espuma de Voronoi, de Icke e Van de Weygaert, 1989.

| Voronoi | Elementos geométricos | Estruturas cósmicas |
|---------|-----------------------|---------------------|
| nós | vértices | aglomerados |
| bordas | arestas | filamentos |
| planos | polígonos | paredes / panquecas |
| células | poliedros | vazios cósmicos |

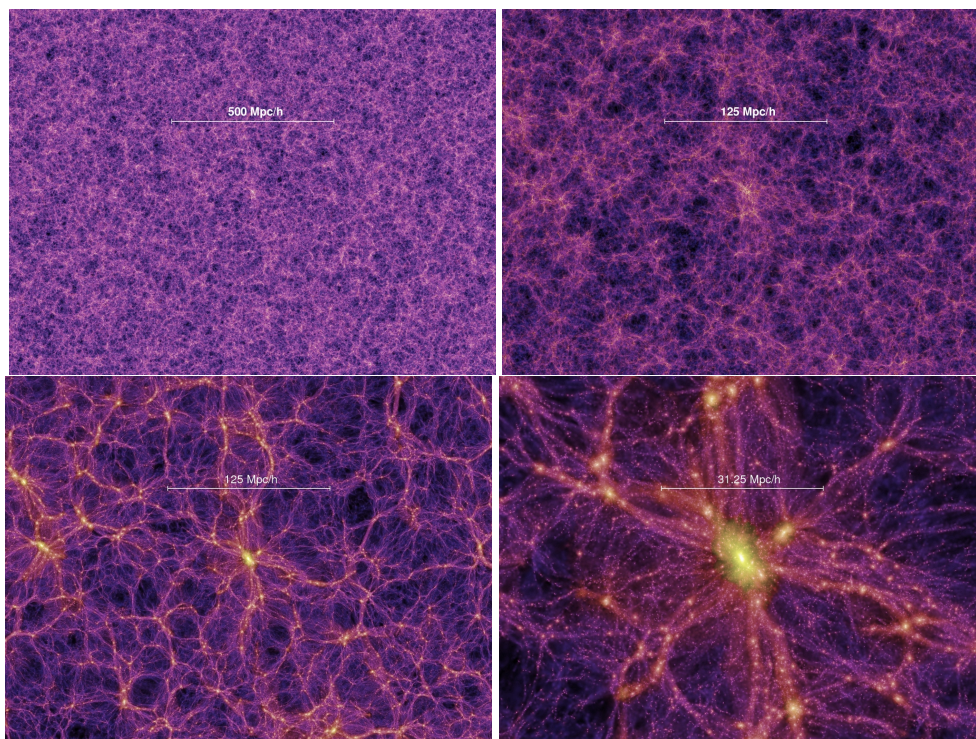
É interessante notar que, no final dos anos 1980, o *Center for Astrophysics* completou o primeiro mapeamento (CfA1) do desvio para o vermelho de 1100 galáxias, considerado o principal mapeamento da época e fortalecendo o surgimento de modelos de fragmentação de estruturas cósmicas.

O segundo milênio foi finalizado com a publicação de dois novos levantamentos de dados: o *Las Campanas* – com cerca de 26.000 desvios para o vermelho mapeados em 1996, e o CfA2 com 18.000 em 1999.

Com isso, o modelo inicial de Icke & Weygaert adquiriu maior consistência observacional e transformou-se gradativamente, ao longo das últimas duas décadas, culminando na teoria denominada *Rede Cósmica* ("Cosmic Web") (Van de Weygaert e W. Schaap, 2009). Assim, as Decomposições Voronoi e Delaunay passam a representar, de forma inequívoca, a geometria da arquitetura da Rede Cósmica (ver Fig. 2.9).

Em especial, as Decomposições Delaunay tornaram-se fundamentais no processo de interpolação de amostras discretas de pontos para a reconstrução de campos contínuos (W. E. Schaap, 2007). Essa técnica é sintetizada no modelo DTFE – *Delaunay Tessellation Field Estimator* e explora três propriedades das Decomposições Voronoi e Delaunay:

Figura 2.9: A Rede Cósmica em quatro tempos cósmicos distintos: na primeira linha, duas fatias quando o Universo tinha $t = 1.0$ Gyr e 4.7 Gyr; na segunda linha, $t = 13.6$ Gyr. Extraído de: [Projeto Simulação do Milênio](#).

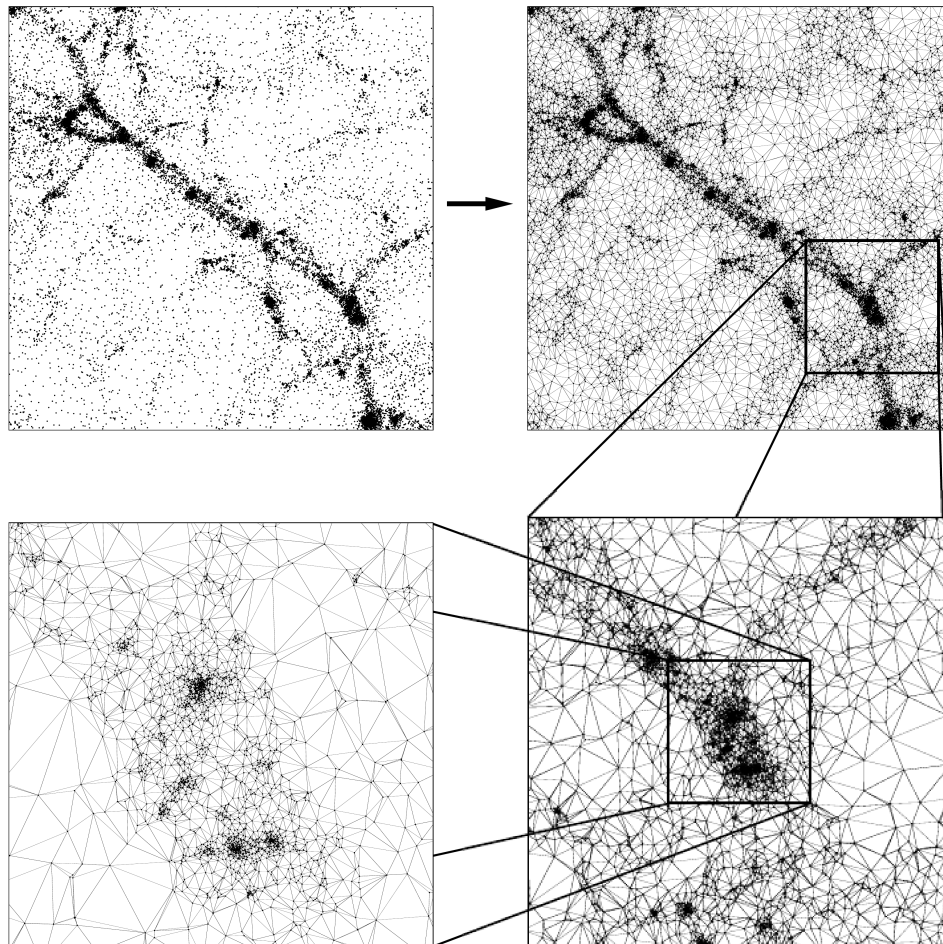


- (i.) as decomposições espaciais são altamente adaptáveis à densidade local de pontos; a partir disso, o DTFE é capaz de fazer uma estimativa local da densidade, definida em termos do inverso do volume das células de Voronoi/Delaunay;
- (ii.) as decomposições são altamente adaptáveis à geometria local da distribuição de pontos, o que torna possível traçar as características anisotrópicas da rede cósmica, como ilustra a Fig.2.10;
- (iii.) o DTFE aplica a Decomposição Delaunay com peso mínimo⁶ em processos de interpolação espacial para distribuições irregulares de pontos.

Com isso, o DTFE é capaz de reconstituir três características fundamentais da distribuição de matéria cósmica: a hierarquia das subestruturas, os padrões anisotrópicos na distribuição de densidades e a presença de regiões de vazios cósmicos (Van de Weygaert e Bond, 2008).

⁶A triangulação Delaunay não satisfaz o critério de comprimento mínimo da maior aresta, nem o critério do peso mínimo. O primeiro impõe que a triangulação minimize a aresta de maior comprimento; o segundo, minimiza o comprimento de todas as arestas (Okabe, 2000). No caso do algoritmo DTFE, um funcional associado a alguma equação diferencial não homogênea é introduzido para obter uma triangulação Delaunay mínima (W. E. Schaap, 2007).

Figura 2.10: Decomposição Delaunay de uma estrutura filamentar de pontos e sua vizinhança. A decomposições geradas são mostradas em três aproximações sucessivas, indicadas pelos quadrados. Os quadros revelam a forte adaptatividade da Decomposição Delaunay à densidade local e à geometria da distribuição espacial de pontos. Extraído de: W. E. Schaap, 2007.



Apesar de a teoria da Rede Cósmica ser altamente sofisticada, é preciso ressaltar alguns comentários. É curioso notar que, desde a concepção inicial do modelo Espuma de Voronoi, a proposta de Kiang, 1966, foi descartada – a saber, que as Decomposições Voronoi e Delaunay poderiam ser aplicadas a qualquer situação astrofísica sem depender qualquer parâmetro físico adicional.

No Espuma de Voronoi, a cada célula de Voronoi foi atribuído um peso de densidade afim de considerar os núcleos das células como centros de regiões de vazio em expansão e, portanto, ajustar os vértices como aglomerados de galáxias. Enquanto isso, a Decomposição Delaunay é capaz, de forma totalmente independente da Decomposição Voronoi, de localizar todas as esferas vazias e, ainda, a maior esfera

vazia da amostra.

Com isso, ao invés de usar a Decomposição Voronoi na sua forma mais simples e intuitiva – com os núcleos correspondendo a galáxias e as células, seus domínios gravitacionais – o modelo de Icke & Weygaert dispensou, a um só golpe, aquela que talvez seja a principal característica das Decomposições Voronoi e Delaunay – o fato de serem totalmente não-paramétricos. O DTFE, de forma similar, atribui peso de densidade às arestas de Delaunay ao reproduzir a formação de estruturas filamentosas.

Os resultados obtidos pelo grupo de pesquisa de Weygaert são notáveis, porém altamente dependentes do modelo cosmológico atualmente dominante – o Λ CDM.

A proposta do presente Trabalho consiste em justamente em considerar as Decomposições Voronoi e Delaunay como uma metodologia altamente independente de parâmetros físicos adicionais. Vamos restringir a aplicação ao âmbito da distribuição espacial de galáxias.

Tabela 2.4: Elementos constituintes das Decomposições Voronoi e Delaunay na nossa proposta.

| Voronoi | Delaunay | Interpretação física |
|-----------|----------|------------------------|
| núcleos | vértices | galáxias |
| — | arestas | distâncias naturais |
| poliedros | — | domínio de uma galáxia |

Na nossa interpretação das decomposições, cada núcleo de Voronoi (e, portanto, vértice de Delaunay) corresponde unicamente a uma galáxia da amostra e as respectivas células de Voronoi, a seus domínios gravitacionais. Nenhum peso de densidade é atribuído aos elementos das decomposições; logo, o modelo é estático. A única entrada de dados é a localização tridimensional dos pontos: suas coordenadas x , y , z .

Com a Decomposição Delaunay, localizamos todos os vizinhos naturais de cada ponto (galáxia) da amostra; calculamos uma distância característica a partir de todas as distâncias dos vizinhos naturais e obtemos um mapa da distribuição de distâncias da amostra de interesse (seção 3.2).

A geometria da Decomposição Voronoi será aplicada ao estudo da distribuição de densidades das células. Com isso, é possível fazer um mapeamento da concentração

e dispersão dos pontos da amostra, localizar a célula de menor densidade – mais dispersa – e, conseqüentemente, o tamanho do maior volume "vazio"[3.3](#)).

Capítulo 3

APLICAÇÃO: AGLOMERADO COMA

Neste terceiro capítulo, realizamos um primeiro teste da proposta apresentada na seção 2.3 – a saber, a aplicação das Decomposições Voronoi e Delaunay à distribuição espacial de galáxias. Em específico, à distribuição espacial de 1064 galáxias do Aglomerado Coma, cujas coordenadas tridimensionais foram obtidas do *SDSS – DR12* (Tempel et al., 2017).

O estudo do Aglomerado Coma é realizado em relação a uma amostra sintética de pontos, distribuídos pelo Processo Pontual de Poisson (PPP) e gerados em Linguagem Python (ver Apêndice A).

Na seção 3.1, apresentamos o Catálogo Tempel e registramos a Função de Correlação de Coma, em relação à distribuição de pontos da amostra sintética.

Em seguida, aplicamos a Decomposição Delaunay à distribuição das galáxias de Coma (seção 3.2), localizamos os vizinhos naturais de cada galáxia e calculamos as respectivas distâncias. Fazemos uma contagem de distâncias dos vizinhos e extraímos uma *métrica* característica da distribuição de Coma, em contraste à contagem de distâncias de todas as galáxias com todas, calculada pela função "pdist" do Python.

Finalizamos o capítulo com a Decomposição Voronoi de Coma (seção 3.3). Dela, exploramos a distribuição de vértices, volumes e densidades das células de Voronoi.

As Decomposições Voronoi e Delaunay, bem como os respectivos cálculos de distâncias e volumes, foram implementadas utilizando-se o Módulo de Algoritmos Espaciais e Estruturas de Dados da Biblioteca Científica para Python, o [SciPy.Spatial](#). Os histogramas foram plotados com a Biblioteca Numérica para Python, o [Numpy](#).

3.1 Dados do SDSS DR12

Os dados utilizados foram retirados do Catálogo do *Sloan Digital Sky Survey – Data Release 12*, publicado por Tempel et al., 2017. O catálogo contém as coordenadas (x, y, z) de 1064 Galáxias do Aglomerado Coma. A coordenada z é um valor aproximado obtido a partir de correções do rubro-desvio de cada galáxia (ver seção 1.1).

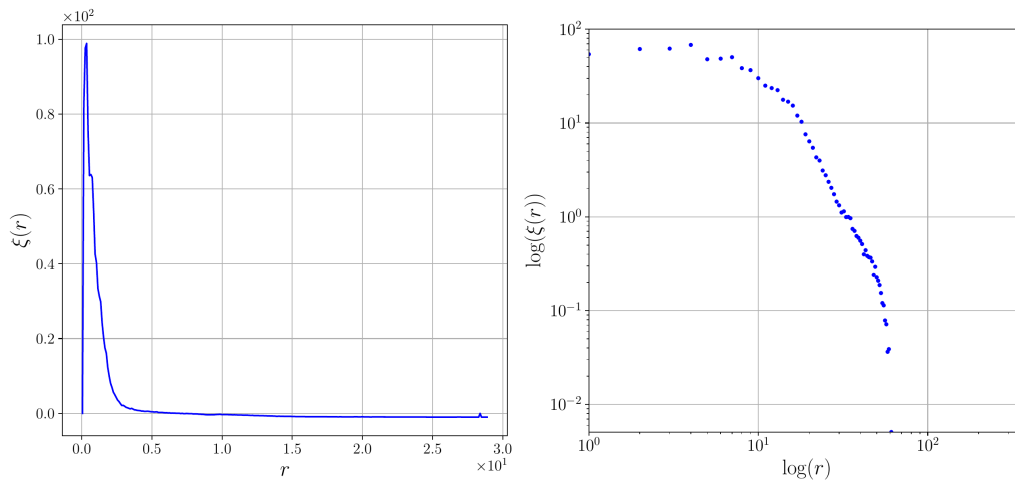
As dimensões do volume retangular são de

$$10.097575 \times 26.659775 \times 10.342226 \text{ Mpc.}$$

As caixas 3-dim – Figuras 3.2 e 3.5 – foram plotadas utilizando-se a função `Scatter` da Biblioteca Python para gráficos, o `Matplotlib`.

A Figura 3.2 mostra a distribuição espacial de 1064 Galáxias do Aglomerado Coma. Observa-se, nitidamente, a formação de uma estrutura filamentar bastante achatada, tipo panqueca, ao centro da amostra.

Figura 3.1: Função de correlação de 2 pontos do Aglomerado Coma em relação ao Processo Pontual de Poisson (PPP), com distâncias calculadas pela função "pdist".



Uma forma alternativa de definir a função de correlação, apresentada na seção 1.1, é tomar a razão de distâncias DD de Coma com as distâncias RR do Processo Pontual de Poisson, calculadas pela função "pdist":

$$\xi = \frac{n_D}{n_R} \frac{DD}{RR} - 1, \quad (3.1)$$

onde n_R/n_D é a razão da quantidade de distâncias do PPP, n_r , pela quantidade de distâncias de Coma, n_D .

A Fig. 3.1 mostra a função de correlação de 2 pontos de Coma, em relação ao Processo Pontual de Poisson. As distâncias são calculadas pela função "pdist". O pico da função de correlação indica o excesso de probabilidade de encontrar pares de galáxias a uma distância menor que ~ 4 Mpc.

Figura 3.2: Distribuição espacial de 1064 galáxias do Aglomerado Coma. Fonte: Dados do Catálogo SDSS-DR12 (Tempel et al., 2017).

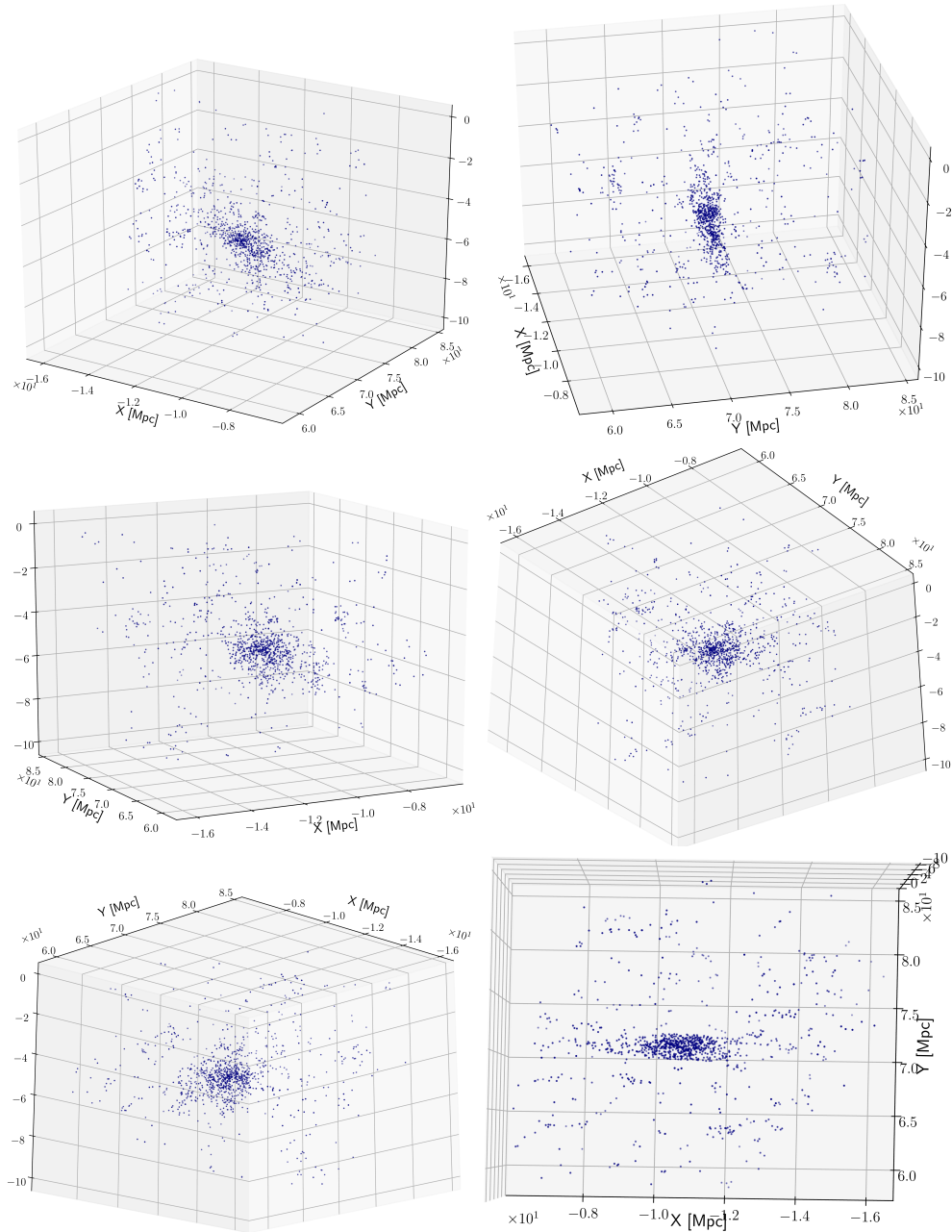
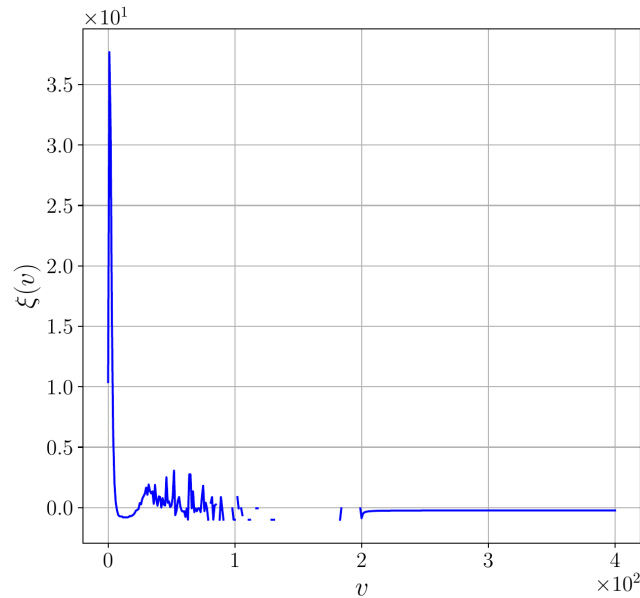


Figura 3.3: Função de correlação de 2 pontos do Aglomerado Coma em relação ao PPP, com distâncias calculadas pela Decomposição Delaunay.



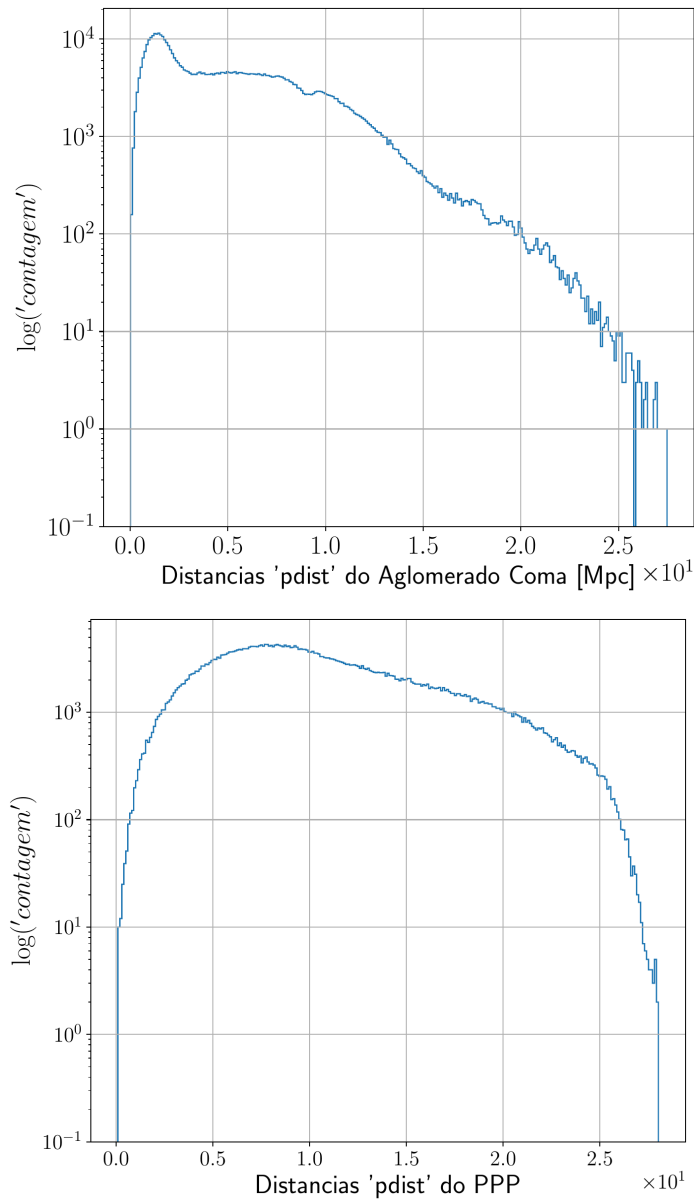
A Fig. 3.3 mostra a função de correlação de Coma, em relação ao PPP, com distâncias calculadas pela Decomposição Delaunay, como discutiremos na próxima seção. A função quebra entre 0.8 – 2.0Mpc.

3.2 Delaunay de Coma e a distribuição de distâncias

O cálculo de distâncias realizado na função de correlação de uma amostra observada, com relação a uma amostra sintética uniforme, é feito, tradicionalmente, de cada ponto com todos os demais. Basicamente, é o que a função "pdist" efetua.

Esse é um dos aspectos pelos quais a função de correlação é incapaz de caracterizar a geometria local de uma distribuição espacial de pontos (Hong et al., 2016). Ao calcular as distâncias de todos os pontos da amostra com todos, a quantidade de distâncias calculadas é gigantesca. A função "pdist" do Aglomerado Coma, por exemplo, retorna 565 516 distâncias calculadas. Qualquer possibilidade de se obter uma métrica característica pelo cálculo de "todo-com-todos" (e não pela função de correlação!) é diluída.

Figura 3.4: Histograma de Distâncias de todos com todos calculadas pela função 'pdist' do Python: (a.) Aglomerado Coma; (b.) PPP.



Uma forma de caracterizar a geometria local de uma distribuição espacial de pontos pode ser feita pelo *cálculo de distâncias dos "vizinhos naturais"*.

O problema geral que situa a distribuição espacial de distâncias pode ser colocado com a seguinte questão:

Dados um conjunto de N pontos no espaço D -dimensional e um ponto de interesse u , pertencente a esse espaço, quais são os pontos que minimizam a distância até u ?

O cálculo de distâncias de todo vizinhos do ponto u retorna uma *distância característica* associada a u . Percorrendo todos os pontos da amostra, obtemos uma *métrica característica* da distribuição espacial da amostra.

A simplicidade de se adotar a classificação do vizinho natural está no fato de ele não depender da forma ou da escala de distribuição: o critério de contiguidade é completamente *não paramétrico*.

A Decomposição Delaunay, ao conectar diretamente cada ponto aos seus vizinhos mais próximos, satisfazendo o critério da esfera vazia (seção 2.2), retorna as distâncias dos vizinhos naturais.

Em geral, costuma-se atribuir a cada vizinho natural k um *peso* na distribuição. Aumentando-se o número de k vizinhos, diminui-se a variância¹ da distribuição estatística, às custas, porém, de um aumento na distorção dos resultados (Saslaw, 2008).

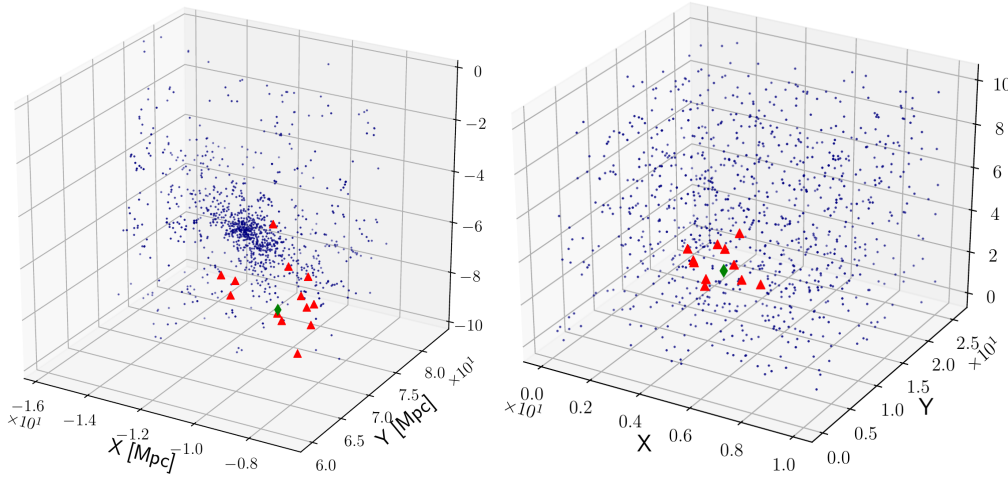
Os Tetraedros de Delaunay poderiam ter, dessa forma, um peso atribuído, por exemplo, de acordo com a massa de cada ponto (galáxia) da amostra, como é adotado no modelo DTFE, discutido na seção 2.2.

Este é um dos aspectos da metodologia tradicional que decidimos, no presente trabalho, eliminar. O cálculo da métrica característica de Coma deve ser guiado pelo critério dos vizinhos naturais sem atribuição de peso de densidade.

Pela função "find_neighbors" do algoritmo (ver Apêndice A), podemos localizar, com a Decomposição Delaunay, todos os vizinhos naturais de cada ponto da amostra. A Fig. 3.5 indica todos os vizinhos mais próximos (pontos vermelhos) de uma galáxia arbitrária (ponto verde) de Coma e do Processo Pontual de Poisson.

¹Variância é uma medida da dispersão estatística da distribuição em relação ao valor esperado.

Figura 3.5: Vizinhos naturais (marcações vermelhas) a partir da Decomposição Delaunay: (a.) do Aglomerado Coma; (b.) do PPP.



Com a classe "neighbor_distancias3D(pp, triang)", calculam-se as distâncias dos vizinhos de um ponto "pp" arbitrário, contido na Decomposição Delaunay dos pontos, denotada na classe por "triang".

O cálculo de distâncias de toda a Decomposição é feito pela classe "distancias3D(triang)", que utiliza a função "find_neighbors" acima para encontrar os vizinhos de cada ponto "P" da amostra. Para isso, guarda em "x,y,z" as coordenadas de cada ponto "P" e em "xn,yn,zn" as coordenadas dos respectivos vizinhos. Em seguida, realiza o cálculo da distância Euclidiana de cada ponto "P=(x,y,z)" com seu vizinho "V=(xn,yn,zn)",

$$\text{sqrt}((xn - x) ** 2 + (yn - y) ** 2 + (zn - z) ** 2).$$

Em comparação com o histograma de distâncias dos vizinhos do PPP (Fig. 3.6b.), podemos inferir que o Aglomerado Coma apresenta, ao menos, duas concentrações principais, correspondentes aos dois picos do primeiro histograma.

A métrica característica, de primeira ordem, obtida para Coma é de $2.6 \pm 0.45 \times 10^{-1}$ Mpc e tem uma frequência de 2406 vezes em 15 688 distâncias dos vizinhos calculadas (Tab. 3.1). Extraída do primeiro pico do histograma de distâncias dos vizinhos (Fig. 3.6a.), essa métrica caracteriza a concentração de galáxias da região central do "caroço" de Coma.

Uma distância característica de "segunda ordem", dada pelo segundo pico do histograma, é de 1.76 ± 0.45 Mpc e tem uma frequência aproximada de 250 vezes.

A distância máxima obtida pelo cálculo de distâncias dos vizinhos é de 20.05 Mpc. A função "pdist" retorna uma distância máxima de 27.48 Mpc e está consistente com as dimensões do volume retangular da amostra, cujo diâmetro da base 26Mpc^2 é da ordem de ~ 27.8 Mpc.

A média de distâncias dos vizinhos é 1.20 Mpc e a mediana², 0.52 Mpc.

Tabela 3.1: Comparação entre o cálculo de distâncias pela função "pdist" e pela Decomposição Delaunay 3-dim do Aglomerado Coma e do PPP.

| | Coma | | PPP | |
|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| | "pdist"[Mpc] | Delaunay [Mpc] | "pdist" | Delaunay |
| Contagem pontos | 1064 | 1064 | 991 | 991 |
| Contagem distâncias | 5.65×10^5 | 1.57×10^4 | 4.90×10^5 | 1.47×10^4 |
| Valor máx. | 2.75×10^1 | 2.00×10^1 | 2.80×10^1 | 1.98×10^1 |
| Média | 5.42 | 1.20 | 1.08×10^1 | 9.96 |
| Mediana | 4.69 | 0.52 | 9.83 | 9.54 |
| Desvio padrão | 4.02 | 1.46 | 5.28 | 4.06 |

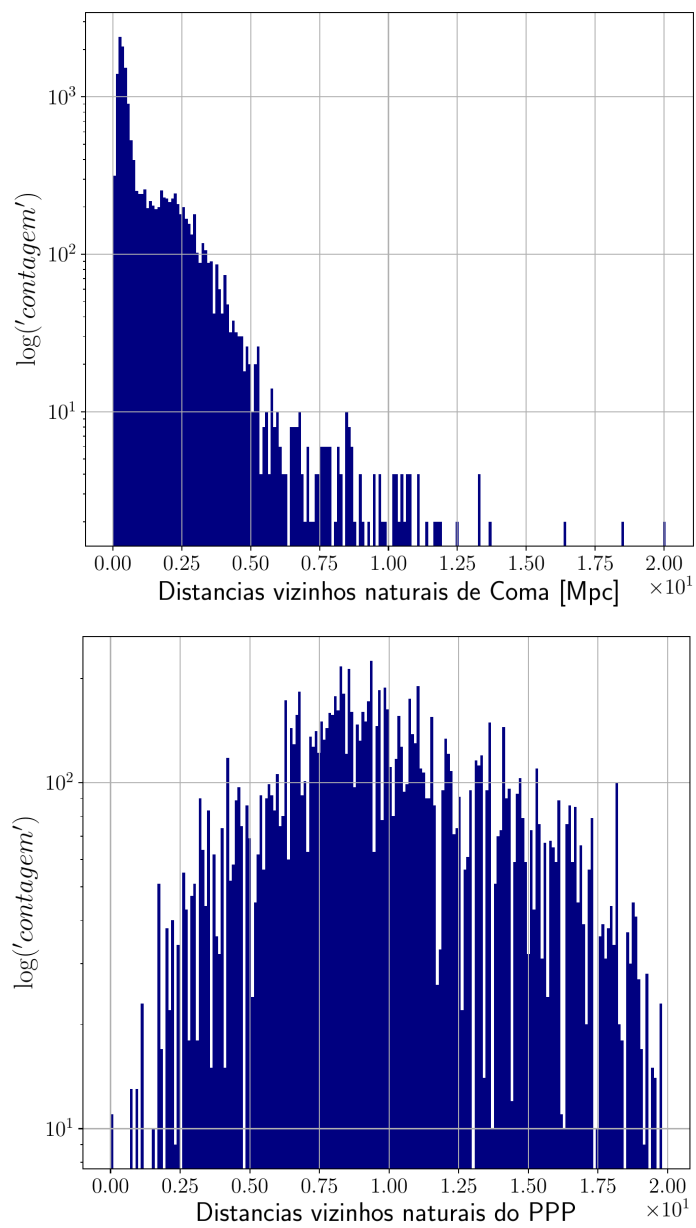
O grau de dispersão da amostra é indicada pelo desvio padrão σ da média \bar{u} , ou seja,

$$\sigma = \sqrt{\sum_i^n (u_i - \bar{u})^2}. \quad (3.2)$$

O desvio padrão do cálculo de distâncias dos vizinhos de Coma, de 1.46 Mpc, é ~ 3 vezes menor que o da função "pdist" – de 4.02 Mpc.

²A mediana é o valor que divide uma série de valores em dois conjuntos com mesmo número de valores. Se a série tem um número ímpar de valores, a mediana equivale ao ponto que está no meio da amostra. Se a série contém um número par de valores, a mediana corresponde ao valor médio dos dois valores ao meio da amostra.

Figura 3.6: Histograma de distâncias dos vizinhos naturais a partir da Decomposição Delaunay: (a.) do Aglomerado Coma; (b.) do PPP.



3.3 Voronoi de Coma e a distribuição de densidades

Apesar de diversos trabalhos³ apontarem correlações descritivas entre estruturas de galáxias e o ambiente, o artigo de Dressler, 1980, é que, de fato, estabelece uma relação bem definida entre a morfologia e a densidade local de galáxias.

Dressler classifica 6000 galáxias em 55 aglomerados e 15 regiões de campo. As densidades locais analisadas são regiões, projetadas no plano, limitadas pelas 10 galáxias mais brilhantes que $M_V = -21.4$. Dentre os resultados encontrados, estão os seguintes:

- Há uma forte dependência entre as elípticas e as lenticulares;
- Em aglomerados pobres, essa tendência é mais acentuada quando testada como função da densidade local, do que quando é comparada apenas como função do raio do aglomerado;
- A dependência das lenticulares com o ambiente é mais fraca, em relação às elípticas ou espirais.

Em suma, Dressler aponta para duas conclusões principais:

(D1.) há um efeito físico de primeira ordem sobre as galáxias em relação à densidade local e *não* em relação ao raio do aglomerado;

(D2.) tal efeito está diretamente ligado à formação das galáxias – e não, necessariamente, ao seu processo evolutivo.

A partir do trabalho de Dressler, o estudo de estruturas de galáxias tornou-se, irrecusavelmente, associado ao ambiente que as envolve. A distribuição espacial de galáxias é, dessa forma, imprescindível à morfologia de galáxias. A análise da densidade local da distribuição é, portanto, uma tarefa de primeira ordem.

³Hubble e Humason, 1931, descrevem uma fração preponderante de elípticas e espirais em aglomerados, observados na época até uma distância limite da ordem de Mpc; Oemler, 1974, aponta uma correlação entre a estrutura das galáxias e a forma do aglomerado, a densidade local e a concentração central. O estudo crítico feito por de Vaucouleurs, 1971, especialmente do Catálogo de Abell, 1957, e da análise de superaglomerados de Yu e Peebles, 1969, finaliza afirmando que "aglomerações múltiplas de galáxias e de aglomerados de galáxias é um fenômeno básico de importância fundamental para as teorias de origem e evolução do Universo". Yu & Peebles estipulam, pelo espectro de potências, um limite superior de 10% de chance de existirem superaglomerados para a classe de distâncias 5, no Catálogo de Abell (ver seção 1.2). De Vaucouleurs confronta a conclusão apressada de Yu & Peebles, demonstrando que uma correlação positiva entre os aglomerados de Abell persistem, ao menos, até 100 Mpc e, possivelmente, até 200 Mpc.

Cybulski et al., 2014, analisa o campo de densidades do Superaglomerado Coma⁴, em 2-dim, a partir das áreas de Voronoi associadas a 3505 galáxias. É a referência mais próxima do nosso estudo de densidades, apesar de o autor utilizar outras técnicas complementares, como a Árvore de Extensão Mínima ("Minimal Spanning Tree"), para definir a Formação de Estrelas como função da densidade local e do tipo de ambiente – aglomerado, filamento, grupo ou vazio cósmico.

No presente estudo, as densidades locais são associadas a célula 3-dim de Voronoi pelo inverso do seu volume, definido individualmente por cada galáxia (núcleo da decomposição), e comparadas com as densidades de Voronoi-Poisson.

O algoritmo (Apêndice A) realiza a Decomposição Voronoi de cada amostra pela classe `scipy.spatial.Voronoi`; constrói a envoltória convexa ("Convex hull") respectiva e calcula o volume de cada célula ("region") contida na envoltória.

No caso do Voronoi de Coma, a envoltória convexa conecta 47 vértices, eliminando da análise, portanto, as 47 galáxias mais afastadas da região central do Aglomerado. Com isso, são calculados 1017 volumes – sendo o volume máximo da ordem de $5.66 \times 10^5 \text{ Mpc}^3$ e o volume mínimo, $1.07 \times 10^{-3} \text{ Mpc}^3$ (Tab. 3.2).

Tabela 3.2: Relação dos elementos geométricos calculados a partir da Decomposição Voronoi 3-dim do Aglomerado Coma e do PPP. Os valores referentes ao PPP contêm as mesmas dimensões de unidades das quantidades da amostra física.

| | Coma | | PPP | |
|---------------|----------------------------|----------------------------------|----------------------|-----------------------|
| | Volumes [Mpc^3] | Densidades [Mpc^{-3}] | Volumes | Densidades |
| Contagem | 1017 | 1017 | 923 | 923 |
| Valor máx. | 5.66×10^5 | 9.27×10^2 | 1.44×10^6 | 1.72 |
| Valor mín. | 1.07×10^{-3} | 1.76×10^{-6} | 5.7×10^{-1} | 6.91×10^{-7} |
| Média | 9.22×10^3 | 4.54×10^1 | 3.47×10^3 | 3.46×10^{-1} |
| Mediana | 1.20×10^{-1} | 8.34 | 3.16 | 3.16×10^{-1} |
| Desvio padrão | 2.70×10^4 | 8.82×10^1 | 5.41×10^4 | 2.65×10^{-1} |

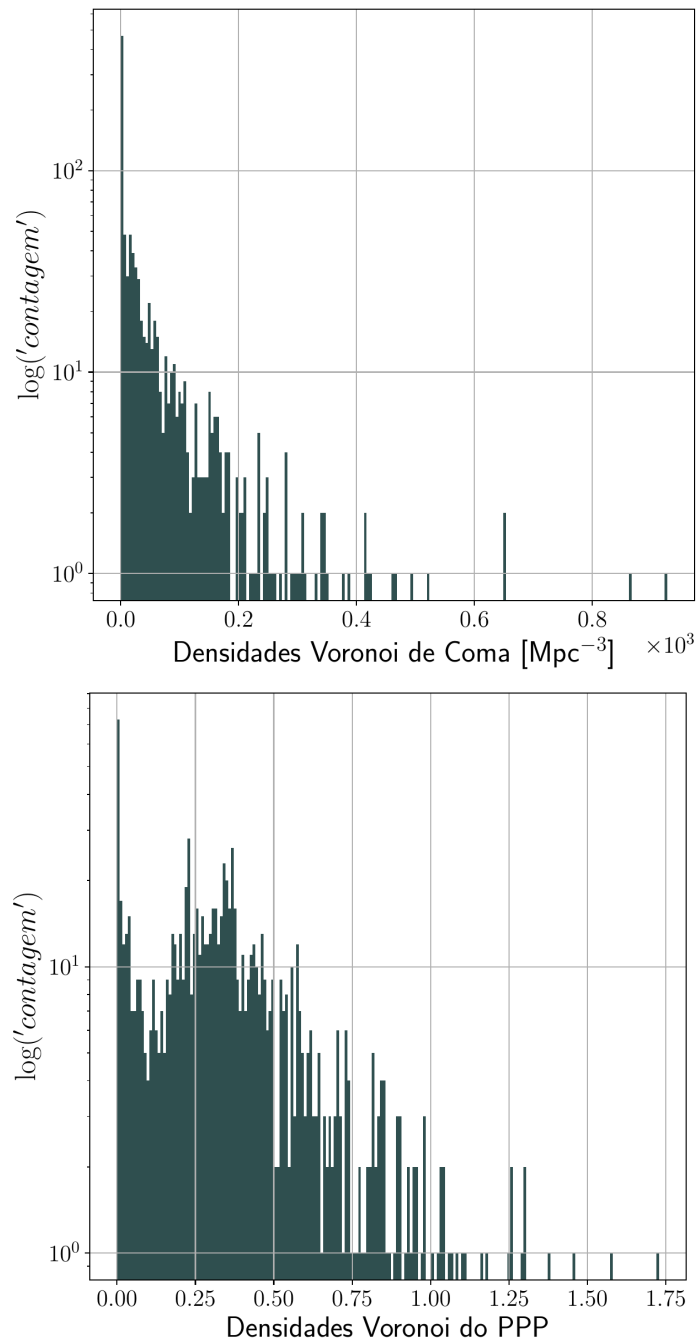
A média de volumes calculados é da ordem de $9.22 \times 10^3 \text{ Mpc}^3$ e a mediana, $1.20 \times 10^{-1} \text{ Mpc}^3$. O desvio padrão das densidades de Coma tem uma diferença de 3 ordens a menos, em relação ao desvio padrão dos volumes correspondentes – o que justifica a escolha de utilizarmos o histograma de densidades ao invés do histograma de volumes.

⁴Estrutura formada pelo Aglomerado Coma com o Aglomerado Leo, A 1367.

O pico do primeiro histograma de densidades dos poliedros de Voronoi (Fig. 3.7) caracteriza a alta concentração de células do Aglomerado Coma.

As densidades associadas às células atingem um valor mínimo de $1.76 \times 10^{-6} \text{ Mpc}^{-3}$. O subconjunto de galáxias com alta concentração espacial – e, portanto, com os menores volumes de Voronoi – corresponde à região central de Coma.

Figura 3.7: Histograma de densidades dos Poliedros de Voronoi: (a.) do Aglomerado Coma; (b.) do Processo Pontual de Poisson.



O histograma de densidades de Voronoi revela, ainda, o valor máximo da densidade de uma célula de Coma: $9.27 \times 10^2 \text{ Mpc}^3$, que corresponde exatamente ao valor do menor volume de Voronoi do Aglomerado Coma.

O histograma de densidades Voronoi-Poisson, com desvio padrão de 2.65×10^{-1} , sugere uma caracterização típica de estruturas estatisticamente homogêneas. O pico inicial – de máximo 5.7×10^{-1} – ocorre 73 vezes, uma frequência ~ 6 vezes menor que a frequência máxima de densidades de Coma, 467.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As Decomposições Voronoi e Delaunay continuam despertando o fascínio e a imaginação criativa de muitos pesquisadores. Mesmo após mais de duas décadas sendo aplicadas na Astrofísica, seus recursos não estão esgotados.

No estudo da distribuição espacial de galáxias, as hipóteses mais simples e intuitivas de aplicação das Decomposições Voronoi e Delaunay podem gerar resultados robustos, independentes de parâmetros físicos externos e consistentes com a teoria Física vigente.

A análise tridimensional de Coma foi possível devido à publicação bastante recente do Catálogo Tempel et al., 2017, que disponibilizou as três coordenadas espaciais de 1064 galáxias de Coma, com dados obtidos pelo *SDSS – DR12*.

Escolhemos restringir as possibilidades de aplicação das Decomposições Voronoi e Delaunay a duas situações de análise do Aglomerado Coma bem delimitadas: a distribuição de distâncias dos vizinhos pela Decomposição Delaunay e a distribuição de densidades pela Decomposição Voronoi das galáxias de Coma.

O estudo é validado com relação a uma amostra sintética de pontos gerados pelo Processo Pontual de Poisson Homogêneo.

A necessidade de validar os resultados em relação a estruturas uniformes provém do Princípio Cosmológico, assumido por Einstein, 1917, e confirmado pelos Mapeamentos de Distribuições Espaciais de Galáxias (homogeneidade) e pelas observações da Radiação Cósmica de Fundo (isotropia). Isso torna o PPP um dos principais processos estatísticos utilizados em Cosmologia na análise de distribuição de matéria em larga escala ($\gtrsim 100$ Mpc).

É curioso notar que, em geral, os manuais didáticos de Astrofísica Extragaláctica atribuem à Função de Correlação de 2 pontos a marca de ser a principal função estatística que caracteriza aglomerações de galáxias. Uma importância que é, no entanto, questionável.

Em primeiro lugar, porque é tradicionalmente calculada pela distância, aos pares, de "todos-com-todos", diluindo, na média, qualquer caracterização da distribuição de pontos. Em segundo lugar, porque falha ao caracterizar a geometria da distribuição (Hong et al., 2016). Em terceiro, porque é aplicada, com raras exceções, a catálogos com as coordenadas de ascensão reta e declinação das galáxias. Em suma, a Função

de Correlação de 2 pontos encerra-se na sentença "Há (ou não) uma distribuição não-homogênea de pares de galáxias (ou aglomerados)".

Já a aplicação da Decomposição Delaunay ao cálculo 3-dim de distâncias dos vizinhos retorna resultados que são afetados *apenas* pelas correções da coordenada radial de cada galáxia, obtidas a partir da análise espectroscópica de cada rubro-desvio detectado pelo *Sloan DR12*.

Pelo histograma de distâncias dos vizinhos, obtivemos para Coma uma métrica característica, de "primeira ordem", de $2.6 \pm 0.45 \times 10^{-1}$ Mpc, com uma frequência de 2406 vezes em 15 688 distâncias dos vizinhos calculadas.

É possível identificar, ainda, uma distância característica de "segunda ordem", dada pelo segundo pico do histograma, de 1.76 ± 0.45 Mpc, com uma frequência ~ 250 vezes.

A Decomposição Voronoi de Coma consiste, basicamente, de dois elementos geométricos relevantes: os núcleos de Voronoi, que correspondem às galáxias de Coma, e as células, associadas ao "domínio gravitacional" de cada galáxia.

Com isso, calculamos o volume e associamos a cada célula uma densidade definida pelo inverso do volume. 47 galáxias foram utilizadas para delimitar a envoltória convexa da decomposição e, portanto, não compõem os resultados.

O pico do histograma de densidades dos poliedros de Voronoi caracteriza a alta concentração de células do Aglomerado Coma. As densidades associadas às células atingem um valor mínimo de 1.76×10^{-6} Mpc⁻³. O subconjunto de galáxias com alta concentração espacial – e, portanto, os menores volumes de Voronoi – corresponde à região central de Coma.

Os resultados obtidos no presente trabalho estão abertos a uma investigação mais detalhada. Podemos vislumbrar algumas perspectivas com relação aos próximos passos da pesquisa, a saber:

(i.) A amostra de Coma pode ser subdividida em, ao menos, três subconjuntos, sendo os dois primeiros centrados nas métricas de primeira e de segunda ordem e o terceiro na porção do histograma de distâncias delimitada entre 5 e 20 Mpc (Fig. 3.6); a partir disso, pode-se analisar a relação entre a densidade e a morfologia predominante de cada subconjunto e estabelecer relações com os diferentes ambientes de Coma - filamentos, paredes e vazios cósmicos;

(ii.) Os maiores volumes do Voronoi de Coma podem ser utilizados para mapear as Galáxias Ultra-Difusas (UDGs);

(iii.) As esferas vazias de Delaunay, não empregadas nesse trabalho, podem ser muito úteis para mapear os vazios cósmicos ("voids") de Coma.

* * *

BIBLIOGRAFIA

- Abell, G. O. (1957). “The Distribution of Rich Clusters”. Tese de doutorado. Pasadena, California: California Institute of Technology.
- Abell, G. O., H. G. Corwin Jr. e R. P. Olowin (1989). “A catalog of rich clusters of galaxies”. Em: *Astrophysical Journal Supplement Series* 70, pp. 1–138. DOI: [10.1086/191333](https://doi.org/10.1086/191333).
- Chiboucas, K. et al. (2011). “Ultra-compact Dwarfs in the Coma Cluster”. Em: *The Astrophysical Journal* 737, p. 86. arXiv: [1106.5828](https://arxiv.org/abs/1106.5828).
- Coles, Peter e Francesco Lucchin (2002). *Cosmology: the Origin and Evolution of Cosmic Structure*. Wiley.
- Cybulski, R. et al. (2014). “From voids to Coma: the prevalence of pre-processing in the local Universe”. Em: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 439, pp. 3564–3586.
- de Vaucouleurs, G. (1971). “The Large-Scale Distribution of Galaxies and Clusters of Galaxies”. Em: *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 83.492, p. 113. DOI: [10.1086/129088](https://doi.org/10.1086/129088).
- Delaunay, B. (1934). “Sur la sphere vide”. Em: *Jour Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS* 6, pp. 793–800.
- Descartes, R. (1982). *Principles of Philosophy*. Netherlands: Springer.
- Dressler, A. (1980). “Galaxy morphology in rich clusters - Implications for the formation and evolution of galaxies”. Em: *The Astrophysical Journal* 236, pp. 351–365. DOI: [10.1086/157753](https://doi.org/10.1086/157753).
- Einstein, A. (1917). “Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie”. Em: *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 142-152.
- Guzzo, L. e et al (2014). “The VIMOS Public Extragalactic Redshift Survey (VIPERS). An unprecedented view of galaxies and large-scale structure at $0.5 < z < 1.2$ ”. Em: *Astronomy & Astrophysics* 566, A108.
- Hong, S. et al. (2016). “Discriminating topology in galaxy distributions using network analysis”. Em: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 459, pp. 2690–2700.
- Hubble, E. e M. L. Humason (1931). “The Velocity-Distance Relation among Extragalactic Nebulae”. Em: *The Astrophysical Journal* 74, p. 43. DOI: [10.1086/143323](https://doi.org/10.1086/143323).
- Icke, V. e R. Van de Weygaert (1987). “Fragmenting the Universe. I – Statistics of two-dimensional Voronoi foams”. Em: *Astronomy and Astrophysics* 184, pp. 16–32.

- Icke, V. e R. Van de Weygaert (1989). “Fragmenting the Universe. II – Voronoi vertices as Abell clusters”. Em: *Astronomy and Astrophysics* 213, pp. 1–9.
- Kiang, T. (1966). “Random Fragmentation in Two and Three Dimensions”. Em: *Zeitschrift für Astrophysik* 64, p. 433.
- Lanczos, C. (1970). *Space through the ages: The evolution of geometrical ideas from Pythagoras to Hilbert and Einstein*. Academic Press Inc.
- Lee, M. G. e I. S. Jang (2016). “Globular Clusters and Spur Clusters in NGC 4921, the Brightest Spiral Galaxy in the Coma Cluster”. Em: *The Astrophysical Journal* 819, 77, p. 77. arXiv: [1601.03047](https://arxiv.org/abs/1601.03047).
- Makler, M. (2010). “Cosmologia I: Fenomenologia”. Em: *Programa Mínimo de Cosmologia*. Ed. por M. Novello e et al., pp. 77–147.
- Martínez, V. J. (2009). *Data Analysis in Cosmology*. Berlin Heidelberg: Springer Verlag.
- Martínez, V. J. e E. Saar (2001). *Statistics of the Galaxy Distribution*. Chapman e Hall-CRC.
- Matsuda, T. e E. Shima (1984). “Topology of Supercluster-Void Structure”. Em: *Progress of Theoretical Physics* 71.4, pp. 855–858.
- McConnell, N. J. et al. (2012). “Dynamical Measurements of Black Hole Masses in Four Brightest Cluster Galaxies at 100 Mpc”. Em: *The Astrophysical Journal* 756, p. 179. arXiv: [1203.1620](https://arxiv.org/abs/1203.1620).
- Mo, H., F. van den Bosch e S. White (2010). *Galaxy Formation and Evolution*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Oemler Jr., A. (1974). “The Systematic Properties of Clusters of Galaxies. Photometry of 15 Clusters”. Em: *The Astrophysical Journal* 194, pp. 1–20. DOI: [10.1086/153216](https://doi.org/10.1086/153216).
- Okabe, A. (2000). *Spatial Tessellations: Concepts and applications of Voronoi diagrams*. 2nd. Wiley.
- Padmanabhan, Thanu (2006). *An invitation to Astrophysics*. World Scientific.
- Peebles, P. J. E. (1971). *Physical cosmology*. Princeton University Press.
- Peter, P. e J-P. Uzan (2009). *Primordial Cosmology*. Oxford University Press.
- Rood, H. J. e G. N. Sastry (1971). “‘Tuning Fork’ Classification of Rich Clusters of Galaxies”. Em: *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 83, p. 313. DOI: [10.1086/129128](https://doi.org/10.1086/129128).
- Saslaw, W. C. (2008). *The Distribution of the Galaxies: Gravitational Clustering in Cosmology*. Digitally printed version. Cambridge University Press.
- Schaap, W. E. (2007). “DTFE: the Delaunay Tessellation Field Estimator”. Tese de doutorado. Kapteyn Astronomical Institute.

- Schneider, P. (2015). *Extragalactic Astronomy and Cosmology: An Introduction*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Tempel, E. et al. (2017). “Merging groups and clusters of galaxies from the SDSS data. The catalogue of groups and potentially merging systems”. Em: *ArXiv e-prints:1704.04477*.
- Van de Weygaert, R. e J. R. Bond (2008). “Observations and Morphology of the Cosmic Web”. Em: *A Pan-Chromatic View of Clusters of Galaxies and the Large-Scale Structure*. Ed. por M. Plionis, O. López-Cruz e D. Hughes. Vol. 740. Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, p. 24.
- Van de Weygaert, R. e W. Schaap (2009). “The Cosmic Web: Geometric Analysis”. Em: *Data Analysis in Cosmology*. Ed. por V. J. Martínez et al., pp. 291–413.
- Voronoi, G. (1908). “Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques”. Em: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 134, pp. 198–287.
- Yu, J. T. e P. J. E. Peebles (1969). “Superclusters of Galaxies?” Em: *The Astrophysical Journal* 158, p. 103. DOI: [10.1086/150175](https://doi.org/10.1086/150175).
- Zwicky, F. (1937). “On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae”. Em: *The Astrophysical Journal* 86, p. 217. DOI: [10.1086/143864](https://doi.org/10.1086/143864).
- Zwicky, F., E. Herzog e P. Wild (1968). *Catalogue of galaxies and of clusters of galaxies*.

Apêndice A

IMPLEMENTAÇÃO DOS ALGORITMOS

```
# coding: utf-8

# # Hartmann TCC, 2017
# ## Apendice B

# In[122]:

'Sumario:'
'Parte 1 - Aglomerado Coma'
' 1.1 Pdist '
' 1.2 Delaunay '
' 1.3 Voronoi '
'Parte 2 - Processo Pontual de Poisson '
' 2.1 Pdist '
' 2.2 Delaunay '
' 2.3 Voronoi '
'Parte 3 - Funcao de Correlacao '

# In[2]:

get_ipython().magic(u'matplotlib qt4')
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

import scipy.spatial as sp
from scipy.spatial import Voronoi, voronoi_plot_2d, ConvexHull,
convex_hull_plot_2d, Delaunay, delaunay_plot_2d

from scipy.stats import poisson, mode
from pylab import sqrt, flatten, mean, median
from numpy import var

import numpy as np
import numpy.random as random
```

```

# ## Parte 1 - Aglomerado Coma

# ### Importa dados SDSS-DR12

# In[3]:

import numpy as np

# Le os dados do Coma_cluster
ObjID = np.genfromtxt("Coma_cluster_boxxyz.csv", delimiter=",",
                      usecols=0, skip_header=1, dtype="i8")
X,Y,Z = np.genfromtxt("Coma_cluster_boxxyz.csv", delimiter=",",
                      usecols=(1,2,3), skip_header=1, dtype="f8").T

# In[4]:

g0x = np.array([X]).T
g0y = np.array([Y]).T
g0z = np.array([Z]).T

d0x = sp.distance.cdist(g0x,g0x)
d0y = sp.distance.cdist(g0y,g0y)
d0z = sp.distance.cdist(g0z,g0z)

boxX = np.amax(d0x)
boxY = np.amax(d0y)
boxZ = np.amax(d0z)

print 'Aglomerado Coma com', len(X), 'pontos e dimensões', boxX ,
      'x', boxY, 'x', boxZ, 'Mpc**3'

# ### Distribuicao Espacial de 1064 Galaxias do Aglomerado Coma

# In[5]:

fig = plt.figure()

```



```

ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.scatter(X, Y, Z, color='navy', s=0.8)
plt.xlabel('X [Mpc]', fontsize=18)
plt.ylabel('Y [Mpc]', fontsize=18)
plt.grid(True)

plt.rcParams['text.usetex'] = True
plt.rcParams['text.latex.unicode'] = True
plt.rc('xtick', labelsizes=14)
plt.rc('ytick', labelsizes=14)

plt.ticklabel_format(style='sci', axis='x', scilimits=(0,0))
plt.ticklabel_format(style='sci', axis='y', scilimits=(0,0))
plt.subplots_adjust(top=0.99, bottom=0.03, left=0.14, right=0.79,
                    hspace=0.20, wspace=0.20)

### 1.1 Pdist de Coma

# In[7]:

points = np.array([X,Y,Z]).T #coordenadas de Coma

PDist_Coma = sp.distance.pdist(points) #funcao pdist de Coma

nPDist_Coma = np.array([PDist_Coma]) #transforma lista em array
nPDist_Coma = nPDist_Coma.size #guarda tamanho do array de distancias Coma

print 'Agglomerado Coma: numero pdist =', nPDist_Coma,
      ', valor max =', max(PDist_Coma), ', media =', mean(PDist_Coma),
      ', mediana =', median(PDist_Coma), ', desvio padrao =', sqrt(var(PDist_Coma))

# In[9]:

i_bin = float(0.1) #definir de acordo com o catalogo
n_bin = int((max(PDist_Coma)//i_bin))

print n_bin, #mode(PDist_Coma)

```

```
# ### Histograma Pdist de Coma
```

```
# In[10]:
```

```
fig = plt.figure()
```

```
ax = plt.subplot(111)
```

```
PDisth_Coma = plt.hist(PDist_Coma, n_bin, log=1, histtype='step')
```

```
plt.xlabel('Distancias \'pdist\' do Aglomerado Coma [Mpc]', fontsize=20)
```

```
plt.ylabel('$\log(\text{contagem})$', fontsize=20)
```

```
plt.grid(True)
```

```
plt.rcParams['text.usetex'] = True
```

```
plt.rcParams['text.latex.unicode'] = True
```

```
plt.rc('xtick', labels=16)
```

```
plt.rc('ytick', labels=16)
```

```
plt.ticklabel_format(style='sci', axis='x', scilimits=(0,0))
```

```
plt.subplots_adjust(top=0.99, bottom=0.03, left=0.14, right=0.79,
                    hspace=0.20, wspace=0.20)
```

```
# ## 1.2 - Delaunay de Coma
```

```
# In[8]:
```

```
# Encontra todos vizinhos naturais de um ponto da amostra pela Decomposicao Delaunay 3D
```

```
dl = sp.Delaunay(points) #Decomposicao Delaunay 3D de Coma
```

```
def find_neighbors(pindex, triang):
```

```
    """based on
```

```
    http://stackoverflow.com/questions/12374781/how-to-find-all-neighbors-of-a-given-point-in-a-delaunay-triangulation-using-sci
```

```
    Delaunay.vertex_neighbor_vertices
```

```
    Neighboring vertices of vertices.
```

```
    Tuple of two ndarrays of int: (indices, indptr).
```

*The indices of neighboring vertices of vertex k are
indptr[indices[k]:indices[k+1]].*

'''

```
indx, indptr = triang.vertex_neighbor_vertices
```

```
return indptr[indx[pindex]:indx[pindex+1]]
```

```
#mostrando os vizinhos do ponto pp
```

```
pp = 192
```

```
neighbor_indices = find_neighbors(pp,dl)
```

```
xn = [dl.points[i,0] for i in neighbor_indices]
```

```
yn = [dl.points[i,1] for i in neighbor_indices]
```

```
zn = [dl.points[i,2] for i in neighbor_indices]
```

```
# ### Figura: Vizinhos Naturais de Coma
```

```
# In[9]:
```

```
plt.figure()
```

```
ax = plt.subplot(111, projection='3d')
```

```
ax.scatter3D(dl.points[:,0], dl.points[:,1], dl.points[:,2], color='navy', s=.8)
```

```
plt.plot(xn,yn,zn, '^r')
```

```
plt.plot([dl.points[pp,0]], [dl.points[pp,1]], [dl.points[pp,2]], 'dg')
```

```
plt.xlabel('X [Mpc]', fontsize=18)
```

```
plt.ylabel('Y [Mpc]', fontsize=18)
```

```
plt.grid(True)
```

```
plt.rcParams['text.usetex'] = True
```

```
plt.rcParams['text.latex.unicode'] = True
```

```
plt.rc('xtick', labelsizes=14)
```

```
plt.rc('ytick', labelsizes=14)
```

```
plt.ticklabel_format(style='sci', axis='x', scilimits=(0,0))
```

```
plt.ticklabel_format(style='sci', axis='y', scilimits=(0,0))
```

```
plt.subplots_adjust(top=0.99, bottom=0.03, left=0.14, right=0.79,  
                    hspace=0.20, wspace=0.20)
```

```
# In[9]:
```

```
# Calculo 3D de distancias de todos vizinhos de um único ponto da amostra
```

```
def neighbor_distancias3D(pp, triang):
    distancias = []
    neighbor_indices = find_neighbors(pp, triang)
    # coordenadas dos ponto P
    x = triang.points[pp,0]
    y = triang.points[pp,1]
    z = triang.points[pp,2]
    # coordenadas dos vizinhos
    xn = [triang.points[i,0] for i in neighbor_indices]
    yn = [triang.points[i,1] for i in neighbor_indices]
    zn = [triang.points[i,2] for i in neighbor_indices]

    distancias.append( sqrt((xn-x)**2 + (yn-y)**2 + (zn-z)**2) )
    return list(flatten(distancias))
```

```
# In[10]:
```

```
# Calculo 3D de distancias de todos vizinhos de cada ponto da amostra
```

```
def distancias3D(triang):
    'FF'

    distancia = []
    for P in range(triang.npoints):
        neighbor_indices = find_neighbors(P, triang)

        # coordenadas do ponto P
        x = triang.points[P,0]
        y = triang.points[P,1]
        z = triang.points[P,2]
        # coordenadas dos vizinhos
        xn = [triang.points[i,0] for i in neighbor_indices]
        yn = [triang.points[i,1] for i in neighbor_indices]
        zn = [triang.points[i,2] for i in neighbor_indices]

        distancia.append( sqrt((xn-x)**2 + (yn-y)**2 + (zn-z)**2) )
```

```

    return list(flatten(distancia))

# ### Distancias dos vizinhos de Coma

# In[11]:

dd = distancias3D(dl)

nnd = np.array([dd]) #transforma lista em array
nnd = nnd.size #guarda tamanho do array de distancias Coma

print 'Delaunay de Coma: numero de vertices', len(dl.points),
      ', numero distancias vizinhos =', nnd, ', valor max =', max(dd),
      ', media =', mean(dd), ', mediana =', median(dd),
      ', desvio padrao =', sqrt(var(dd))

# In[12]:

vizdist = neighbor_distancias3D(pp,dl)

len(vizdist), sqrt(var(vizdist))

# In[15]:

arqdel = open('ObjID_xyz_Dmean_Dmedian_desvio_delaun.csv', 'w')
print >> arqdel, 'ObjID, x, y, z, mean_delaun, median_delaun,
               'max_delaun, desvio_delaun'
for pp in range(len(ObjID)):
    vizdist = neighbor_distancias3D(pp,dl)
    print >> arqdel, '%i8, %.8f, %.8f, %.8f, %.8f, %.8f, %.8f, %.8f '
    get_ipython().magic(u'ObjID[pp],points[pp][0], points[pp][1], points[pp][2], mean(vizdist),
                        median(vizdist), max(vizdist), sqrt(var(vizdist)) )

# ### Histograma de distancias dos vizinhos de Coma

```

```

# In[23]:

plt.figure()

ax = plt.subplot(111)
x,y,_ = plt.hist(dd, bins=200, log=1, histtype='barstacked', color='navy')
plt.xlabel('Distancias vizinhos naturais de Coma [Mpc]', fontsize=20)
plt.ylabel('$\log(\text{contagem})$', fontsize=20)
plt.grid(True)

plt.rcParams['text.usetex'] = True
plt.rcParams['text.latex.unicode'] = True
plt.rc('xtick', labels=16)
plt.rc('ytick', labels=16)

plt.ticklabel_format(style='sci', axis='x', scilimits=(0,0))
plt.subplots_adjust(top=0.99, bottom=0.03, left=0.14, right=0.79,
                    hspace=0.20, wspace=0.20)

## 1.3 - Voronoi de Coma

# In[22]:

Decomposicao Voronoi de Coma

vor_Coma = Voronoi(points)

# In[11]:

Calculo de volumes dos poliedros de Voronoi

def voronoi_volumes(voronoi_obj):
    voronoi_volumes = []
    for region in voronoi_obj.regions:
        if region != [] and -1 not in region:
            vertices_points = np.array([voronoi_obj.vertices[i, :]
                                       for i in region])
            convex_hull = ConvexHull(vertices_points)

```

```

        if voronoi_obj.points.shape[1] == 2:
            voronoi_volumes.append(0.0)
        else:
            voronoi_volumes.append(convex_hull.volume)
    return np.array(voronoi_volumes)

# ### Volumes Voronoi de Coma

# In[12]:

vol_Coma = voronoi_volumes(vor_Coma)

print 'Voronoi de Coma: numero de volumes =', len(vol_Coma),
      ', valor max $[Mpc**3]$ =', max(vol_Coma),
      ', valor min $[Mpc**-3]$ = ', min(vol_Coma),
      ', media =', mean(vol_Coma), ', mediana =', median(vol_Coma),
      ', desvio padrao =', sqrt(var(vol_Coma))

# ### Densidades Voronoi de Coma

# In[28]:

dens_Coma = 1/vol_Coma

print 'Voronoi de Coma: numero de densidades =', len(dens_Coma),
      ', valor max $[Mpc**-3]$ =', max(dens_Coma),
      ', valor min $[Mpc**-3]$ = ', min(dens_Coma),
      ', media =', mean(dens_Coma), ', mediana =', median(dens_Coma),
      ', desvio padrao =', sqrt(var(dens_Coma))

# In[15]:

#arqdel = open('ObjID_xyz_vol_dens_vor.csv', 'w')
#print >> arqdel, 'ObjID, x, y, z, vol_vor, dens_vor'
#print >> arqdel, '%i8, %.8f, %.8f, %.8f, %.8f, %.8f' % (ObjID[pp],points[pp][0], points[pp][1], p

```

```

# ### Histograma de densidades Voronoi de Coma

# In[35]:

plt.figure()

ax = plt.subplot(111)
x,y,_ = plt.hist(dens_Coma, bins=200, log=1, histtype='bar',
                 color='darkslategray')
plt.xlabel('Densidades Voronoi de Coma [Mpc$^{-3}$]', fontsize=20)
plt.ylabel('$\log(\text{contagem})$', fontsize=20)
plt.grid(True)

plt.rcParams['text.usetex'] = True
plt.rcParams['text.latex.unicode'] = True
plt.rc('xtick', labels=16)
plt.rc('ytick', labels=16)

plt.ticklabel_format(style='sci', axis='x', scilimits=(0,0))
plt.subplots_adjust(top=0.95, bottom=0.10, left=0.25, right=0.80,
                    hspace=0.20, wspace=0.20)

# ### Parte 2 - Processo Pontual de Poisson Homogeneo

# In[23]:

Lx = []
Ly = []
Lz = []

Dx = int(boxX) #tamanho da caixa
Dy = int(boxY)
Dz = int(boxZ)

P = 3

Tc = 2 #tamanho da celula

np.random.seed(3)

```



```

for k in range(0, Dz//Tc):
    for j in range(0, Dy//Tc):
        for i in range(0, Dx//Tc):
            n = np.random.poisson(P)

            x = Tc*np.random.uniform(0,1,n) +Tc*i
            Lx = np.append(Lx,x)

            y = Tc*np.random.uniform(0,1,n) +Tc*j
            Ly = np.append(Ly,y)

            z = Tc*np.random.rand(n) +Tc*k
            Lz = np.append(Lz,z)

        np.savetxt('PPP.csv', list(zip(Lx, Ly, Lz)))
        print(n, len(Lx), len(Ly), len(Lz))

# ### Distribuicao Espacial de pontos gerados pelo PPP

# In[24]:

fig = plt.figure()

ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.scatter(Lx, Ly, Lz, color='b', s=0.8)
plt.xlabel('X', fontsize=18)
plt.ylabel('Y', fontsize=18)
plt.grid(True)

plt.rcParams['text.usetex'] = True
plt.rcParams['text.latex.unicode'] = True
plt.rc('xtick', labelsizes=14)
plt.rc('ytick', labelsizes=14)

plt.ticklabel_format(style='sci', axis='x', scilimits=(0,0))
plt.ticklabel_format(style='sci', axis='y', scilimits=(0,0))
plt.subplots_adjust(top=0.95, bottom=0.10, left=0.25, right=0.80,
                    hspace=0.20, wspace=0.20)

```

```

# ## 2.1 PDist do PPP

# In[25]:

ppoints = np.column_stack((Lx,Ly,Lz)) #pontos PPP

PPDist = sp.distance.pdist(ppoints) #funcao pdist do PPP

nPPDist = np.array([PPDist]) #transforma lista em array
nPPDist = nPPDist.size #guarda tamanho do array de distancias Coma

print 'PPP: numero de pontos =', len(ppoints),
      ', numero pdist =', nPPDist, ', valor max =', max(PPDist),
      ', media =', mean(PPDist), ', mediana =', median(PPDist),
      ', desvio padrao =', sqrt(var(PPDist))

# ### Histograma PDist do PPP

# In[29]:

fig = plt.figure()

ax = plt.subplot(111)
PPDisth = plt.hist(PPDist, n_bin , log=1, histtype='step')
plt.xlabel('Distancias \'pdist\' do PPP', fontsize=20)
plt.ylabel('$\log(\text{contagem})$', fontsize=20)
plt.grid(True)

plt.rcParams['text.usetex'] = True
plt.rcParams['text.latex.unicode'] = True
plt.rc('xtick', labels=20)
plt.rc('ytick', labels=20)

plt.ticklabel_format(style='sci', axis='x', scilimits=(0,0))
plt.subplots_adjust(top=0.95, bottom=0.10, left=0.25, right=0.80,
                    hspace=0.20, wspace=0.20)

# ## 2.2 Delaunay do PPP

```

```

# In[25]:

pdl = sp.Delaunay(ppoints) #Decomposicao Delaunay 3D do PPP

# ### Distancias dos vizinhos do PPP

# In[26]:

rr = distancias3D(pdl) #distancias dos vizinhos PPP

nrr = np.array([rr]) #transforma lista em array
nrr = nrr.size #guarda tamanho do array

print 'Delaunay do PPP: numero de vertices =', len(pdl.points),
      ', numero distancias vizinhos =', nrr,
      ', valor max =', np.amax([rr]), ', media =', mean(rr),
      ', mediana =', median(rr), ', variancia =', var(rr)

# ### Histograma de distancias dos vizinhos do PPP

# In[35]:

plt.figure()

ax = plt.subplot(111)
RRh = plt.hist(rr, bins=200, log=1, histtype='bar', color='navy')
plt.xlabel('Distancias VNs do PPP', fontsize=20)
plt.ylabel('$\log(\text{contagem})$', fontsize=20)
plt.grid(True)

plt.rcParams['text.usetex'] = True
plt.rcParams['text.latex.unicode'] = True
plt.rc('xtick', labels=16)
plt.rc('ytick', labels=16)

plt.ticklabel_format(style='sci', axis='x', scilimits=(0,0))
plt.subplots_adjust(top=0.95, bottom=0.10, left=0.25, right=0.80,
                    hspace=0.20, wspace=0.20)

```

```
# ## 2.3 - Voronoi do PPP

# In[27]:

vor_ppp = Voronoi(ppoints) #Decomposicao Voronoi do PPP

# ### Volumes Voronoi do PPP

# In[40]:

vol_ppp = voronoi_volumes(vor_ppp) #Volumes dos poliedros de Voronoi

print 'Voronoi do PPP: numero de volumes =', len(vol_ppp),
      ', valor max =', max(vol_ppp), ', valor min =', min(vol_ppp),
      ', media =', mean(vol_ppp), ', mediana =', median(vol_ppp),
      ', variancia =', var(vol_ppp)

# ### Densidades Voronoi do PPP

# In[41]:

dens_ppp = 1/vol_ppp #densidades dos poliedros de Voronoi

print 'Voronoi do PPP: numero de densidades =', len(dens_ppp),
      ', valor max =', max(dens_ppp), ', valor min =', min(dens_ppp),
      ', media =', mean(dens_ppp), ', mediana =', median(dens_ppp),
      ', variancia =', var(dens_ppp)

# ### Histograma de densidades Voronoi do PPP

# In[42]:

plt.figure()
```

```

ax = plt.subplot(111)
_,_,_ = plt.hist(dens_ppp, bins=200, log=1, histtype='bar',
                 color='darkslategray')
plt.xlabel('Densidades Voronoi do PPP', fontsize=20)
plt.ylabel('$\log(\text{'contagem'})$', fontsize=20)
plt.grid(True)

plt.rcParams['text.usetex'] = True
plt.rcParams['text.latex.unicode'] = True
plt.rc('xtick', labelsz=16)
plt.rc('ytick', labelsz=16)

plt.ticklabel_format(style='sci', axis='x', scilimits=(0,0))
plt.subplots_adjust(top=0.95, bottom=0.10, left=0.25, right=0.80,
                    hspace=0.20, wspace=0.20)

# ## Parte 3 - Funcao de correlacao

# ### Com distancias calculadas pelo 'pdist'

# In[43]:

# Evelise Gausmann

razao3=np.array([])
for i in range(2):
    if np.all(PDsth_Coma[i] == 0):
        razao3=np.append(razao3,0)
    else:
        raz3 = (((nPPDist/float(nPDsth_Coma))
                 *(PDsth_Coma[i]/PPDisth[i])) - 1.0)
        razao3 = np.append(razao3,raz3)

# In[45]:

fig = plt.figure()

ax = plt.subplot(111)
plt.plot(razao3, 'b' )

```

```

plt.xlabel(r'$r$', fontsize=20)
plt.ylabel(r'$\xi(r)$', fontsize=20)
plt.grid(True)

plt.rcParams['text.usetex'] = True
plt.rcParams['text.latex.unicode'] = True
plt.rc('xtick', labels=16)
plt.rc('ytick', labels=16)

plt.ticklabel_format(style='sci', axis='x', scilimits=(0,0))
plt.ticklabel_format(style='sci', axis='y', scilimits=(0,0))
plt.subplots_adjust(top=0.95, bottom=0.10, left=0.25, right=0.80,
                    hspace=0.20, wspace=0.20)

# ### Com distancias calculadas pelo Delaunay

# In[46]:

dcf = np.array([])
for i in range(2):
    if np.all(DDh[i] == 0):
        dcf = np.append(dcf, 0)
    else:
        cf = (((nrr/float(ndd)) * (DDh[i]/RRh[i])) - 1.0)
        dcf = np.append(dcf, cf)

# In[48]:

fig = plt.figure()

ax = plt.subplot(111)
plt.plot(dcf, '-b', markersize=.8 )
plt.xlabel(r'$v$', fontsize=20)
plt.ylabel(r'$\xi(v)$', fontsize=20)
plt.grid(True)

plt.rcParams['text.usetex'] = True
plt.rcParams['text.latex.unicode'] = True
plt.rc('xtick', labels=16)

```

```
plt.rc('ytick', labels=16)

plt.ticklabel_format(style='sci', axis='x', scilimits=(0,0))
plt.ticklabel_format(style='sci', axis='y', scilimits=(0,0))
plt.subplots_adjust(top=0.95, bottom=0.10, left=0.25, right=0.80,
                    hspace=0.20, wspace=0.20)
```

```
# In[ ]:
```

Apêndice B

**QUANTIDADES CALCULADAS A PARTIR DA
DECOMPOSIÇÃO DELAUNAY DE COMA**

Tabela B.1: ObjID; coordenadas X, Y, Z de 1064 galáxias do Aglomerado Coma (Tempel et al., 2017); média, mediana e valor máximo das distâncias dos respectivos vizinhos naturais de cada galáxia, calculados pela Decomposição Delaunay de Coma.

| ObjID | X | Y | Z | Média | Mediana | Valor Máximo |
|----------------------|--------------|-------------|-------------|------------|------------|--------------|
| 12376673221860393028 | -7.49663100 | 67.87072000 | -6.75134300 | 2.01436782 | 2.03884932 | 2.99924229 |
| 12376672534820292838 | -8.29858600 | 67.59039200 | -3.50789500 | 1.95457593 | 1.97559961 | 3.30914781 |
| 12376672534818981718 | -8.09229800 | 67.92486100 | -3.65153200 | 2.11722204 | 2.24940254 | 3.36040945 |
| 12376679111350683508 | -13.22250300 | 65.82199200 | -9.13869400 | 4.25803469 | 3.49680968 | 8.75291261 |
| 12376674467347170568 | -13.09893500 | 66.15821000 | -9.22085900 | 2.82670867 | 2.60433814 | 5.21201076 |
| 12376673237964555368 | -7.84837500 | 75.17953700 | -5.97742700 | 2.50343152 | 2.39639012 | 4.54281011 |
| 12376673237965210148 | -7.95891800 | 75.49289500 | -5.99484200 | 2.43487521 | 2.30908752 | 4.22450955 |
| 12376652262364284878 | -15.33004700 | 80.93568000 | -0.70411900 | 3.89970814 | 4.25795347 | 6.07224312 |
| 12376652262364282928 | -15.25327600 | 80.61415400 | -0.60835500 | 3.01018971 | 3.46109329 | 5.29366560 |
| 12376674429741958848 | -10.26751200 | 82.04900400 | -7.44489900 | 1.63107129 | 1.28356972 | 3.11566825 |
| 12376674429741958528 | -10.27765200 | 82.38480100 | -7.43349900 | 2.25350843 | 2.55692540 | 3.77276148 |
| 12376652262357075008 | -11.65076700 | 72.73920500 | -0.72823300 | 2.53315018 | 2.47837823 | 5.00734028 |
| 12376652262357729478 | -11.82119600 | 72.59664700 | -0.73634100 | 1.64394793 | 2.03536545 | 2.59704749 |
| 12376653298564465858 | -11.92087100 | 72.46784600 | -0.52080500 | 2.24988687 | 1.87558747 | 5.29441770 |
| 12376654291643925888 | -13.18371700 | 70.17820900 | -2.56518900 | 1.62698262 | 1.65946194 | 2.44488088 |
| 12376654291643270488 | -12.96152000 | 69.92525000 | -2.67019700 | 2.01148185 | 1.77585734 | 3.40915352 |
| 12376654275543041238 | -12.92498000 | 61.52050400 | -3.79639700 | 1.97066550 | 2.14289253 | 2.99395869 |
| 12376654409804022888 | -13.04124700 | 61.26996600 | -3.56655500 | 2.96146422 | 3.13022401 | 5.57720373 |
| 12376653293178717148 | -6.92010400 | 72.58618300 | -0.88312500 | 4.60134526 | 3.20051215 | 11.04308333 |
| 12376653293178061658 | -6.68959100 | 72.65213400 | -0.90475800 | 5.91171673 | 4.94285072 | 11.74546923 |
| 12376653293195101388 | -12.79871100 | 78.86765600 | -0.99425500 | 2.39185282 | 2.25138585 | 4.52012827 |
| 12376653293195755958 | -12.80550100 | 78.53426900 | -0.98828800 | 2.50684114 | 2.44585256 | 5.13642838 |
| 12376672534817669328 | -8.60130800 | 76.53919800 | -3.97969300 | 2.27012556 | 2.28762358 | 3.56595533 |
| 12376672534816360258 | -8.34948700 | 76.58893400 | -4.08089200 | 2.43696632 | 2.39015250 | 3.55594843 |
| 12376673232610263548 | -10.20470000 | 63.18289100 | -5.38696100 | 1.80713291 | 2.26764423 | 3.19923775 |
| 12376674435119842678 | -10.33431600 | 63.09536700 | -5.24527100 | 1.83553447 | 2.03015306 | 3.15445931 |
| 12376674429750480238 | -10.17816300 | 63.33752700 | -5.54590700 | 1.95728069 | 2.25103728 | 3.35949498 |
| 12376674435119848448 | -10.34226000 | 63.10342000 | -5.18099700 | 1.85773533 | 1.93668391 | 3.42488623 |
| 12376673237966522168 | -8.81978300 | 78.37068400 | -6.13239100 | 2.29196532 | 2.33247563 | 3.62638541 |
| 12376674435108046948 | -9.02786300 | 78.00191300 | -6.31827700 | 1.72460694 | 1.74598188 | 2.74634756 |
| 12376654275538453498 | -14.78325300 | 77.59271700 | -4.67820800 | 1.61707300 | 1.72346513 | 3.10250908 |
| 12376654275538454938 | -14.75862200 | 77.26332500 | -4.68661500 | 1.95213330 | 1.69797339 | 5.22322166 |
| 12376674419016990788 | -13.22826500 | 75.22799800 | -7.84924700 | 1.90013940 | 1.97564662 | 3.18610397 |
| 12376674419015681758 | -12.97298000 | 75.38770100 | -7.96595900 | 2.35026775 | 2.35740576 | 3.96885063 |
| 12376654409777153908 | -7.40673900 | 71.20084300 | -3.90496900 | 1.71747146 | 1.67377912 | 3.85019838 |
| 12376672534815704168 | -7.49911700 | 71.51256000 | -3.89470300 | 1.42457669 | 1.70089826 | 3.30056546 |
| 12376679122093344828 | -15.01304100 | 67.43458900 | -8.18026800 | 5.09142539 | 4.31435720 | 13.26304063 |
| 12376672529448305468 | -7.49458200 | 68.25411800 | -4.13139600 | 2.21075420 | 2.23661417 | 3.48149553 |

12376672529448961888, -7.74772700, 67.91069900, -4.09532600, 1.98422457, 2.03363775, 3.29699496
12376672545564264188, -11.25708500, 75.03968100, -2.93983000, 2.10290985, 1.79685530, 3.60884666
12376654291635406228, -11.38720000, 74.69476100, -2.88914800, 2.42044847, 2.26953652, 3.74070986
12376654431276237488, -13.32806700, 65.78403300, -1.66967000, 1.60047230, 1.49092859, 2.74323960
12376654297016566608, -13.43297600, 66.05931200, -2.12391100, 1.18549370, 1.03745670, 2.56860534
12376654297016567028, -13.46972300, 65.91583400, -1.91141600, 1.24527254, 1.17891718, 2.66220939
12376654425907528678, -13.31408900, 65.80712900, -2.14594700, 1.07743651, 0.94689040, 2.07652928
12376654286271938878, -10.74785100, 61.77665200, -2.69958300, 2.20367602, 2.16074140, 3.56982578
12376654291641304358, -10.93644600, 62.06566300, -2.47777700, 2.32177219, 2.17943855, 4.03751830
12376673227225171058, -6.84844200, 70.79661000, -6.63103900, 3.43451644, 2.77391321, 11.91922097
12376673227227137028, -7.31495300, 70.86817000, -6.49061000, 1.33214168, 1.12933702, 2.83374007
12376673227226480698, -7.06832000, 70.61329400, -6.54314800, 1.67677662, 1.57446036, 3.55054382
12376654415166177698, -13.31926300, 71.56077600, -3.40067400, 1.07980099, 1.05716245, 1.99132428
12376654280905852248, -13.29613900, 71.70153700, -3.70795600, 0.93654035, 0.90745319, 2.52658396
12376654415165523748, -13.17071500, 71.55105900, -3.51189700, 0.96615351, 0.94831700, 1.66767569
12376654415147172598, -7.64776300, 71.30993200, -3.57703600, 1.47232056, 1.75500509, 3.14017030
12376672534817014958, -7.83512800, 71.32909100, -3.82332800, 1.28972219, 1.69925663, 2.30835430
12376654415147827758, -7.83495600, 71.19032900, -3.58256400, 1.98120709, 2.15415835, 3.80238096
12376672534817014908, -7.83182000, 71.44331400, -3.89210100, 1.37525886, 1.73157390, 2.31447877
12376673227228447558, -6.98397800, 64.06552700, -5.96531300, 1.17675045, 1.39507337, 2.06190556
12376674424369973848, -7.16731300, 63.72159300, -6.07738100, 1.16352248, 1.20633628, 2.26165561
12376654425891799628, -10.53761000, 76.66202600, -2.65868700, 1.77558026, 1.75244403, 2.94439504
12376672550929695088, -10.62015900, 76.98945200, -2.34921000, 2.15553316, 2.28651466, 4.20650049
12376654431253300548, -8.81413900, 82.39793300, -2.29500600, 1.21094601, 0.57508770, 3.23213065
12376672550921831118, -8.54886400, 82.27839900, -2.43830900, 3.37417515, 2.66626493, 9.92338917
12376672550921831258, -8.59386000, 82.45098000, -2.45605900, 2.27450369, 0.76296188, 5.96903255
12376674488817419638, -13.12125200, 73.38157200, -8.00409000, 1.68933944, 1.96537419, 2.91555114
12376674488816763718, -12.91839400, 73.37134200, -8.17112700, 1.36244744, 0.82866456, 2.71627860
12376653293206242848, -14.30020100, 68.64189200, -1.02550200, 3.39063730, 2.44488088, 10.58320487
12376652257000162528, -14.30359900, 68.31416500, -1.25478100, 3.06309786, 2.44207746, 10.26593084
12376674483446744238, -12.50576900, 73.24151500, -8.63979700, 2.59939703, 2.68028808, 5.00382610
12376679127449600798, -12.67796700, 73.55223700, -8.54534100, 1.65506218, 1.89619347, 3.47549893
12376674429754409478, -12.68306500, 71.71860700, -6.44132900, 1.85988249, 1.85293880, 3.06063366
12376673232614200838, -12.83946300, 71.82659600, -6.23156000, 1.89605103, 1.95215952, 3.16650726
12376673232614196408, -12.83845200, 71.88913300, -6.20972700, 1.86721539, 1.91538028, 3.15467374
12376673232595845858, -6.33588200, 61.80364600, -5.19812400, 3.77134870, 3.10404276, 8.56407954
12376674435105424088, -6.38278800, 61.84864800, -5.02432300, 3.29383364, 3.30277652, 6.67582406
12376654275533865818, -11.67840600, 67.69044100, -4.03438700, 2.35138164, 2.31666381, 3.27229442
12376654275534521388, -11.79509300, 67.35222600, -3.99934600, 2.27388079, 2.55412260, 3.16318778
12376674478086555018, -14.87883900, 72.42541700, -9.00466100, 1.44703313, 1.53294542, 3.80998901
12376674478087864538, -15.16663300, 72.13778200, -9.15199300, 1.54856797, 1.35806892, 4.12717884
12376674478087210498, -14.99717200, 72.20938300, -8.96993500, 1.10788486, 1.24241891, 1.73180051
12376679127452878008, -12.18618800, 66.18892600, -7.63585700, 2.10341948, 1.86201729, 4.31709403
12376679127451566388, -11.96080900, 66.55935300, -7.56220300, 2.33933595, 2.20234698, 4.60512312
12376673243340474098, -9.22739000, 69.30631100, -5.01644000, 1.63094963, 1.52813085, 3.22498514
12376674440481342768, -9.25795900, 69.61951900, -5.05810400, 0.78679687, 0.75419922, 1.64002810
12376654420540130268, -13.79694400, 66.33625400, -2.78117700, 1.34468235, 0.87907131, 2.95466423
12376654420540785748, -13.89730300, 65.99894800, -2.85294900, 2.12625189, 1.96691867, 4.85853230
12376674429739337448, -7.37382700, 63.71544000, -5.69457700, 0.85594452, 0.82870730, 2.16073515
12376674429739335978, -7.21646100, 63.56359200, -5.71006500, 0.89121929, 0.89900922, 2.03148863
12376673232598468728, -7.21530900, 63.76343900, -5.50698300, 0.83883492, 0.93461489, 1.73785923
12376673232598470068, -7.26505100, 63.75002900, -5.49231700, 0.62087776, 0.61365344, 1.23969324

12376673232603055228, -11.20882800, 84.92327800, -7.21831000, 3.24309676, 2.83169138, 6.13718741
12376674429743926588, -11.31751700, 84.72068700, -7.44709600, 2.59502271, 2.96076489, 3.87714152
12376674429743924348, -11.43185500, 84.94966200, -7.68598100, 4.50644097, 3.99518562, 9.72204782
12376679111338886358, -10.58962800, 68.66700000, -9.46711400, 2.33186889, 2.86015975, 3.90725030
12376674467337341878, -10.76630400, 68.64794800, -9.59461600, 3.90304885, 3.75611793, 8.28436789
12376679111339541178, -10.68164600, 68.54552700, -9.38741900, 2.71289259, 2.94619170, 4.07890217
12376654404407133008, -7.16620200, 72.87349500, -4.56805900, 1.81387850, 2.25578020, 2.78202400
12376674445840876718, -7.04301500, 73.54275400, -4.95509000, 1.58106905, 1.96527736, 2.49882992
12376672529445684478, -7.32985000, 73.08017500, -4.31981400, 1.33462510, 1.59662102, 2.17427248
12376674445840221608, -6.91527500, 73.26503000, -5.03273400, 2.59323569, 2.32990505, 6.71257400
12376674445841531828, -7.14463500, 73.19179200, -4.81167200, 1.34918611, 1.28191262, 2.44644672
12376654409775843358, -7.07088700, 73.18692800, -4.27106100, 1.62464592, 1.63089013, 3.42977946
12376652262351831838, -9.81623700, 70.94745500, -0.66590800, 3.84535953, 3.44242076, 9.52771949
12376653293189203868, -9.72752500, 70.63685100, -0.82522400, 3.56236062, 3.06325681, 7.31473684
12376654275539108678, -13.75053500, 70.94449100, -4.39142300, 0.64193765, 0.44202626, 1.19102354
12376654409798124798, -13.39807000, 70.77184700, -4.09994000, 0.89444856, 0.92033931, 1.71798354
12376654409799436398, -13.63743300, 70.69687100, -4.07969400, 1.25405665, 1.28361271, 2.26827565
12376654275539108948, -13.71711300, 70.79254200, -4.15907200, 0.99066684, 1.09863400, 2.33463984
12376654404430726008, -13.81969300, 70.83885600, -4.49339000, 0.59360487, 0.48063246, 1.21625639
12376654404429415798, -13.37843700, 71.04536800, -4.47820600, 0.85597642, 0.54188419, 1.99375535
12376674445864470278, -13.66112800, 71.17068600, -4.63628500, 1.51012239, 1.35174996, 3.89586475
12376652262346588268, -8.77494500, 74.87263500, -0.57739400, 4.97828506, 4.05459451, 13.29887756
12376652262345933788, -8.59983100, 74.56631700, -0.78093300, 2.58872210, 2.59862592, 3.94322293
12376654280907162168, -12.10597900, 63.33542800, -3.25199100, 1.54966003, 1.78097975, 2.97854954
12376654280905852718, -11.79045100, 63.34874000, -3.24353500, 1.71221913, 1.37962272, 3.83908627
12376654409798781198, -12.08905600, 63.52054300, -3.50553300, 0.63797177, 0.60715708, 1.45142362
12376674440472823228, -6.96459700, 70.29505600, -5.20060100, 2.57337629, 2.56570376, 4.90771964
12376673237963899388, -7.16439300, 70.57705700, -5.43914500, 1.44134631, 1.22891272, 2.72991365
12376673243352270688, -11.47662000, 63.08671700, -4.55657700, 1.41724095, 1.33387881, 2.61599893
12376673243353579568, -11.63309100, 62.86956000, -4.53046400, 1.60996126, 1.42325751, 3.05790497
12376673243354236388, -11.88720900, 62.74877000, -4.47919000, 1.47756605, 1.11909683, 2.98501492
12376653293191823698, -11.46728700, 77.43625600, -1.05860200, 2.43225913, 1.97111227, 4.71222842
12376652262354453688, -11.62582200, 77.74568000, -0.81791300, 3.34675080, 4.05459451, 5.76288018
12376654404428104658, -13.62284000, 74.14536100, -4.79593700, 1.28031597, 0.92488755, 2.98927598
12376673243352925398, -13.60857600, 73.95621300, -5.09598500, 0.68725961, 0.43083955, 1.25816342
12376674445861192818, -13.24004300, 74.12552700, -5.05890400, 1.74891715, 1.65515515, 3.76902508
12376674445861191798, -13.20546600, 74.05380700, -5.06388800, 1.30087800, 1.03111519, 3.04626960
12376654404428760238, -13.86516900, 74.20639900, -4.82040300, 0.89172131, 0.93216291, 1.82419095
12376673243352270798, -13.42096300, 73.65683600, -5.30321500, 1.80030747, 2.07023114, 3.13576329
12376673243352270148, -13.33528600, 73.90320400, -5.11029500, 0.52766559, 0.30159133, 1.62132040
12376654420523091058, -10.02730800, 72.49854800, -3.01296800, 1.83495240, 1.71356127, 3.36085398
12376654420523746548, -10.15322500, 72.80135900, -3.09682700, 1.59737910, 1.79184374, 2.80298639
12376673232615506148, -14.17978500, 77.37889400, -6.55753000, 1.82717970, 1.73489101, 3.89019334
12376674435124430188, -14.02358900, 77.08534000, -6.42259500, 1.30757847, 1.25563131, 2.48258317
12376672550928384978, -8.64041000, 65.10060000, -1.92186500, 3.13391301, 3.29120747, 5.74756606
12376672550928385978, -8.51747800, 64.80415300, -1.88278300, 3.02996867, 3.43719724, 4.93883678
12376674424371938878, -7.07288600, 59.09557200, -5.75318100, 4.33966705, 3.28050221, 10.83389763
12376654280907818388, -14.68999400, 75.94711000, -4.11407100, 1.09639124, 1.07052614, 2.06059305
12376654280907162748, -14.38858400, 75.76325700, -4.02673900, 1.98959325, 1.91106108, 3.99350037
12376654280907817148, -14.65282500, 76.03833900, -4.00847900, 1.26202636, 1.52216956, 2.32283513
12376654415169454958, -15.03606100, 75.48890300, -3.70665400, 2.21445657, 2.21364171, 4.63982547
12376654415168799418, -14.86096200, 75.75666900, -3.83679300, 1.16148658, 1.12100240, 2.13274660

12376674424373904368, -10.40140700, 81.11330600, -7.83258100, 1.01209746, 1.02164375, 1.57994984
12376674424374560168, -10.56665600, 81.42111000, -7.89694900, 1.59482507, 1.10770463, 4.08502712
12376654302386586188, -14.72068700, 70.08492100, -1.66416600, 2.91537849, 1.86470783, 7.60528100
12376654297017877168, -14.63440100, 69.96008200, -2.18014900, 1.99117056, 2.06066883, 3.38791294
12376654431278202918, -14.65743200, 70.27163600, -1.90694500, 2.29476604, 2.49643052, 4.97873639
12376652256983777688, -11.23368000, 79.48633400, -1.21859500, 1.77811293, 1.32887797, 4.37555848
12376652256984432778, -11.40570800, 79.35230600, -1.36351700, 1.10546660, 0.96833894, 2.69481953
12376652256983123188, -10.99524000, 79.55054300, -1.21233300, 1.82241664, 1.44735616, 5.21686502
12376652256983778258, -11.26403900, 79.42714200, -1.21414400, 1.12660567, 0.46777624, 3.42376220
12376653287821806708, -11.33544300, 79.12729100, -1.56600400, 1.38328219, 1.59231294, 2.54816011
12376674440478720548, -8.74523100, 71.00868200, -5.34964300, 0.71781024, 0.72745030, 1.80570952
12376673237971109678, -9.28247700, 70.71650200, -5.51767200, 0.57629333, 0.57867249, 0.80090233
12376674440478720898, -8.79042600, 71.02305600, -5.32869800, 0.83641273, 0.88520731, 1.80897499
12376673237971108618, -9.15692300, 70.95480200, -5.47524600, 0.54112215, 0.46148101, 1.02758498
12376673237970455238, -8.99970800, 71.21948700, -5.55243200, 0.63549315, 0.61029130, 0.95723770
12376674445850706718, -10.35896400, 76.79321300, -5.10476300, 1.88852403, 1.88731016, 3.66493702
12376673243340472368, -10.14146600, 77.21915900, -5.46842200, 1.67333205, 1.36981264, 3.81080448
12376674440481998668, -10.38855300, 77.14534500, -5.63764000, 1.78541984, 1.60918742, 3.90738125
12376674445849397228, -10.07975500, 76.86505800, -5.16174900, 1.34615538, 1.25501496, 2.60218968
12376654404416964008, -10.55160700, 77.20319200, -4.91058400, 2.29272104, 2.52606738, 4.19894715
12376679127452877458, -13.57494500, 73.28399400, -8.45402400, 0.83479535, 0.54455752, 2.10347002
12376679127453533658, -13.67124000, 73.20819200, -8.47656100, 1.48127933, 1.63237296, 2.76417980
12376674483450021308, -13.45638600, 73.40698600, -8.58072200, 0.66140655, 0.51275621, 1.97564662
12376679122083513858, -13.34958800, 73.15636600, -8.81311300, 1.04680555, 0.82431211, 3.00576316
12376674483450676938, -13.69044500, 73.44108500, -8.76027500, 1.62267436, 1.82029130, 3.89825280
12376674424381767778, -11.42587600, 71.53285300, -6.84051900, 1.72778379, 1.22477879, 3.79932220
12376673227241554928, -11.53652500, 71.21032500, -6.62554300, 1.30288048, 0.95009327, 3.80492550
12376654431261163568, -11.08076200, 79.97342400, -2.03157600, 1.93564275, 1.52074980, 4.55461323
12376672556298405328, -10.98520400, 79.65621400, -1.95759800, 1.31425543, 0.79334687, 3.44170776
12376673216508724298, -11.77373400, 65.31229500, -6.97636600, 1.70855784, 1.83202865, 3.00414061
12376674419018302288, -11.80196500, 65.01073300, -6.76237900, 1.73190871, 1.77467310, 2.84695493
12376674424384391148, -11.57540200, 67.31206700, -6.51980700, 1.88404068, 1.78995758, 3.41777709
12376673227244178058, -11.64861900, 67.13467400, -6.27789000, 1.79724632, 1.95565531, 2.42889523
12376654415164211468, -14.01184200, 79.26809700, -3.77014600, 0.58843027, 0.58117600, 1.21092139
12376654409797468858, -14.58912100, 78.59641500, -4.46804900, 0.88431395, 0.91892127, 1.43379935
12376654286273250318, -14.22707200, 79.24238300, -3.61573200, 1.95300429, 2.56566390, 3.54419227
12376654280904541948, -14.22285000, 78.90662400, -4.25066200, 0.60109799, 0.46119065, 1.58106364
12376654280905851958, -14.54652900, 78.96857500, -4.33325800, 1.07722881, 0.63488888, 4.09025063
12376654415164866828, -14.27072400, 79.22207800, -3.95131000, 0.48564606, 0.50779850, 0.64235988
12376654280903885038, -14.00608100, 79.30130300, -4.35034400, 1.46405612, 1.22447976, 3.67709028
12376654415163557198, -13.86958300, 79.56737800, -3.91903200, 1.97661728, 1.78948162, 3.78693426
12376654280904541918, -14.17368300, 78.69236600, -4.20756400, 1.09339904, 0.88120698, 2.37318357
12376672556291851588, -9.20041400, 82.62602400, -2.08126300, 1.98006890, 1.98969178, 4.72955544
12376672556291850328, -9.03653200, 82.78202700, -1.97914300, 1.79743914, 0.73006814, 4.84861837
12376672556291196428, -8.94993300, 82.84102200, -1.90543200, 3.53387404, 2.28779054, 10.48446151
12376673232596500798, -7.27429200, 67.91775900, -5.79040700, 1.84791203, 2.02777384, 2.80623456
12376673232596500768, -7.21750300, 67.60933200, -5.75679800, 1.92922643, 2.16384027, 3.08486364
12376679116719391128, -14.33758300, 71.06513100, -9.23228700, 0.93356596, 0.97224435, 1.35806892
12376679116719391138, -14.28886100, 70.74864700, -9.21184500, 2.47179371, 2.72181710, 4.35086151
12376673221864980578, -8.27202500, 64.05954100, -6.50115700, 1.76636927, 1.78902767, 3.34993229
12376673216495616138, -8.08764800, 63.85835800, -6.84518700, 1.89794487, 2.02239719, 3.99589778
12376674419005195368, -8.23910500, 63.83169800, -6.59729600, 1.63075382, 1.90888969, 2.39779587

12376673237989458318, -12.83579800, 62.57307300, -4.98506000, 1.82413446, 1.59021214, 3.43569196
12376673237989458328, -12.87300600, 62.75916000, -5.00878800, 1.55717449, 1.33792418, 3.34967739
12376674440498382318, -12.75430600, 62.65236500, -4.70398200, 0.99447398, 1.10278862, 1.46080439
12376654275536486658, -11.56314100, 63.59954800, -3.82479000, 1.51938449, 0.95774510, 3.79692470
12376654404429415278, -11.98920200, 63.65415800, -4.04646100, 0.43205592, 0.32796995, 1.45458850
12376654404430071508, -12.15576800, 63.32852700, -4.01281400, 0.45075466, 0.18429998, 1.29512750
12376654275539107988, -12.18237000, 63.43325900, -3.89998900, 0.61112141, 0.41155285, 1.43710337
12376654404430071798, -12.19294300, 63.45952800, -4.05420800, 0.69017710, 0.37141522, 1.43583805
12376654404430070898, -12.04012400, 63.23438900, -4.05205100, 0.40381758, 0.37576164, 0.85387990
12376654404427450208, -11.54041100, 63.73843900, -4.07805800, 1.58265053, 1.54725093, 3.49372210
12376654404428759588, -11.81684800, 63.84701300, -4.07340400, 1.15431048, 0.57112524, 3.41587294
12376654404430071518, -12.12734300, 63.15725000, -3.99049900, 0.81798769, 0.72034440, 2.21317096
12376654404428759868, -11.83635100, 63.63758100, -3.98886600, 0.37165605, 0.41155285, 0.55782479
12376674445863159288, -11.82368200, 63.19942900, -4.29686700, 0.62897543, 0.51300115, 1.34229250
12376674445863815098, -12.02198800, 63.71713500, -4.26002900, 0.96908278, 0.88475637, 1.95371681
12376674445862503218, -11.68840400, 63.64598600, -4.14665700, 0.31328605, 0.31715210, 0.49447647
12376674445861849328, -11.53907400, 63.66363700, -4.18940200, 0.69274732, 0.49097468, 1.83599756
12376654404430069818, -12.05575700, 63.31562000, -4.16707900, 0.55392494, 0.41351462, 1.33661008
12376673221865636618, -9.14659000, 68.18329300, -6.92943800, 1.27989519, 0.98856594, 2.71693164
12376674419009126618, -9.68735800, 67.48465400, -6.91759400, 0.91451936, 0.44072911, 2.75709143
12376674424376525788, -9.36139300, 67.77726500, -6.53117700, 0.44079237, 0.44738657, 0.71910877
12376674419007816788, -9.34410800, 67.85406300, -7.02409800, 1.04848940, 0.58613738, 2.86015975
12376674424377836148, -9.68818700, 67.67914500, -6.52210100, 1.17719522, 0.63323586, 3.60012830
12376674419007817388, -9.42475300, 67.57568100, -7.07754900, 1.27674319, 0.60702498, 2.87366174
12376673221868914588, -9.93307100, 67.50785400, -6.77291000, 0.86270993, 0.62769905, 2.14347482
12376674424375870488, -9.18531900, 67.93158300, -6.46838300, 1.15659083, 0.70818352, 2.77461825
12376674429744579798, -9.28813400, 68.24389100, -6.19961300, 1.80832228, 1.90291283, 3.27229442
12376674424377181058, -9.49767700, 67.65451300, -6.60772600, 0.33646027, 0.33636559, 0.48658944
12376673221866947268, -9.23859000, 67.18230600, -6.65437200, 1.83144955, 1.78621902, 3.58097065
12376674424376526118, -9.44636500, 67.94797000, -6.45154700, 0.80564339, 0.58914316, 2.08775011
12376674419009783168, -9.91211200, 67.55970200, -6.97815100, 1.46487964, 0.98856594, 2.93343310
12376673221867602508, -9.47017000, 67.42671200, -6.67877200, 0.55429389, 0.39560602, 1.84766331
12376674419005851018, -8.95131200, 68.05072700, -7.05478900, 1.63682749, 1.55223321, 2.98046702
12376654409789604668, -9.52477000, 62.37347600, -3.52916200, 2.37596417, 2.39699912, 3.48491533
12376654409789604008, -9.47814600, 62.07146900, -3.47785600, 2.53595316, 2.52143855, 3.52584058
12376654431261164378, -10.35184400, 74.23853500, -1.88469800, 1.75589435, 2.09775549, 3.55014528
12376654431261165438, -10.33940800, 74.22440400, -1.93721800, 1.62350456, 2.05747987, 2.69076134
12376654431261165668, -10.39832100, 74.26521900, -1.94883000, 1.59334281, 1.69966740, 2.70314849
12376654431250678498, -6.67056500, 67.70289600, -1.90572300, 3.26305397, 3.43719724, 6.76410139
12376654431250678528, -6.66877000, 67.73926500, -1.89614900, 3.51947249, 4.23349873, 6.80039898
12376672550920521108, -6.69771300, 67.73393700, -2.00989100, 2.19474565, 2.85202575, 4.12224319
12376672550920521398, -6.76671400, 67.83341100, -2.15145900, 2.62852103, 2.71558483, 4.97798179
12376654431251989228, -6.89977700, 67.89369900, -1.89285900, 2.69855978, 2.94842914, 4.86448614
12376653298571673768, -13.70748500, 70.68234300, -0.41362600, 2.79622307, 2.24666519, 6.54223603
12376652262364939238, -13.63482700, 71.02018600, -0.56396700, 2.05600534, 2.02397123, 3.83663188
12376674445848740508, -9.18271000, 72.21889900, -4.89864500, 1.66025554, 1.84708161, 2.30411860
12376673243339162868, -9.21781700, 71.88184500, -5.03614000, 1.11528969, 1.08931419, 1.84989793
12376673227230412878, -8.39699700, 72.03651500, -6.82570000, 0.68339052, 0.44483747, 1.53014910
12376673227228447158, -7.85586100, 72.37605200, -6.77580700, 2.01612257, 2.02498496, 6.84587662
12376674424369971318, -8.08737300, 72.56101600, -6.94072100, 2.20762389, 2.36374200, 6.63131538
12376674424371937338, -8.57663000, 72.21486200, -6.98202500, 0.45453470, 0.37331501, 1.13471159
12376673227229757778, -8.26333500, 72.52045400, -6.88119300, 1.20529408, 0.63252328, 2.49882992

12376673227229102118, -7.96158800, 72.12365000, -6.79911300, 0.85371713, 0.58117155, 1.56758622
12376674424371938688, -8.61193400, 72.22078600, -7.01422700, 1.68725859, 1.88807604, 3.29916607
12376674424370628588, -8.35111700, 72.34442400, -7.05010700, 1.53097545, 0.55355193, 3.72893221
12376673227231068688, -8.51922600, 71.86853300, -6.58646700, 0.95537337, 0.87093648, 1.84708161
12376673227228449128, -7.89628500, 72.16671500, -6.78940200, 1.45565891, 1.52976690, 3.61897197
12376654291650478138, -14.22917300, 66.65077700, -2.42814100, 1.15122711, 1.03745670, 3.75500966
12376654291649823488, -14.14083100, 66.73155700, -2.49165200, 2.40525076, 2.86568987, 4.49159619
12376654291650479368, -14.24991100, 66.60942400, -2.50141600, 3.74602689, 3.50898351, 11.70111058
12376654291650478648, -14.24032700, 66.62974300, -2.44653200, 2.57142109, 1.17891718, 8.72494108
12376654280904540238, -12.82293300, 71.90376900, -3.68591900, 0.58899292, 0.52004726, 0.91837636
12376654415163556268, -12.57209300, 72.04883700, -3.42002600, 0.78296778, 0.78597565, 1.40853453
12376654415164213128, -12.91206800, 72.37783200, -3.57139400, 1.12321116, 0.93463880, 2.45194489
12376654291640649248, -12.63164100, 72.10630700, -2.75691600, 1.20745586, 1.42823523, 2.23158637
12376654420532921318, -12.76326600, 71.89355400, -2.92760700, 0.86048914, 0.66869408, 1.80292383
12376654286273249928, -12.94400700, 72.40616300, -3.31711500, 0.80471428, 0.68836295, 1.53851878
12376654420531610888, -12.50868000, 72.15067200, -3.05783000, 0.59496676, 0.48731217, 1.26086732
12376654286271939948, -12.66190200, 72.24762000, -3.35478200, 0.55779920, 0.42011631, 1.36648788
12376654415164214038, -12.78307800, 71.83865400, -3.58482900, 0.62818290, 0.59296099, 1.28457983
12376654286272596388, -12.87442200, 72.48934900, -3.32862400, 1.03345088, 0.94880166, 2.49222577
12376654291639994028, -12.38539600, 71.87248200, -2.67719300, 1.07928683, 0.78597565, 2.14700794
12376654302385931368, -12.16840400, 58.79614100, -1.33320600, 2.27114685, 2.75525997, 3.80844295
12376654302385275928, -11.90151600, 58.71069700, -1.28091000, 2.73503876, 3.02710484, 4.90753261
12376653287836877848, -12.04049800, 58.66202800, -1.18588400, 1.85465253, 0.40580739, 5.03604512
12376652256999507738, -12.10017400, 58.28988700, -1.03545300, 6.36714801, 5.13931755, 20.05527749
12376673221870223538, -9.12279900, 60.37880100, -6.11513500, 1.30637023, 1.70089790, 2.03148427
12376674419010438228, -9.09714200, 60.30092600, -6.18388600, 1.20615523, 1.43473545, 1.98000102
12376674419010437738, -9.02154800, 60.44136500, -6.33694400, 2.11608651, 1.90437568, 6.01716423
12376673237982249838, -12.22071600, 69.06681700, -5.39611800, 0.26630339, 0.26728280, 0.45973820
12376674440493138248, -12.44931900, 68.94072900, -5.20177900, 1.43008898, 1.25663247, 3.88412695
12376673237982251248, -12.23585700, 69.21192600, -5.47906900, 1.16147818, 0.79208671, 4.06673403
12376673237982251128, -12.14790000, 68.86558800, -5.42416800, 1.10486299, 1.24487643, 2.35912184
12376673237981595578, -11.99495000, 69.19404500, -5.50710700, 1.07025360, 1.01197928, 2.54093798
12376674435123774718, -12.34148000, 68.71425700, -5.66533300, 2.12023227, 2.28009991, 4.56382247
12376673237981595368, -11.96637400, 69.13763500, -5.43777200, 0.91856063, 0.87597598, 2.42103555
12376674440491833478, -12.24940100, 69.03787800, -5.25584800, 0.74623105, 0.72071322, 1.90619745
12376654291645890888, -14.20519200, 72.58410600, -2.84414200, 1.55803918, 1.53221024, 2.75055741
12376654420537508058, -14.24319500, 72.72776400, -2.92480200, 1.91124896, 1.96333633, 3.23258733
12376654291645892838, -14.28707800, 72.72650800, -2.63845500, 2.17478979, 2.27443318, 3.41749413
12376654415162901018, -10.33975200, 59.74153300, -3.02984700, 0.81388063, 0.14555822, 2.44082584
12376654415162902348, -10.24554600, 59.70060400, -2.92671000, 1.48907581, 1.48991284, 3.73483980
12376654415162902368, -10.24893600, 59.71212100, -3.01043200, 1.22285477, 0.81194872, 2.90454203
12376654415162902578, -10.31758100, 59.66087500, -2.94941300, 1.68118370, 2.17692105, 2.95304737
12376654280903232078, -10.34014100, 59.76091700, -3.06290800, 1.37499215, 1.59847145, 2.88326557
12376674429738025178, -8.81093700, 80.73101600, -7.21056000, 1.06553598, 0.68660510, 2.15353635
12376673232599777538, -9.49722400, 80.14654800, -6.96998400, 1.96611202, 2.07706073, 4.51442527
12376673232600433938, -9.84875600, 81.19094500, -6.98047900, 1.23284447, 1.15824878, 2.49014972
12376674429739337118, -9.29123600, 80.69185800, -7.11437000, 0.53789291, 0.47015198, 1.30330242
12376674429738027758, -8.82037100, 80.50814900, -7.10862100, 0.71547422, 0.59693293, 1.96770355
12376674429739991868, -9.44137500, 80.46159100, -7.24777100, 0.82356144, 0.63810370, 2.28285154
12376673232599778778, -9.62703200, 80.70933100, -7.02941400, 0.58426678, 0.49313390, 1.18656212
12376674429737370828, -8.58816000, 80.39568700, -7.15605500, 1.00840581, 0.88641480, 2.13502763
12376674429738027578, -8.78707600, 80.69150200, -7.14456400, 0.59420347, 0.32020683, 2.09189331

12376673232599778788, -9.63330900, 80.71011200, -7.01978300, 0.87882541, 0.58189643, 2.58602025
12376673232597812568, -9.01994000, 80.75279200, -6.99445000, 0.98688745, 0.62709135, 2.83160091
12376673232599123538, -9.46431700, 80.29977500, -6.92109100, 0.98132221, 0.63880894, 2.62321800
12376673243358823198, -13.36499000, 63.83719800, -4.51303400, 0.94843412, 0.71893002, 2.23149208
12376673243358823188, -13.31167500, 63.58103700, -4.53957100, 1.09303457, 1.22635769, 2.22432841
12376673243358824228, -13.22050600, 63.91568000, -4.44640900, 0.99451596, 1.19070651, 1.89273207
12376673237990770898, -13.48166700, 63.70838600, -4.87180800, 1.84281110, 1.44689736, 5.21302241
12376673243359481118, -13.44787600, 63.60810200, -4.58522900, 1.77898266, 1.91116777, 3.74078474
12376674440487239838, -10.96536600, 70.23049100, -5.10271300, 0.23071020, 0.24475251, 0.42877708
12376674440486585328, -10.91154000, 70.83815000, -5.18134700, 0.20794196, 0.21951113, 0.30984014
12376654404418928918, -10.25071000, 70.64255200, -4.56627700, 0.39035587, 0.34903160, 0.67155203
12376674435115909528, -10.37822000, 71.01395200, -5.82223200, 0.19626137, 0.21139123, 0.31311860
12376674445859226098, -12.01186500, 70.51606900, -4.77403000, 0.46517042, 0.44994519, 0.77994556
12376673237979627578, -11.66587300, 71.26590900, -5.58142500, 0.56132588, 0.50379404, 1.40678710
12376673232603709808, -9.75745800, 71.50692400, -6.02159000, 0.50170176, 0.52968154, 0.97227810
12376674440487895888, -11.39865300, 71.41900000, -5.40569600, 0.30221354, 0.26673891, 0.43372394
12376673227236966628, -10.06169700, 70.26132100, -6.41527300, 0.41737360, 0.42620072, 0.74055996
12376674429746545248, -10.24977000, 71.20580300, -6.25459700, 0.35155290, 0.35198312, 0.49541368
12376673237967831138, -8.26243900, 70.96460300, -5.55311000, 0.90483968, 0.63601003, 2.41162387
12376673243347026468, -11.04715300, 69.70024300, -4.82498900, 0.30830782, 0.30320233, 0.41797665
12376673243345060088, -10.84452500, 71.49679100, -5.03363100, 0.22916944, 0.22597687, 0.36055059
12376654404418928908, -10.19874300, 70.22754300, -4.53217000, 0.46644152, 0.46186350, 0.58115079
12376654280899952738, -11.34422100, 71.01606500, -3.67812200, 0.43350404, 0.31050348, 1.11769377
12376674435113943288, -9.80677900, 70.79416200, -5.81415300, 0.22851701, 0.21147656, 0.40506406
12376674445855294708, -10.92401300, 70.47712200, -4.78834400, 0.35044422, 0.38732415, 0.46707482
12376673227239588008, -10.86814500, 70.71744900, -6.61846100, 0.36477693, 0.31860816, 0.74369141
12376673243347682388, -11.62401400, 71.19219400, -5.09305300, 0.32534177, 0.30248460, 0.51079861
12376673237976350928, -10.73577000, 71.26287000, -5.69268900, 0.33637181, 0.32472790, 0.58407817
12376673237975040558, -10.25063000, 69.95834700, -5.59336500, 0.33135629, 0.35993437, 0.45148808
12376674445853328508, -10.47671500, 70.94602300, -4.86731900, 0.27801307, 0.27676859, 0.42408018
12376674429743268148, -9.14739900, 70.15582100, -6.33428200, 0.58622536, 0.48482011, 1.92182684
12376674445855950018, -10.96630400, 69.85184200, -4.61015100, 0.41944746, 0.39013547, 0.60894655
12376654415160279648, -11.45950300, 70.95127000, -3.50835800, 0.57252784, 0.45369448, 1.16081404
12376674445855950938, -11.27622300, 71.20861700, -4.66642800, 0.37634642, 0.28203821, 0.69502805
12376672534824879308, -10.18609700, 71.28822500, -3.90101800, 0.41208446, 0.36849063, 0.95750125
12376654280899955158, -11.36632300, 70.80666200, -3.77071800, 0.46279831, 0.39855924, 0.84996946
12376654280898643348, -11.10214100, 70.97508200, -3.83701200, 0.40712339, 0.30634512, 0.81053234
12376673237976351398, -10.86959200, 71.82834700, -5.63374200, 0.74963786, 0.47364842, 3.13000943
12376673232605020198, -9.89973200, 70.84839600, -6.15396100, 0.39409296, 0.38838972, 0.69864610
12376673243348992038, -11.63131400, 69.94763300, -4.93635300, 0.44351824, 0.45839265, 0.65766603
12376674440487897648, -11.40758800, 70.85929100, -5.33204000, 0.26385873, 0.26948807, 0.34079320
12376673237977007268, -11.14292700, 71.79660500, -5.56347000, 0.58413424, 0.39066966, 2.35513792
12376673243344404848, -10.60559700, 70.87042400, -5.13853900, 0.23567315, 0.24495576, 0.32771851
12376673232599777908, -8.38110200, 70.49323500, -5.99002400, 0.55567927, 0.42506034, 1.33604830
12376673237973074938, -9.80730500, 71.14478300, -5.49631600, 0.49004031, 0.36027875, 1.05000878
12376674440483962918, -10.01311100, 70.21367600, -5.12197100, 0.34203865, 0.35160944, 0.56056222
123766732272369666638, -10.14032800, 70.74568300, -6.49722500, 0.49653911, 0.47193498, 0.87027770
12376673243347026818, -11.20338800, 70.63885400, -4.97451900, 0.23626926, 0.22794538, 0.35402961
12376673232603054658, -9.43276800, 70.37417300, -6.07449300, 0.51558795, 0.52398096, 0.69123700
12376673243347026228, -11.11239700, 70.14603600, -5.09040200, 0.31346143, 0.30394571, 0.57651513
12376673221868913798, -10.35532900, 71.12488500, -7.11656300, 1.06439511, 0.65310791, 3.38005275
12376674445850052568, -9.47741300, 70.93652600, -4.77266600, 0.94219048, 0.80028517, 2.04411930

12376673237973075768, -9.79340000, 70.84351000, -5.64987100, 0.22992594, 0.23471246, 0.34577660
12376674440485929488, -10.78744400, 71.14298100, -5.37704300, 0.31141568, 0.33017677, 0.41803859
12376674435115909508, -10.42805200, 70.98373300, -5.82144100, 0.13665147, 0.10390867, 0.25685636
12376674440486585228, -10.83916900, 70.53880700, -5.16514600, 0.12217273, 0.11740093, 0.17891675
12376674435119186988, -11.23110100, 70.25649900, -5.79951300, 0.56108406, 0.53403802, 1.34081135
12376673243348994208, -11.75735100, 69.81429800, -4.93248300, 0.28911836, 0.27979895, 0.55452351
12376673232600433418, -8.73730900, 71.19855200, -6.05021300, 0.62215663, 0.58547197, 1.31381936
12376674440485929108, -10.55892100, 69.83695200, -5.30930500, 0.26641062, 0.27803665, 0.34146027
12376673237976352578, -10.78685600, 70.72572600, -5.40262000, 0.32944337, 0.30339633, 0.57871599
12376673243343749248, -10.28978700, 70.75351000, -4.93512400, 0.24471923, 0.23315329, 0.43589692
12376654409790260198, -11.01614900, 71.03247600, -4.08999100, 0.45664195, 0.44100748, 0.79058024
12376674445854638528, -10.83576400, 71.58197600, -4.91177200, 0.22659866, 0.23151770, 0.36557939
12376654409788293178, -10.49762800, 71.38758100, -4.00566500, 0.42419400, 0.34372885, 0.73778477
12376674440487241358, -11.24898500, 71.06017900, -5.21743700, 0.29353789, 0.28452819, 0.43199165
12376673243345717288, -11.12022100, 71.63163900, -5.13597300, 0.27792564, 0.30779440, 0.40868502
12376673243346370858, -10.93818900, 70.17325100, -5.08674300, 0.18647779, 0.19145923, 0.29744725
12376654404423516298, -11.61368300, 71.10504900, -4.60253700, 0.50856116, 0.50450439, 0.81308873
12376674435115254328, -10.32588000, 71.11072500, -5.87498100, 0.22230117, 0.21573637, 0.30269338
12376673243345061498, -10.88018800, 71.38642400, -5.08198800, 0.24191405, 0.24700020, 0.34736237
12376674440485273998, -10.43419300, 69.94632300, -5.13266700, 0.27160944, 0.23695202, 0.53331005
12376674429748510898, -10.82048100, 71.41070000, -6.32704300, 0.32307579, 0.35408922, 0.49303402
12376674440486585238, -10.72751800, 69.74831500, -5.07268200, 0.29222378, 0.28430418, 0.50996048
12376674429743923698, -9.52691500, 71.26603700, -6.45151100, 0.61747520, 0.60260872, 0.98193210
12376654409790259538, -10.99239200, 70.56515800, -4.00915400, 0.55849008, 0.48596990, 1.01390421
12376673243347681818, -11.31282700, 69.64918600, -4.87688100, 0.28377433, 0.27546737, 0.48196736
12376654275532554988, -11.76947200, 70.48517300, -4.29250300, 0.59958212, 0.63808972, 0.91063409
12376673243344405238, -10.58187200, 70.59735200, -4.99293500, 0.29660854, 0.28863903, 0.49876209
12376674440485929908, -10.83462600, 71.26851600, -5.17682900, 0.23813318, 0.24703480, 0.37630870
12376673243349648128, -11.95240700, 69.99460700, -4.98311300, 0.29024483, 0.30392219, 0.49668556
12376674440486586548, -10.89705500, 70.44725600, -5.20783600, 0.15252371, 0.13717472, 0.25040827
12376672534824878608, -10.14263400, 71.31337800, -3.88389800, 1.00870905, 0.76771076, 2.33051947
12376654275535831118, -12.71320200, 71.23163100, -4.24957500, 0.69096015, 0.72985915, 1.17153231
12376674445859227408, -11.95229700, 69.67030400, -4.63159000, 0.63709119, 0.54105152, 2.08603097
12376674440489861348, -11.95764500, 71.53537100, -5.27147700, 0.96635269, 0.51079861, 2.57738639
12376673243340473108, -9.32322700, 70.35622500, -5.09404700, 0.50290638, 0.48054669, 0.88521273
12376672534826189028, -10.52906800, 71.58702400, -3.78692000, 0.88174061, 0.76613561, 1.73019256
12376673237973730968, -9.95901900, 70.21495100, -5.36323700, 0.32776080, 0.34612657, 0.49026230
12376673227236967898, -10.14971200, 70.05428100, -6.49850100, 0.49106078, 0.45125698, 0.95383337
12376673227238277708, -10.61486200, 70.92345900, -6.60386100, 0.27291129, 0.25185243, 0.38146006
12376673237979628508, -11.60004800, 70.47965800, -5.48443400, 0.67834984, 0.45738820, 1.90356731
12376674440484618618, -10.27193200, 69.83188800, -5.24096000, 0.28898738, 0.27385309, 0.52526732
12376673243345715358, -10.85205500, 70.64667000, -5.05979400, 0.21939869, 0.21256095, 0.32986411
12376674440483308648, -10.00567400, 70.52290300, -5.24931900, 0.31140081, 0.31313108, 0.43329445
12376673221869569418, -10.48908500, 70.80235700, -7.04021100, 0.33410961, 0.34640109, 0.53789718
12376654404423517578, -11.73956100, 70.94878000, -4.59910300, 0.43995660, 0.45337868, 0.69500982
12376673227235001538, -9.50256200, 69.90256400, -6.48384600, 0.86724300, 0.69884256, 1.81139755
12376673243346371898, -11.24205900, 71.63494500, -5.11049900, 0.30662426, 0.30153408, 0.58263468
12376673237973729888, -10.00690200, 70.71564300, -5.50338000, 0.21639698, 0.22371819, 0.39540228
12376654409786983208, -10.17410500, 71.79109200, -4.08196200, 0.77957092, 0.69500955, 1.35394922
12376674440485930848, -10.72205600, 70.36218600, -5.28672400, 0.18957684, 0.19777237, 0.33575689
12376672529457480538, -10.49648000, 71.32383200, -4.30503300, 0.49374790, 0.49938986, 0.72046095
12376674440483307898, -10.03178800, 71.28928300, -5.43391800, 0.36487330, 0.30531833, 0.67578685

12376654280902574968, -12.02100500, 70.45813300, -3.70638800, 0.92748044, 0.96696600, 1.65305529
12376673237977006118, -10.78649600, 70.55500200, -5.39951200, 0.17399202, 0.17075267, 0.24287945
12376674435116565678, -10.58392400, 71.22106500, -5.83619600, 0.18721949, 0.16084599, 0.29553271
12376674440486586098, -10.84648700, 70.52247300, -5.29677900, 0.15063806, 0.14299963, 0.20316520
12376673243347028698, -11.19321900, 70.73140400, -5.10189600, 0.23727804, 0.22134261, 0.35292006
12376673227238277268, -10.40802600, 70.13765600, -6.54629800, 0.94822719, 0.75840604, 2.65923834
12376674429746546648, -10.20732200, 70.64772200, -6.30975200, 0.39935225, 0.38447522, 0.58796891
12376674435115253798, -10.11580400, 70.84988000, -5.77467700, 0.32063121, 0.31558199, 0.47135507
12376674440488552528, -11.58002900, 71.04735800, -5.22693000, 0.32171793, 0.35552873, 0.42520635
12376674445855950598, -11.27941500, 71.43840700, -4.72105300, 0.45334806, 0.35692781, 1.07792766
12376673227238277588, -10.71721100, 71.62556500, -6.59718500, 0.50191292, 0.48466416, 0.80708894
12376673232598467108, -8.04169700, 70.67543600, -6.11010300, 0.82944665, 0.84981829, 1.46014631
12376674440486586358, -11.03222600, 71.51445300, -5.29570700, 0.19819571, 0.21768393, 0.32024877
12376673243344406368, -10.64238700, 71.48508000, -5.01690100, 0.35772894, 0.34363625, 0.61821078
12376673243346371318, -11.05480000, 70.88498200, -5.02286100, 0.25027279, 0.23081084, 0.40413772
12376673243343749818, -10.41043200, 70.98133700, -4.95385300, 0.31236838, 0.27054428, 0.53884363
12376673227232379698, -8.86258400, 70.38428200, -6.46067700, 0.35377631, 0.38638026, 0.63055842
12376673237976352568, -10.70231300, 70.18051100, -5.38154700, 0.26540967, 0.25482819, 0.41445526
12376674445857916658, -11.58515500, 70.46258300, -4.71916900, 0.46290107, 0.45631719, 0.66280760
12376673243344405708, -10.51860200, 70.92572200, -4.93818100, 0.16851774, 0.16661022, 0.24247884
12376674445850706218, -9.69604700, 70.93009900, -4.64156200, 0.78692198, 0.71518052, 2.15704801
12376674435113287998, -9.57836500, 71.11341400, -5.71887300, 0.47613973, 0.43365922, 1.08931419
12376673243348993748, -11.89153100, 71.18892500, -4.98734200, 0.45838417, 0.45291124, 0.69720531
12376672529456169238, -10.05224800, 70.50408200, -4.38773600, 0.76676048, 0.56632511, 2.52865074
12376673243346371528, -10.89755300, 69.65074900, -4.97878000, 0.83199602, 0.49868403, 2.76996536
12376674429741959418, -8.89600200, 70.29512500, -6.37559800, 0.26802900, 0.27826300, 0.43618178
12376673243343749258, -10.43012500, 71.75981400, -5.02064400, 0.35363590, 0.34720014, 0.58364798
12376673237975042428, -10.30832100, 70.04405900, -5.41371500, 0.32937792, 0.33653878, 0.45872298
12376674440485273718, -10.50139000, 70.85159700, -5.39728600, 0.21603972, 0.19787994, 0.33123932
12376673243348337448, -11.76360100, 70.96320200, -4.92346400, 0.36486230, 0.35210007, 0.53330091
12376674445856605758, -11.42964800, 71.14240900, -4.86393600, 0.30032776, 0.28509474, 0.51193287
12376674435115909548, -10.47920900, 71.74764600, -5.88904600, 0.38501914, 0.44450634, 0.64803244
12376673243347026058, -11.24795400, 71.15264200, -5.11052400, 0.18854446, 0.19562812, 0.27807019
12376674440487239858, -11.00235800, 70.15776800, -5.11893000, 0.15161863, 0.13832758, 0.27868093
12376674435118531618, -10.98635700, 69.72339400, -5.58428300, 0.76773385, 0.63242012, 2.50766000
12376672534825533898, -10.29778000, 71.00503700, -3.74178200, 0.98456200, 0.84400478, 2.99450535
12376673243346372858, -10.98887200, 70.49872500, -4.88055400, 0.23999075, 0.26497332, 0.38194019
12376674429747201628, -10.47980500, 70.96237600, -6.40022800, 0.32327773, 0.35963342, 0.58972900
12376674440487240868, -10.98694000, 70.31809700, -5.32085300, 0.27199655, 0.26033690, 0.54085516
12376673227233035448, -8.87441400, 70.18209400, -6.62895200, 0.41057784, 0.38800197, 0.80320160
12376674440486585358, -10.87659700, 70.55403900, -5.12471800, 0.12350040, 0.12472349, 0.20668334
12376674429746544938, -10.03661900, 70.00186400, -6.30558400, 0.40326916, 0.36855797, 0.68958311
12376673232605676498, -10.16221500, 71.17030800, -6.11481700, 0.34240489, 0.29188644, 0.53523126
12376674440487897218, -11.29748700, 70.36907900, -5.30554700, 0.34975157, 0.37998200, 0.51782330
12376674440487242478, -10.94342700, 69.99239100, -5.33535700, 0.35581664, 0.33191176, 0.60658895
12376674435115911238, -10.18966700, 70.08386000, -5.86600200, 0.42115341, 0.43764698, 0.62484575
12376674445852017028, -10.07492900, 71.09145200, -4.86844900, 0.44277105, 0.45889172, 0.58049037
12376654280899955638, -11.28358900, 70.23953200, -3.79622500, 0.56790509, 0.49057673, 1.12611558
12376674440488552918, -11.57973100, 70.67751300, -5.33454000, 0.37132052, 0.37902601, 0.72593073
12376674440487243288, -11.21970400, 71.24862500, -5.17458800, 0.22260619, 0.21937441, 0.33832129
12376674440484618978, -10.29683000, 69.98755100, -5.31449600, 0.26318678, 0.27104151, 0.40692523
12376673232607643268, -10.66016600, 70.64842600, -5.93473300, 0.42925222, 0.42256765, 0.59199459

12376673243346372398, -11.24601300, 71.20029900, -5.05956400, 0.22674451, 0.22892218, 0.37302028
12376654409794191398, -12.22223400, 71.33752100, -4.02648600, 0.72640557, 0.87220478, 1.29055274
12376673243349649018, -12.05605700, 71.32195200, -5.05593800, 0.90082354, 0.76429875, 1.73618051
12376674440486586838, -11.08556300, 71.57113100, -5.36021800, 0.23107748, 0.23483657, 0.43315000
12376673243348338708, -11.53872700, 69.58326200, -5.03309000, 0.48530288, 0.41536278, 0.92310474
12376674440487897208, -11.18851000, 69.74393200, -5.23993500, 0.49624778, 0.50685840, 1.01197928
12376673243350303948, -11.97442700, 69.64426700, -4.97996900, 0.52260669, 0.44314551, 1.24650731
12376673237976352398, -10.63338800, 69.88186400, -5.57619500, 0.25382737, 0.25682609, 0.39796422
12376673232607642508, -10.78363100, 71.19400500, -6.21599600, 0.39680165, 0.38269009, 0.64668593
12376654404420895838, -10.90265000, 71.23532700, -4.46476700, 0.46506229, 0.44946965, 0.63087142
12376673243346371408, -11.11126800, 71.09895900, -5.04000700, 0.18688698, 0.19051495, 0.27584022
12376674440482652898, -9.85781900, 70.78812800, -5.32577600, 0.33185402, 0.29857636, 0.68750372
12376674440487895898, -11.43249600, 71.68294500, -5.43551400, 0.52588527, 0.36290520, 2.38315567
12376674440482653108, -9.73385400, 70.83406100, -5.38805700, 0.36847675, 0.33316563, 0.69525798
12376674445856605378, -11.25817300, 70.59522300, -4.62748600, 0.45220756, 0.42984703, 0.62203888
12376654409788294048, -10.62299100, 71.63523900, -4.12598000, 0.66211342, 0.59275713, 1.81312377
12376673243345716458, -10.88187400, 70.43181200, -5.10447200, 0.18968252, 0.19055069, 0.31479282
12376673243349648848, -11.78780900, 69.74592200, -5.04169600, 0.42525726, 0.33550799, 0.75105460
12376674440487241188, -11.12838100, 70.66865000, -5.15316800, 0.22417180, 0.22869559, 0.34750473
12376674435114599728, -9.96480400, 70.28924700, -5.85059700, 0.43279098, 0.44848419, 0.53957715
12376673232601743858, -9.16280400, 71.48825000, -6.07423800, 0.53862991, 0.54544808, 1.11157137
12376673232602398858, -9.16263200, 70.57285000, -6.08749200, 0.47906342, 0.44952143, 0.74532691
12376674435117220108, -10.65343900, 70.70664900, -5.82480100, 0.36638808, 0.35386491, 0.60076703
12376673237978316838, -11.24893500, 71.02097900, -5.57687400, 0.25853797, 0.23886761, 0.45773995
12376654404425483148, -12.21398000, 71.14015200, -4.44842800, 0.55384456, 0.53647992, 1.12542017
12376674435115909518, -10.42092800, 70.91996300, -5.82668900, 0.23061932, 0.24750116, 0.37767800
12376674440483309748, -9.78864200, 69.97871600, -5.09681400, 0.46353693, 0.46020931, 0.82235149
12376674435118531928, -11.26831900, 71.25219600, -5.75189900, 0.35637490, 0.36803046, 0.49373569
12376673243345718498, -11.03240200, 71.16539700, -4.98501500, 0.16375869, 0.16000836, 0.26387703
12376673237979629338, -11.59388500, 70.63966200, -5.49376000, 0.68598593, 0.62314130, 1.80231029
12376673237977006718, -10.74251500, 69.89653500, -5.38915900, 0.28425722, 0.28966384, 0.35708557
12376673227234346828, -9.33413300, 70.13933900, -6.48008100, 0.60622762, 0.60416511, 1.04285011
12376674440483963248, -10.05189100, 70.08608500, -5.22177300, 0.33251794, 0.34545745, 0.44033487
12376654404418929988, -10.41178200, 71.06870800, -4.55713400, 0.40741165, 0.41374763, 0.63096408
12376674424377180378, -9.88273300, 69.68213600, -6.65626500, 1.22068325, 1.20161695, 2.33644873
12376674440484618628, -10.41488400, 70.72000000, -5.31116100, 0.28449049, 0.30252668, 0.39970076
12376654409788293398, -10.49725100, 70.95095800, -3.94317500, 0.55993379, 0.56209038, 1.15497441
12376654404420896018, -11.01453500, 71.75968300, -4.55144100, 0.88786337, 0.72046095, 2.18214575
12376673232606331398, -10.24657100, 70.74076900, -5.96525200, 0.34767774, 0.35899649, 0.52735472
12376673232607641848, -10.72820600, 70.95522900, -6.08504200, 0.39365470, 0.40559341, 0.57773662
12376673243345062848, -10.68309200, 70.75384600, -4.98225400, 0.21414270, 0.20984741, 0.32493663
12376674440486588588, -11.07790500, 71.25932500, -5.24103500, 0.22843484, 0.22937377, 0.33891087
12376654409793536368, -11.85740600, 70.36516200, -3.87098900, 0.49623883, 0.40266273, 1.00944845
12376673232599778918, -8.44037500, 70.67881800, -5.94318100, 0.45526628, 0.42896390, 0.86902400
12376674445859226118, -12.02063300, 70.43514900, -4.76410500, 0.40348329, 0.43864901, 0.58404644
12376673237977008288, -10.91469400, 70.46225300, -5.52524200, 0.36266196, 0.33383884, 0.62157689
12376673243344405408, -10.57211900, 71.70239100, -5.15123300, 0.28892169, 0.29194879, 0.43620702
12376674440485933078, -10.68055600, 70.23222700, -5.20856600, 0.23821053, 0.24792845, 0.42297129
12376673237977006478, -10.65211600, 69.65591200, -5.52270200, 0.79580644, 0.43043082, 2.67047355
12376674435113944448, -9.81704600, 70.83471400, -5.78835900, 0.20543497, 0.19728289, 0.35358492
12376673243345062718, -10.56028000, 69.98995700, -4.98148800, 0.28696615, 0.31295643, 0.39706485
12376673243346373478, -10.95718600, 69.98197500, -4.97358800, 0.29358701, 0.27560251, 0.55877927

12376673232608298138, -10.84380300, 70.37410600, -6.15335900, 0.51928356, 0.45260520, 0.87612513
12376673243341784238, -9.95182000, 71.77276500, -4.95624700, 0.65909253, 0.69173214, 1.20336960
12376674440486586538, -10.91226700, 70.61792500, -5.20590100, 0.17789884, 0.19077414, 0.28290256
12376674429747857158, -10.57876400, 70.99688500, -6.38850800, 0.27817651, 0.28890384, 0.41208729
12376674440485931468, -10.76289200, 70.28318400, -5.23766800, 0.17748117, 0.17446406, 0.30570555
12376673232601088668, -8.77383700, 70.96439100, -6.16558500, 0.45426931, 0.46953802, 0.72419072
12376674445857260158, -11.39767100, 69.58989500, -4.74427600, 0.61614452, 0.46384080, 2.04711505
12376673232605677038, -10.15794500, 70.89338700, -6.16895500, 0.31680192, 0.29436241, 0.43204397
12376654280901920228, -11.96070100, 70.30061000, -3.71892800, 0.78657219, 0.68646355, 1.99266997
12376654275529934368, -10.93096900, 70.59651100, -4.34873100, 0.39409855, 0.35197216, 0.60554018
12376673237978973698, -11.69285800, 71.56965700, -5.63335200, 0.74769248, 0.44971235, 2.36357213
12376674435117221958, -10.54459800, 69.85616900, -5.64386600, 0.28207688, 0.27394446, 0.39388659
12376673243347028918, -11.13656400, 70.34181000, -4.94283300, 0.34548438, 0.32573324, 0.63260972
12376674445850706988, -9.51967600, 70.35042300, -4.80987200, 0.77464820, 0.54282227, 2.72114975
12376673237978973018, -11.43785200, 71.04530700, -5.60567000, 0.36862928, 0.41266037, 0.51453999
12376673232608952788, -11.20723700, 71.31526100, -6.03653700, 0.43312547, 0.47576317, 0.68291304
12376673243344406378, -10.49853600, 70.50741900, -4.94391000, 0.38894805, 0.42297129, 0.59424857
12376673237975040208, -10.32088800, 70.95518600, -5.66856900, 0.29971157, 0.31295137, 0.43858746
12376673243339818058, -9.06442800, 70.26804200, -4.95659700, 1.14727826, 0.88520189, 2.85284570
12376674440486585268, -10.72967500, 69.97266600, -5.10458800, 0.23890152, 0.26269548, 0.29595731
12376673237973731988, -10.03772900, 71.29619300, -5.68302200, 0.37331347, 0.33298549, 0.56245598
12376673237975041478, -10.29556300, 70.89472700, -5.42197100, 0.34120323, 0.33486326, 0.50278122
12376674440484618368, -10.34154600, 71.13811900, -5.35173900, 0.37089802, 0.36643210, 0.56833417
12376674440486585288, -11.03838500, 71.53703400, -5.23774100, 0.21546545, 0.22378750, 0.31067901
12376673237977661758, -11.12642500, 71.09475800, -5.53330900, 0.32994364, 0.33932218, 0.51823869
12376654404420240358, -10.52652200, 69.89069000, -4.50357300, 0.46764227, 0.45417645, 0.89210954
12376673237973077438, -9.80301900, 70.84315200, -5.41535600, 0.22294962, 0.22919575, 0.43946845
12376674435116566808, -10.69428700, 71.17014200, -5.73442800, 0.33453013, 0.36740908, 0.59935786
12376674445852017338, -10.02506700, 71.61211000, -4.86833300, 0.59001259, 0.52304014, 1.03545887
12376673227233689788, -9.26962200, 71.35863200, -6.51661700, 0.87425259, 0.90992978, 1.66204224
12376673237973731328, -10.03137400, 70.65725000, -5.52630800, 0.17476220, 0.19185128, 0.30892153
12376673227232380128, -8.76284400, 70.39439600, -6.47801500, 0.50229245, 0.44481955, 1.15419549
12376674440486585298, -10.93068500, 71.28432500, -5.20698600, 0.20651989, 0.22055275, 0.31006976
12376654415160280628, -11.39126800, 70.82005900, -3.41866800, 0.49323904, 0.32855464, 1.21129422
12376674440487243628, -11.12595100, 70.37539600, -5.36656300, 0.31974830, 0.30103284, 0.46112766
12376674440487898618, -11.18902500, 69.69354600, -5.11603200, 0.24124061, 0.24219608, 0.37594338
12376674440487242798, -11.07710400, 70.66352400, -5.37652700, 0.29203663, 0.29798294, 0.46149314
12376673243344406998, -10.43401500, 69.69801800, -5.00995300, 0.75408938, 0.38796250, 2.57109568
12376654409792881928, -11.76023400, 70.27580400, -3.92545600, 0.48723912, 0.45668921, 0.84602111
12376674440486585308, -10.98273100, 71.16875300, -5.19250100, 0.21251929, 0.21094969, 0.29876562
12376673243347683468, -11.47584800, 71.15151600, -5.11069300, 0.22650854, 0.23417538, 0.32006097
12376673237974386348, -10.28439300, 71.21565000, -5.49896600, 0.33836648, 0.32906428, 0.53207419
12376673243346370918, -10.87924400, 69.79492400, -5.01343900, 0.25889077, 0.24954207, 0.50420075
12376674445859883288, -12.24769500, 70.35116200, -4.63337800, 0.65701668, 0.54529196, 1.33599948
12376674440486587668, -10.98071400, 71.31222800, -5.42976100, 0.28006852, 0.25358700, 0.56598160
12376673237976350818, -10.61733200, 70.64577300, -5.54828900, 0.27046027, 0.25272251, 0.59546977
12376674435117220138, -10.58647000, 70.09104500, -5.76255200, 0.47474314, 0.45446709, 0.66655102
12376674440485932718, -10.89063200, 71.79875800, -5.25470600, 0.59899569, 0.36462938, 2.57240417
12376654409787639138, -10.38848000, 71.62352400, -3.93851600, 0.41637897, 0.35057355, 1.32391515
12376673237976353818, -10.72748900, 70.65955600, -5.39983900, 0.19192979, 0.18536973, 0.32952023
12376673243343750548, -10.30685500, 70.58148800, -5.05930200, 0.27976741, 0.27728807, 0.43136141
12376674435115255028, -10.26822300, 71.37982700, -5.96219300, 0.32662095, 0.33606095, 0.52968154

12376673243345716298, -10.80381600, 70.44199000, -5.10692500, 0.20647486, 0.21550460, 0.35220835
12376673237973077488, -9.78352400, 70.59140400, -5.48855800, 0.26591329, 0.25241053, 0.50520642
12376673243346372878, -11.07820900, 71.07538500, -4.93387200, 0.21965278, 0.20027749, 0.46250483
12376654404417618438, -9.91400200, 70.55085000, -4.57272100, 0.38898686, 0.40816366, 0.51117493
12376673243343094298, -10.20423300, 71.73255100, -5.15725100, 0.40381673, 0.36916927, 0.73319266
12376654404423517348, -11.49803600, 69.78452400, -4.44323300, 0.40123235, 0.39814592, 0.55452351
12376674440486585318, -10.91722800, 70.61866500, -5.16315200, 0.15659559, 0.12535819, 0.33095674
12376654404420895538, -10.77964500, 70.76124500, -4.51826900, 0.37673627, 0.36431544, 0.49269305
12376673237977008078, -10.89387800, 70.52089600, -5.38504900, 0.18942998, 0.19318074, 0.27453572
12376673227240244688, -11.21889200, 71.38202400, -6.65576800, 0.59690302, 0.62205635, 1.01202448
12376674445853983548, -10.42295100, 69.88654800, -4.71370000, 0.35664818, 0.39361456, 0.50365012
12376674445851362898, -9.86296700, 70.74433000, -4.65670000, 0.45230448, 0.46495846, 0.84813663
12376673243343094608, -10.10109800, 70.75663700, -5.12155600, 0.31279749, 0.35076973, 0.41165396
12376673243349649178, -11.85054200, 70.00448700, -4.86299700, 0.21010263, 0.20829526, 0.41180108
12376673243346370868, -11.05919600, 70.90412600, -5.11822800, 0.21279447, 0.22003613, 0.31401847
12376674440483310158, -10.03485100, 71.73478400, -5.33090500, 0.56680245, 0.50698398, 1.07114907
12376674435119187688, -11.50484100, 71.48160800, -5.90438500, 0.57157454, 0.51537404, 1.31631652
12376674440482653998, -9.85549100, 70.49053400, -5.30168800, 0.31100091, 0.30075292, 0.51625481
12376674435113288578, -9.67912100, 70.79321400, -5.87110400, 0.34283984, 0.36761548, 0.54658519
12376673232606987338, -10.65376300, 71.01621700, -6.03826600, 0.30989702, 0.33730445, 0.40898959
12376673243343750828, -10.30766300, 70.31212800, -4.95712100, 0.38672617, 0.37303969, 0.58382762
12376673243348338078, -11.45347800, 69.74933700, -4.86492300, 0.41174592, 0.42549500, 0.57316528
12376673232599777328, -8.35847400, 70.72528600, -6.08172500, 0.35894112, 0.32237011, 0.65578125
12376674440485933058, -10.75132900, 70.74905600, -5.18679500, 0.19333521, 0.18756093, 0.28332961
12376674445854639898, -10.93802300, 71.55335600, -4.82191300, 0.28603542, 0.30378328, 0.47952785
12376674445853329638, -10.51777900, 71.31509100, -4.73082600, 0.38692600, 0.36099755, 0.63363062
12376673232603710978, -9.61866600, 71.50131700, -6.09277600, 0.49053307, 0.44756751, 1.05684483
12376674429749167668, -11.06154400, 71.73931600, -6.33872500, 0.81171466, 0.62402949, 2.35884151
12376673227233690888, -9.27778800, 70.85870800, -6.47205800, 0.72127701, 0.69338910, 1.34176164
12376673243344406708, -10.70135800, 71.74526700, -5.05888700, 0.27982492, 0.26384846, 0.51134304
12376674435114599558, -10.06836300, 71.13387900, -5.84566400, 0.34634742, 0.35009595, 0.52343277
12376654275533210288, -11.69039000, 69.76206600, -4.20266900, 0.91915650, 0.70576459, 2.42486123
12376674424377836518, -10.21302200, 70.63077800, -6.75133400, 0.66071054, 0.55523155, 1.50858648
12376674440489206928, -11.64034600, 70.26703900, -5.10061900, 0.46022564, 0.45359544, 0.64100972
12376673237971109188, -9.13881100, 70.02453200, -5.59869300, 0.81674147, 0.74441284, 1.88522799
12376673243347029638, -11.31083800, 70.66409200, -5.04022300, 0.23352675, 0.21801756, 0.42174444
12376674445860537298, -12.32340400, 70.08358300, -4.75113000, 0.59743799, 0.49882749, 1.23493092
12376674440487243558, -11.31990000, 71.62165500, -5.38757400, 0.22442186, 0.22029098, 0.32136342
12376673243349649878, -11.93538500, 69.95289300, -4.89841300, 0.22626780, 0.19481123, 0.43512171
12376673237973076738, -9.68671800, 70.57793200, -5.56746000, 0.39133077, 0.38693690, 0.77937741
12376654275533210628, -12.05377400, 71.17915800, -4.36726600, 0.48992769, 0.43259503, 0.97862689
12376673243342439958, -10.02563600, 70.81616700, -5.09324800, 0.40859195, 0.39374528, 0.66819786
12376674429747200998, -10.35928300, 70.98227900, -6.32005000, 0.33983965, 0.33607398, 0.59199459
12376654409790915358, -11.26310800, 70.82404100, -3.99850900, 0.45631483, 0.37847926, 0.86561585
12376674445855294728, -11.07398100, 71.28155000, -4.84897800, 0.26489594, 0.28203821, 0.42321268
12376674435116566048, -10.38552600, 69.69380700, -5.79677200, 0.77659208, 0.51107164, 2.40098873
12376673237977663258, -11.21381100, 71.12273000, -5.60709900, 0.30025071, 0.32267270, 0.42009116
12376654409792226708, -11.50018100, 69.93052300, -4.07282800, 0.66007946, 0.48517912, 2.38841325
12376674435115912298, -10.60265900, 71.80438800, -5.96643500, 0.79352646, 0.51836825, 2.92804573
12376674435115255558, -10.39775800, 71.81672500, -5.85941500, 1.03859148, 0.72956253, 2.91946565
12376673243345715438, -10.82863400, 70.85532200, -5.04428000, 0.22884084, 0.22906277, 0.35792123
12376674445857259948, -11.55302700, 71.13428900, -4.88325200, 0.26060546, 0.27427938, 0.44026789

12376674445858571538, -11.88668000, 70.79062300, -4.82480600, 0.46512962, 0.47512544, 0.64100972
12376674440485275748, -10.59898500, 70.98824300, -5.30385500, 0.26818124, 0.27902181, 0.35027797
12376673232600434268, -8.61335100, 70.81837000, -6.04091000, 0.44143967, 0.39421433, 0.74079507
12376673232603055338, -9.34719900, 70.75635200, -6.18493900, 0.50268188, 0.55187244, 0.68409397
12376673243341129238, -9.53072300, 70.32790400, -5.03479600, 0.35809955, 0.29852613, 0.75944241
12376674440485933598, -10.70669900, 69.94509000, -5.10364000, 0.22688445, 0.25724964, 0.29182439
12376674440486588438, -11.08612900, 71.40822900, -5.37684200, 0.18665552, 0.18050116, 0.26146912
12376674440486588708, -11.15166500, 71.68453600, -5.44305700, 0.27297575, 0.25195175, 0.48821773
12376674440486588058, -10.84246500, 70.06627400, -5.23526800, 0.17746602, 0.18105696, 0.30267580
12376673227238933818, -10.80965800, 70.96585500, -6.72035700, 0.42101417, 0.32941013, 0.84596115
12376654275535832628, -12.86630800, 71.13072900, -4.32304200, 0.70910227, 0.78978618, 1.09304457
12376673243345718408, -11.01230000, 71.10283200, -5.05103700, 0.17755162, 0.14337127, 0.28909793
12376673237975042638, -10.27283300, 69.75914100, -5.37576900, 0.28817203, 0.29273041, 0.44069464
12376673232599123018, -8.23534100, 70.86679700, -6.11607200, 0.60270872, 0.38285786, 1.45642205
12376674440485929658, -10.65496900, 70.28051100, -5.35929300, 0.22279968, 0.17622941, 0.45078520
12376674424373248178, -8.79635600, 70.09329100, -6.73948900, 1.28635607, 1.15335784, 2.57473250
12376674429747200358, -10.48968500, 71.50533100, -6.46513600, 0.36981656, 0.37074344, 0.59236889
12376674435115912118, -10.44381700, 70.92077700, -5.70773200, 0.20697584, 0.16350315, 0.35594289
12376654404422206538, -11.05840300, 70.10891600, -4.53532700, 0.45943432, 0.47118936, 0.66056483
12376674435116565998, -10.58430900, 71.12419700, -5.71652600, 0.26074071, 0.25584143, 0.39606234
12376674445853984628, -10.60391300, 71.00312500, -4.87316400, 0.28681770, 0.30198062, 0.48235032
12376654275534520958, -12.34890100, 71.23724100, -4.19770600, 0.50338431, 0.35665316, 1.10270174
12376674424379147508, -10.65808200, 70.84792700, -6.84020100, 0.31485743, 0.28048159, 0.49471312
12376673221868259588, -10.25634100, 71.24770600, -7.06626700, 1.34952430, 0.95410862, 3.39281554
12376674440486587768, -10.81624700, 70.08092100, -5.29100800, 0.19430566, 0.22151348, 0.29373335
12376674445853983618, -10.70006900, 71.28079100, -4.82561400, 0.31180377, 0.29960304, 0.44740374
12376673237978973148, -11.38030200, 70.65266900, -5.49248000, 0.35293605, 0.31712622, 0.58886242
12376673221870225268, -10.62224900, 70.52743600, -7.17867100, 1.77552112, 1.11854628, 4.41159691
12376673232608299358, -10.95704800, 70.60930600, -5.94335400, 0.42356510, 0.43186082, 0.66227780
12376672529458136548, -10.70104400, 70.87084700, -4.23091200, 0.45452721, 0.47823659, 0.71314814
12376654275529934788, -10.97227000, 70.29879800, -4.35935600, 0.51251483, 0.51254599, 0.80929488
12376673237977662468, -11.16640800, 71.52885100, -5.51068700, 0.31572927, 0.28218817, 0.52131268
12376674445857261178, -11.55430900, 71.30954300, -4.84365300, 0.37485723, 0.32455118, 0.86733906
12376673237974385648, -10.07727200, 70.69307900, -5.57631000, 0.19821289, 0.17991675, 0.36954101
12376674435116566118, -10.53693200, 70.69515900, -5.71537600, 0.27783945, 0.24308068, 0.60797476
12376673232607641778, -10.77252200, 71.51259300, -6.21852800, 0.40423017, 0.42136521, 0.51091856
12376654404423517428, -11.49121100, 69.61926100, -4.35314600, 0.72428902, 0.41110428, 1.96392359
12376674440485933308, -10.77057800, 70.63842900, -5.29131300, 0.19938507, 0.18405331, 0.29813329
12376674440486587748, -10.80938700, 70.11530500, -5.24728900, 0.19897928, 0.20779393, 0.30418525
12376674440487898438, -11.27204500, 70.70227300, -5.28789400, 0.26204028, 0.23671833, 0.41726512
12376674429741959378, -8.89888900, 70.38325700, -6.29318900, 0.32880743, 0.33937146, 0.63372883
12376674424378492098, -10.45732500, 70.86572000, -6.81927500, 0.35371575, 0.35344969, 0.49730566
12376674435118531858, -11.19092300, 70.84023400, -5.67324600, 0.41464135, 0.40195234, 0.63041017
12376674440490518268, -12.03486800, 69.99558500, -5.14841100, 0.61103337, 0.60404272, 1.13653693
12376673232605676058, -10.28739700, 71.42639500, -6.12902900, 0.43285223, 0.46961909, 0.61109792
12376654404421551978, -11.09776900, 71.62020300, -4.62621900, 0.52793310, 0.40097443, 1.20717667
12376674445854639578, -10.82101700, 71.09952700, -4.84145800, 0.33835226, 0.31799518, 0.49926269
12376654409787639558, -10.45991100, 71.42750000, -3.92354000, 0.31733269, 0.30802414, 0.76568436
12376674445851362688, -9.74855000, 70.07311400, -4.64817800, 1.02084398, 0.57909370, 2.88989012
12376672534826190048, -10.41241700, 71.07781700, -3.88233400, 0.42991108, 0.35529117, 0.75938990
12376674429745890348, -10.04207500, 71.03003800, -6.28834900, 0.41185029, 0.38580691, 0.83573063
12376654415160280478, -11.34004000, 70.74715800, -3.60059000, 0.28027097, 0.25385007, 0.43711171

12376654404422861448, -11.18099600, 69.66416000, -4.46579300, 0.63478225, 0.45604263, 2.08064762
12376673243345717928, -10.71726300, 69.67933900, -4.84096100, 0.64289651, 0.37809506, 2.58342319
12376674440485276148, -10.50999500, 69.91791500, -5.14159100, 0.21032117, 0.21485111, 0.28430418
12376674440487242708, -11.12301800, 70.99158000, -5.29381700, 0.29011900, 0.28909793, 0.41410514
12376673243345063258, -10.78908500, 70.89756800, -5.09313100, 0.21782746, 0.22119086, 0.32426284
12376674435117876188, -10.73680300, 69.88440500, -5.66947900, 0.43705942, 0.41093819, 0.97007316
12376673243345718618, -10.83246800, 69.75371900, -4.96323100, 0.25141643, 0.26088347, 0.40630371
12376673243345717788, -10.91276200, 71.32070100, -4.93314700, 0.23369325, 0.24164947, 0.35024873
12376674435116565908, -10.59036300, 71.26258700, -5.88491800, 0.24669799, 0.24102959, 0.50600813
12376673237971766358, -9.49990100, 70.97601000, -5.57104200, 0.45004812, 0.35764816, 1.08914121
12376673221863670498, -8.74794400, 70.33837300, -6.96080700, 1.25013331, 1.19243539, 2.23628928
12376673237973077728, -9.87912300, 70.95492200, -5.57734200, 0.23381995, 0.24199542, 0.37394395
12376674429747857818, -10.69880800, 71.24176000, -6.34095700, 0.33805776, 0.34362430, 0.49825954
12376674445858571848, -11.83592900, 70.08904100, -4.64298400, 0.42857354, 0.44553615, 0.74528960
12376673237974385668, -10.06411500, 70.56733500, -5.52647600, 0.27831307, 0.28416263, 0.46582095
12376654404419584878, -10.45765100, 70.73407100, -4.50049900, 0.43222486, 0.43337532, 0.61888424
12376674435114599078, -9.90472900, 70.65719100, -5.68333700, 0.27760721, 0.24100492, 0.45090720
12376674445852673608, -10.35312700, 71.46300800, -4.66792300, 0.51381526, 0.46736987, 0.84642840
12376673237975696788, -10.52701100, 70.92316600, -5.56901900, 0.28512697, 0.27340049, 0.39115057
12376674440485931928, -10.55207700, 70.04741400, -5.30778400, 0.26213896, 0.26402936, 0.45814897
12376673243345063168, -10.87228000, 71.59612400, -5.13311300, 0.25413095, 0.24046906, 0.41469882
12376674429740647568, -8.43326400, 70.94952300, -6.35583500, 0.74248728, 0.65705168, 1.34072661
12376673237978973478, -11.58511300, 71.33140200, -5.48787300, 0.34373734, 0.34265476, 0.47742455
12376672529457480978, -10.32422100, 69.83338700, -4.22377100, 1.07648993, 0.85776879, 2.74080871
12376654286269318348, -11.50903800, 70.76946900, -3.19719400, 1.21411873, 1.01142464, 2.96944739
12376674445858571148, -11.80140600, 70.72622700, -4.69708800, 0.38447838, 0.33579980, 0.63512440
12376654409792225678, -11.52129700, 70.42085100, -3.96502700, 0.46333681, 0.45893688, 0.68689369
12376674440488553348, -11.37371200, 70.25941500, -5.15357300, 0.41372294, 0.45619218, 0.55450960
12376673237977663358, -11.01569800, 69.71374200, -5.49198700, 0.50193450, 0.41726438, 1.11293459
12376673227238278638, -10.62555800, 70.79271800, -6.68098700, 0.31583629, 0.31300709, 0.56398125
12376673243345718388, -11.03076400, 71.23230600, -5.02856400, 0.18412764, 0.19733044, 0.24852322
12376674429749823118, -11.10974200, 70.54244300, -6.30749000, 0.83861547, 0.71999484, 2.29604185
12376673227236968638, -10.27615600, 71.42637800, -6.62353600, 0.67894512, 0.56941166, 1.88503538
12376673232605676438, -9.97524200, 69.97389900, -6.08465100, 0.66018299, 0.51680066, 1.86500974
12376673243343094198, -10.01061000, 70.40487300, -5.03070100, 0.36440202, 0.36253314, 0.57014325
12376673232601744318, -9.13281900, 71.62681300, -6.18677500, 1.01406999, 0.95293284, 2.85334868
12376673237975696198, -10.38290500, 70.29440600, -5.49242900, 0.36154572, 0.35677494, 0.59201806
12376674440483309758, -9.96020300, 71.17311200, -5.17132300, 0.49190613, 0.46169587, 1.03523615
12376654404418929048, -10.26656000, 70.98615000, -4.56723100, 0.46724525, 0.43589692, 0.76771076
12376673237978317728, -11.40181700, 71.54860300, -5.47811700, 0.26795731, 0.23847084, 0.44362899
12376673232601089808, -8.76596100, 70.47301000, -6.05669500, 0.50090269, 0.42860287, 0.88729744
12376674435113944288, -9.76566600, 70.64450700, -5.69947700, 0.31293636, 0.26723640, 0.56968285
12376674440487242988, -11.21514000, 71.36556600, -5.34910200, 0.26949060, 0.25358700, 0.46689785
12376674440486587578, -10.81755000, 70.34822500, -5.36554100, 0.20288285, 0.19439024, 0.37864750
12376674445859226138, -11.93420200, 70.04159000, -4.75050900, 0.20255155, 0.18937151, 0.39028509
12376674445853983658, -10.67057600, 71.75076900, -4.80651100, 0.52078412, 0.43400936, 1.75305448
12376673243345718358, -10.90960200, 70.52872800, -4.92226300, 0.26840706, 0.26714313, 0.41218676
12376674435115254828, -10.21056300, 71.25149400, -5.79283000, 0.21508390, 0.22885138, 0.33972170
12376674445859229548, -12.16373200, 71.38082000, -4.67289700, 0.41757416, 0.40221854, 0.63689435
12376654409790260688, -11.03494200, 70.73774600, -3.91346900, 0.44797074, 0.38234640, 0.97598688
12376673237975042968, -10.26971600, 70.65423400, -5.48286000, 0.29539550, 0.27067200, 0.43136141
12376654404424172148, -11.72766000, 70.66985300, -4.43777700, 0.52638824, 0.54230998, 0.80355331

12376673243347029908, -11.31617000, 70.49150400, -4.90559100, 0.36569243, 0.32833363, 0.62933116
12376654404420895478, -10.72078100, 70.40358200, -4.55484700, 0.44392658, 0.45424543, 0.58382762
12376673243343750738, -10.27671400, 70.32375400, -5.08613000, 0.32529797, 0.34964404, 0.43190303
12376673243344406288, -10.42918100, 70.10349700, -5.05617500, 0.33127286, 0.31673246, 0.54381650
12376674429749822778, -11.05669300, 70.61799000, -6.39283100, 0.44494936, 0.43350808, 0.90248885
12376674435116566588, -10.66691200, 71.13467000, -5.89821600, 0.24898516, 0.23739335, 0.43448045
12376673243349648138, -11.90867200, 69.85920100, -4.97714000, 0.19104167, 0.17778491, 0.29395792
12376673237974386548, -10.19949100, 70.60243500, -5.59759100, 0.29728171, 0.30499488, 0.54097023
12376674445855951578, -11.13766100, 71.12153000, -4.82213500, 0.29953851, 0.31567977, 0.44259667
12376674429749166158, -10.98459700, 71.49723400, -6.50948800, 0.44176599, 0.46741065, 0.62356008
12376674440487897048, -11.14576600, 69.65855000, -5.14462300, 0.37702791, 0.32686555, 1.01522720
12376674440487896758, -11.13341300, 69.84178700, -5.15322900, 0.34742229, 0.29869226, 0.62460858
12376673243346373258, -11.08585300, 70.97990900, -5.04510300, 0.19442144, 0.19692497, 0.28043052
12376674445857260838, -11.49755200, 71.12993000, -4.79383200, 0.32188844, 0.32424803, 0.60900318
12376673221868914688, -10.43667300, 70.74597400, -7.13884200, 0.82662262, 0.50004064, 1.74632204
12376654404423516858, -11.42667600, 69.94318400, -4.44035000, 0.46440295, 0.47344973, 0.65811846
12376674429747200488, -10.53977900, 71.77340900, -6.53372700, 1.13556407, 0.80018723, 3.10739850
12376673243345063288, -10.76268300, 70.63658900, -5.11316800, 0.17470495, 0.17765638, 0.26393921
12376674440485932768, -10.57392600, 69.70401600, -5.14224900, 0.44132448, 0.30311572, 2.21432715
12376674440487898818, -11.52999200, 71.60879000, -5.32258200, 0.32377824, 0.33068986, 0.60341351
12376674440482653378, -9.68035400, 70.23408400, -5.23669500, 0.39418703, 0.34183819, 0.76681316
12376674435115911798, -10.43979200, 71.26971600, -5.78394200, 0.23784085, 0.23012382, 0.35549713
12376674440487243208, -11.23861400, 71.43985900, -5.24773800, 0.23630877, 0.23854760, 0.34502238
12376673237975041578, -10.39580800, 71.37598800, -5.70708400, 0.26912500, 0.28186016, 0.43062698
12376673237977007698, -10.79530000, 70.42082400, -5.46082400, 0.26493788, 0.19965818, 0.54282005
12376673237975041968, -10.46312400, 71.59957800, -5.69366300, 0.37204084, 0.38306884, 0.60169690
12376673227236311938, -9.77748600, 69.86408100, -6.48970300, 0.58387098, 0.44101571, 1.71715847
12376673237975041938, -10.27179400, 70.31896800, -5.51133200, 0.38010217, 0.38022000, 0.59676514
12376674440488553138, -11.47430300, 71.04801200, -5.19412700, 0.29532570, 0.29274413, 0.43372394
12376654275530589148, -11.10479900, 70.78967500, -4.27203900, 0.43988274, 0.36898383, 0.68385131
12376674445852673738, -10.15136500, 70.62757900, -4.79928800, 0.32141510, 0.33698834, 0.48334822
12376673237978973668, -11.62725700, 71.21446700, -5.58333700, 0.43789403, 0.41678205, 1.04615620
12376673243343751298, -10.30038600, 70.66159700, -4.86987300, 0.26015274, 0.27078711, 0.40794842
12376674440485275678, -10.61993600, 71.21347900, -5.37724000, 0.35726129, 0.35694683, 0.52324560
12376674429748512518, -10.72589500, 70.64580200, -6.37233400, 0.40128626, 0.40194211, 0.55753009
12376673232606332308, -10.45655500, 71.07550500, -6.05964400, 0.29987736, 0.29319654, 0.40677296
12376674429749823098, -11.12883900, 70.70721900, -6.41935300, 0.51306789, 0.54284481, 0.93033283
12376673237970453018, -8.96220400, 70.11934300, -5.53101000, 0.86791585, 0.78947437, 2.01756798
12376674440485274928, -10.41485200, 70.41142400, -5.16049400, 0.33450867, 0.33810565, 0.45872298
12376673243343749838, -10.38136600, 70.72606100, -4.94806800, 0.25851255, 0.25053307, 0.45409423
12376674445858571968, -12.10432900, 71.54899600, -4.78283000, 0.86870997, 0.67418248, 2.53915638
12376673243345062388, -10.75001300, 71.60953600, -4.97171400, 0.20190474, 0.18677761, 0.35679960
12376674440486585368, -10.91939000, 71.18472600, -5.24182500, 0.21414758, 0.22603552, 0.30604516
12376673237975696178, -10.42083700, 70.58381600, -5.59537300, 0.31671657, 0.30950679, 0.58123505
12376674435115910268, -10.21491600, 69.96048200, -5.67158300, 0.34399150, 0.37183583, 0.47775393
12376673243343094178, -10.22148600, 71.91030000, -4.99596900, 0.99163201, 0.79265474, 2.98596975
12376674445859883178, -12.18861700, 70.15822900, -4.64546700, 0.50585359, 0.45086925, 0.86737429
12376674445859228008, -11.90310800, 70.24262600, -4.78469000, 0.34398580, 0.32504660, 0.56474390
12376673243346373568, -11.17486700, 71.35241700, -5.02843100, 0.28098520, 0.28783366, 0.42421377
12376674440485933218, -10.87999000, 71.39653500, -5.31021100, 0.31895112, 0.27430771, 0.60169690
12376674440487243528, -11.15924200, 70.63482500, -5.16436300, 0.18851119, 0.19293092, 0.36803209
12376674429741958458, -8.81760800, 70.76460400, -6.21306800, 0.42209771, 0.44977524, 0.53637395

12376673237973077388, -9.77073800, 70.92063000, -5.64198000, 0.25595602, 0.26981422, 0.41897846
12376654275529278818, -10.80176700, 70.85772800, -4.25706900, 0.34494474, 0.36093402, 0.44260235
12376673237976353688, -10.63691900, 70.40749900, -5.42431700, 0.28354357, 0.28627327, 0.46593041
12376673243346373628, -10.97911800, 70.02636200, -5.04369400, 0.17541342, 0.15581893, 0.31950131
12376674435117876308, -10.74530200, 69.75875900, -5.65231000, 0.38113688, 0.27500192, 1.02787771
12376673237979629548, -11.59303100, 70.57610900, -5.42923100, 0.37056070, 0.38310232, 0.78172113
12376674440485933608, -10.84559600, 70.90394300, -5.17432000, 0.22735672, 0.23785546, 0.31877490
12376673232600434238, -8.55387300, 70.32729400, -6.10695800, 1.01889942, 0.65829500, 2.75095411
12376674445853984528, -10.42502200, 69.87343900, -4.61693400, 0.34589992, 0.40785065, 0.52838635
12376654280899299768, -11.16142800, 71.15450500, -3.78346800, 0.74227560, 0.76568436, 1.86834535
12376673237974386048, -10.30009100, 71.66068600, -5.72222600, 0.39392588, 0.40823037, 0.66336782
12376674440485276198, -10.53130800, 70.04810400, -5.28131400, 0.26385527, 0.25936382, 0.42296314
12376674445855951778, -11.02514500, 70.10855900, -4.73839700, 0.40471066, 0.37501248, 0.66280760
12376673237979629708, -11.55366300, 70.11146600, -5.52846100, 0.80193328, 0.63841276, 2.16605149
12376654275534521708, -12.48713100, 71.21229700, -4.28267500, 0.46732440, 0.38994619, 1.09177534
12376673243347029728, -11.16611900, 69.67666200, -4.90648800, 0.30150850, 0.29721227, 0.50697373
12376674440486588828, -10.98641800, 70.55380900, -5.16827000, 0.22427613, 0.24631144, 0.34396110
12376673243342439718, -10.06433300, 71.33133200, -5.17310500, 0.47473066, 0.47883094, 0.63363062
12376674435113288288, -9.70073700, 71.52682800, -5.97305200, 0.62320756, 0.62015509, 1.37900857
12376674440486588788, -10.88714300, 69.95689200, -5.13112600, 0.21897080, 0.19163593, 0.45372786
12376654404420240948, -10.53276000, 70.20764200, -4.43195900, 0.51859094, 0.53548131, 0.83297893
12376674445859883068, -12.27405300, 70.67593700, -4.71054700, 0.73108952, 0.71844188, 1.18748710
12376673227238933228, -10.63744600, 70.56097100, -6.48722400, 0.45077211, 0.45662708, 0.69242653
12376673243344407648, -10.55320200, 70.90646900, -5.04459000, 0.22186174, 0.22399132, 0.31471182
12376674445854642458, -10.76990200, 71.45021100, -4.82547900, 0.32009810, 0.29385399, 0.60132793
12376674445855297038, -10.91755200, 70.19034100, -4.75881100, 0.33577574, 0.32368690, 0.55483477
12376674440487243798, -11.09449200, 70.63033500, -5.36887100, 0.25002052, 0.24096043, 0.41991789
12376674435115255358, -10.28352100, 71.25161400, -5.89641300, 0.23880300, 0.25164447, 0.36267555
12376674440483311258, -10.00576200, 70.25205200, -5.29516300, 0.28717716, 0.31148082, 0.39536584
12376673243345718228, -11.07076400, 71.78198600, -4.97155400, 0.72765553, 0.47363754, 2.62104601
12376674429745235628, -9.72150700, 70.17656100, -6.22799300, 0.47259492, 0.44503258, 0.87101431
12376673243346373918, -11.12573500, 70.74193600, -4.90220600, 0.33961249, 0.34336377, 0.54820813
12376673232602399678, -9.13602100, 70.77759200, -5.93071700, 0.50110723, 0.51340152, 0.78947437
12376674440482653078, -9.66676800, 70.41962500, -5.28418900, 0.40434831, 0.40744919, 0.75146373
12376673237973077678, -9.84483900, 70.73227000, -5.45980100, 0.20474704, 0.21714020, 0.28904927
12376674440489206528, -11.62436300, 70.76940200, -5.36119700, 0.46338463, 0.41313069, 0.92421763
12376674440484618448, -10.32554200, 70.83019200, -5.15238400, 0.30419068, 0.27882012, 0.50142337
12376674440486588088, -10.91409000, 70.53145800, -5.24227700, 0.15796159, 0.12161862, 0.29101107
12376654409790261618, -11.03987000, 71.07097000, -4.02748000, 0.55119313, 0.62828720, 0.94959854
12376674435116565558, -10.57522900, 71.28015800, -5.90219900, 0.32552751, 0.31773331, 0.52886271
12376673243345062638, -10.67866600, 70.80507400, -5.12221300, 0.19086302, 0.18375325, 0.31410666
12376673243346372748, -10.94538900, 70.35215300, -4.89128200, 0.25397179, 0.23628307, 0.47597777
12376673243347683798, -11.45502500, 70.74156500, -5.05645500, 0.38294390, 0.36362728, 0.57712186
12376654409786985208, -10.26279200, 71.90090800, -4.04606700, 0.77420698, 0.89630690, 1.21651955
12376674424380457808, -10.93819500, 70.84430900, -6.74716900, 0.48568968, 0.43682661, 0.84890507
12376673232603711278, -9.69769000, 71.41854000, -6.01958100, 0.36009842, 0.44470848, 0.54217147
12376673232604366058, -9.82922100, 70.95286300, -5.95211200, 0.33222624, 0.35244644, 0.48857705
12376654275533866338, -12.23524400, 71.46600100, -4.37709400, 0.34850140, 0.35466788, 0.43641856
12376674429748512278, -10.73628400, 71.08180200, -6.40296300, 0.35079992, 0.34403490, 0.66902432
12376674440477410998, -8.36343300, 71.00856900, -5.40624700, 1.11295085, 1.11804019, 2.36936071
12376673237973732098, -9.94987900, 70.54221600, -5.41125200, 0.24043135, 0.20448989, 0.43121880
12376654404421550998, -11.11146300, 70.90186800, -4.54304100, 0.41627672, 0.40115408, 0.66679098

12376674440485278408, -10.64009200, 70.81025000, -5.30970000, 0.21641173, 0.19317894, 0.37007784
12376672529456826138, -10.40334100, 71.23893100, -4.41307600, 0.50765613, 0.55657373, 0.80488997
12376654409787639108, -10.26995800, 70.80570200, -3.91512900, 0.84883008, 0.67661662, 2.48752330
12376674445857260968, -11.52364600, 71.21023100, -4.73215900, 0.33037653, 0.22283632, 0.79713344
12376673232606986988, -10.44195600, 70.26475600, -6.08074800, 0.52116121, 0.53288039, 0.64016363
12376673243347029848, -11.47484800, 71.49148600, -5.01496800, 0.39766545, 0.35016384, 0.70616922
12376673232605022118, -9.95704100, 70.52272300, -6.07457400, 0.40692517, 0.41699470, 0.54929741
12376654275531899678, -11.33663800, 69.91306600, -4.13065100, 0.57827040, 0.54692191, 1.05805620
12376673243347029378, -11.34385800, 71.00262000, -5.02949200, 0.30006122, 0.29156015, 0.57872537
12376672534824882408, -10.16945200, 71.32042900, -3.88211000, 0.27535861, 0.31232527, 0.51135715
12376674440486589128, -10.99202800, 70.88745100, -5.23796000, 0.26647985, 0.28550270, 0.38505815
12376673232606331628, -10.31140500, 70.97171700, -6.02228400, 0.27677529, 0.23956627, 0.48354574
12376654409792881998, -11.94632200, 71.35058400, -4.07104800, 0.87101358, 0.86211196, 1.86209123
12376673243346373298, -11.19722100, 71.61494100, -5.10450400, 0.24662272, 0.24813526, 0.43006369
12376674435115254788, -10.19219500, 71.26953300, -5.76705700, 0.24341058, 0.23746091, 0.40823037
12376654280899956638, -11.35506100, 70.65546700, -3.72126400, 0.33003711, 0.35710525, 0.47176813
12376673237974386618, -10.32886300, 71.43859200, -5.63691400, 0.35758342, 0.33606095, 0.57621274
12376674445854639148, -10.55451500, 69.99830400, -4.79589000, 0.38296890, 0.40630371, 0.53314318
12376674429745893378, -9.92408700, 70.61750100, -6.33365200, 0.48095786, 0.43146298, 0.77338611
12376674435115254888, -10.18302000, 71.03026100, -5.90171300, 0.24108167, 0.24563346, 0.36565591
12376673243347683258, -11.47744300, 71.34013400, -5.17531200, 0.30184572, 0.31084706, 0.41667116
12376674440485932288, -10.64624200, 70.49269100, -5.12755500, 0.26119242, 0.25202319, 0.39726574
12376673237973733558, -9.85434400, 70.15401700, -5.57288200, 0.49920814, 0.45204706, 0.95202919
12376674435108700748, -8.23857700, 71.05898000, -5.79143100, 0.96773319, 0.74392718, 2.43702521
12376674440485933388, -10.72761800, 70.22733300, -5.22363600, 0.18625712, 0.16663891, 0.29499369
12376673237975042878, -10.12824600, 69.76063900, -5.43617500, 0.58701042, 0.49026230, 1.89450528
12376673243343096008, -10.06695500, 70.41135300, -4.92449300, 0.36943597, 0.37278623, 0.55032458
12376674440487240048, -10.93444600, 70.03744000, -5.11232300, 0.16942737, 0.15368029, 0.28203061
12376673232603711208, -9.64298300, 71.21815200, -6.12316700, 0.42711702, 0.45468142, 0.59607491
12376673237977009488, -10.98316100, 71.23027800, -5.51247900, 0.30645600, 0.30779894, 0.50833730
12376673237978974218, -11.43347500, 70.16263900, -5.59412300, 0.52109338, 0.50327733, 1.12294270
12376674440481999018, -9.53063800, 70.32230000, -5.10856000, 0.15909151, 0.21066764, 0.24258829
12376674440484619518, -10.52610500, 71.66581900, -5.35055400, 0.45117209, 0.44651542, 0.59716252
12376654275533866368, -12.27982300, 71.65617800, -4.38387700, 1.03168024, 1.01320963, 2.47992244
12376674445859882828, -12.31239400, 71.23263600, -4.65824400, 0.72305977, 0.54825315, 1.76488663
12376672534825535018, -10.33117600, 71.26361000, -3.78042200, 0.67972713, 0.34274658, 2.22337116
12376674440487240018, -10.96241600, 70.13253800, -5.11693600, 0.15017868, 0.13006418, 0.27679543
12376674435115912378, -10.50140600, 71.00678100, -5.82100100, 0.20943873, 0.22369880, 0.33646351
12376674435117222488, -10.94811700, 71.61758700, -5.83984800, 0.46781988, 0.49141360, 0.57794518
12376674445854640358, -10.68739100, 70.82501100, -4.86556700, 0.32918811, 0.32145668, 0.52465628
12376674429748512368, -10.74542100, 71.00400200, -6.43054200, 0.33852524, 0.34934998, 0.64637618
12376674440485275278, -10.51653500, 70.75004500, -5.33008300, 0.24707767, 0.26200485, 0.37583620
12376674435115909598, -10.32154800, 70.69329300, -5.82561600, 0.35917185, 0.33216063, 0.62484575
12376673227237623388, -10.44471700, 71.21443600, -6.54753600, 0.38639127, 0.33890934, 0.58292480
12376673243345715708, -10.91114200, 71.06780800, -5.02209700, 0.22653470, 0.22563984, 0.34749761
12376674435117876868, -10.96001800, 71.22076100, -5.87597900, 0.41012340, 0.38397893, 0.61516293
12376673232601744158, -9.06615000, 71.28532000, -5.98878900, 0.50034218, 0.51579263, 0.67848166
12376673243345718168, -10.98080800, 71.27782500, -4.97790600, 0.18659281, 0.21395242, 0.27557467
12376674435118531438, -11.08224000, 70.49449100, -5.76602000, 0.41181418, 0.41951810, 0.63919371
12376673237973731458, -9.90909000, 71.02947300, -5.53718100, 0.31638997, 0.32749959, 0.43858746
12376674440481999488, -9.56951300, 70.28728700, -5.10829200, 0.33206108, 0.25614871, 0.73857893
12376674440487243478, -11.33012200, 71.74740900, -5.46697500, 0.60968043, 0.40868502, 2.44226222

12376673243343096258, -10.22071200, 70.78722300, -5.01170000, 0.23537415, 0.21340683, 0.38576619
12376674435114599918, -10.09390000, 71.05465500, -5.78869400, 0.27202599, 0.27540452, 0.38229476
12376674440487896028, -11.23307700, 70.49582400, -5.31958500, 0.26252984, 0.22105826, 0.47123008
12376654280900614538, -11.55517500, 70.42924700, -3.68947700, 0.46102650, 0.42811677, 0.96327147
12376674435116566218, -10.56403900, 70.81019100, -5.73266700, 0.28993349, 0.25272251, 0.63041017
12376673232609611588, -11.29677600, 71.14887100, -6.01377300, 0.44175632, 0.44404504, 0.78611773
12376674445852673478, -10.20695200, 70.76415600, -4.62687000, 0.31704675, 0.33260604, 0.42768348
12376674429746547998, -10.14897400, 70.30137100, -6.32580900, 0.41405036, 0.41514018, 0.57623941
12376673232604367448, -9.75512600, 70.39525600, -6.08315200, 0.43039526, 0.46453078, 0.57307586
12376673243345062918, -10.73937100, 71.11617100, -5.15848500, 0.27648544, 0.25336816, 0.40687317
12376673232608959178, -11.15985900, 70.70180000, -6.03630900, 0.43568547, 0.38706787, 0.74005367
12376674429747200278, -10.39545900, 70.92412700, -6.46822300, 0.33376358, 0.35052101, 0.44664162
12376673227238279868, -10.62270000, 71.15508700, -6.52606600, 0.34192891, 0.32927026, 0.64891149
12376673232609609658, -11.21224900, 70.81127500, -6.00452300, 0.48160588, 0.46677872, 0.80626402
12376674435108047818, -8.21163300, 70.87769200, -5.83855300, 0.51680214, 0.35060861, 1.31472716
12376674445855296808, -11.01132000, 71.44575300, -4.84678100, 0.27433688, 0.26869526, 0.44946965
12376673243349649358, -11.85192400, 69.87172700, -4.84458300, 0.26163635, 0.26127580, 0.54214657
12376673243345718298, -10.85238800, 70.19852100, -4.95788500, 0.30481317, 0.29651326, 0.47096714
12376654404421553298, -11.11804900, 71.39631700, -4.57759900, 0.46654459, 0.37354444, 0.97196789
12376674440480032338, -9.04028900, 70.13687600, -5.20596800, 0.68828348, 0.61428305, 1.37589792
12376673243341134228, -9.60698300, 70.34398100, -4.87357000, 0.44515297, 0.46766054, 0.68167113
12376673237978318308, -11.39441700, 70.91171200, -5.42210500, 0.28160517, 0.27736876, 0.40541605
12376654404421552648, -11.05407400, 70.80291300, -4.56092800, 0.35921363, 0.37637590, 0.47723125
12376673243348339508, -11.82021300, 71.57587600, -5.15187500, 0.68255668, 0.47742455, 2.49632061
12376673237975696158, -10.43341000, 70.68667500, -5.48293600, 0.26477009, 0.25575242, 0.42435405
12376673232609608218, -11.29485200, 71.20337500, -6.05537800, 0.45005891, 0.46993087, 0.66902432
12376674429744580128, -9.75705800, 71.15538900, -6.26591200, 0.46578236, 0.46404250, 0.68614335
12376674440485275318, -10.36278200, 69.72414000, -5.21141200, 0.50952391, 0.24985343, 2.07907351
12376654404423518448, -11.52161400, 70.47799900, -4.41015000, 0.51165132, 0.55162842, 0.66967933
12376674440487240588, -11.15096900, 71.45390000, -5.25637600, 0.20619842, 0.21687202, 0.32906919
12376654275536491818, -13.05100600, 71.10718600, -4.32454000, 0.79398636, 0.91223411, 1.34943545
12376673243343094708, -9.96872800, 69.87143000, -4.88336200, 0.54603835, 0.53338977, 0.94162162
12376674435111979728, -9.25066500, 71.00158600, -5.88249000, 0.46435484, 0.44256133, 0.68558974
12376674435113288398, -9.64076400, 70.84419700, -5.86454000, 0.35203788, 0.36980674, 0.52102230
12376673237975697458, -10.60403100, 70.72239100, -5.51448400, 0.20716341, 0.21354497, 0.31461977
12376673237973729878, -9.97575300, 70.74195700, -5.51513000, 0.21387389, 0.22780502, 0.36646379
12376674445859227688, -12.03400800, 70.03198600, -4.72184800, 0.30772732, 0.27184814, 0.67858453
12376674440485930418, -10.75577000, 70.51924400, -5.14437400, 0.16578182, 0.17053641, 0.27034705
12376654415159624008, -11.22396700, 70.66041000, -3.44170200, 0.62125002, 0.53662803, 1.20858330
12376674440486584488, -10.78857000, 70.37352100, -5.21131400, 0.17665705, 0.17077748, 0.31452185
12376674440487896748, -11.25808100, 70.52801800, -5.20092400, 0.28938868, 0.28553741, 0.47360074
12376673243344404658, -10.55734500, 71.10449900, -5.02135100, 0.32099855, 0.31886711, 0.56350982
12376652256999506678, -15.55615600, 75.14266000, -1.40371900, 3.67109275, 3.22505720, 7.82381806
12376673227240244018, -9.56581500, 60.67891600, -5.57064600, 2.13471559, 2.41603909, 3.07583472
12376672540190311888, -8.42564900, 64.87025400, -2.97200800, 2.51881230, 2.55848055, 3.80957308
12376652267734958248, -12.69280900, 64.23246300, -0.00091200, 6.04815550, 4.70958920, 18.54734011
12376674478083277188, -12.31171100, 63.94848500, -8.08950100, 3.40185675, 3.39093840, 6.53056435
12376679116718081228, -14.04499400, 71.62227600, -9.18055300, 2.34609933, 2.03677242, 4.44610879
12376673237968486988, -9.28680700, 77.34439000, -6.00823400, 1.45742242, 1.21716905, 2.28762358
12376653287815250348, -8.23247000, 70.01758300, -1.46968500, 2.81944467, 2.88706091, 4.11804772
12376672529450271128, -7.87009600, 66.04040600, -3.86395000, 2.42373230, 2.42331335, 3.73543921
12376673232601090038, -7.55424000, 60.21618700, -5.04649500, 2.35283505, 2.00812483, 4.64082063

12376673237984871898, -12.57006500, 67.31873300, -5.28308500, 2.24772115, 2.34177263, 3.26208812
12376654291645892238, -12.55978600, 64.52731300, -2.45127800, 2.07131952, 1.74568809, 3.99630383
12376652256977880358, -7.53306100, 63.66133800, -1.00388900, 4.58566663, 4.24637859, 9.03081842
12376674419001263208, -7.99424300, 70.63974400, -7.30337800, 1.57427668, 1.55615770, 2.54235304
12376654409802055788, -13.13487400, 64.49811500, -3.74479900, 1.90045562, 1.62890322, 3.26208812
12376672540191621588, -10.21389900, 76.04658500, -3.49305400, 1.84673867, 1.84829942, 2.67189773
12376654286275870778, -12.09008300, 63.83559400, -2.85263800, 2.00624352, 1.34665850, 3.82651692
12376652262366250998, -12.38394000, 62.01290600, -0.59766800, 3.65005091, 3.40648453, 5.31357525
12376679116699731738, -7.94937500, 65.97727000, -8.43705500, 3.85653200, 3.63160300, 7.43835869
12376672540194899118, -8.81539600, 60.02279800, -2.66081100, 2.84156778, 2.70543932, 4.09372884
12376673243354234948, -13.16875800, 69.98929000, -5.07114500, 1.90103410, 1.49183414, 4.42657010
12376654409791570978, -13.30468200, 82.04712800, -4.57682300, 2.57351520, 2.69390438, 4.50946297
12376654409783706498, -10.52302400, 80.90999500, -4.59987500, 3.06529021, 2.97485156, 4.33734368
12376674429734748548, -6.41234400, 67.15458200, -6.08123000, 3.54492375, 3.31010643, 7.62327500
12376674424384389378, -10.00073700, 58.67165000, -5.71083600, 3.49364177, 2.92743314, 8.55905236
12376654409788294418, -12.59558500, 84.50504500, -4.78511000, 3.54599611, 3.01348755, 6.07224312
12376654286266696848, -10.24373300, 66.71774100, -3.09748500, 2.48979887, 2.77203310, 3.60012830
12376673237962590118, -6.25013900, 65.14804700, -5.09290300, 3.51169584, 3.17396530, 9.49139864
12376674445857914918, -13.55979900, 82.72874300, -5.60512700, 3.17558282, 3.59467720, 4.62850582
12376654415155038068, -10.28856500, 72.93380600, -3.57051300, 1.82119920, 1.94658009, 3.36034877
12376654415155037218, -9.45429000, 67.92269500, -3.42916200, 2.49402716, 2.52789040, 3.77117929
12376652256996885508, -14.68230200, 74.97873100, -1.14141400, 2.88932865, 2.90519193, 4.13554466
12376654409794847348, -14.68222600, 84.34634900, -4.84714900, 5.43834290, 5.27088675, 12.47885789
12376674445869712128, -14.18153900, 65.90655500, -4.33820200, 2.37303304, 2.12718466, 4.76119056
12376673216502826108, -9.69130000, 61.97259900, -6.66356400, 2.41115094, 2.19253946, 4.71348733
12376674440489862718, -13.04722600, 77.60296000, -5.82644500, 2.74676542, 2.65723402, 4.68472853
12376674435121154208, -11.01049700, 64.98088400, -5.35402800, 2.18434060, 2.00033784, 3.31482534
12376673221864982098, -10.19978400, 78.22660900, -7.92399900, 2.95482533, 2.86876723, 4.56649527
12376654431276238308, -14.31009100, 70.54341800, -2.00474600, 1.72473099, 1.99132428, 2.69441902
12376653287831634928, -13.11554500, 71.37722000, -1.47007700, 1.75781357, 1.82869102, 2.22688566
12376674429741957638, -9.64038300, 76.81649000, -6.86240000, 2.39637913, 2.49285454, 3.79018248
12376674419025511978, -15.46382900, 72.97364600, -7.58202200, 3.47020878, 3.16059050, 6.54863146
12376673237984870908, -14.29863800, 76.43395800, -5.98144400, 2.18464515, 2.06852647, 3.98663757
12376673216491685178, -7.41908700, 65.69872000, -7.14633600, 2.38850798, 2.32960870, 3.33079815
12376652267735616408, -15.99419400, 79.24098200, -0.04979100, 3.87207819, 4.21378320, 7.12745930
12376674435126395878, -11.29799600, 59.85112400, -4.88758900, 2.57751439, 2.18035191, 4.23319056
12376654431277548298, -15.85479600, 76.34960500, -2.04533300, 3.19803787, 3.01094017, 7.73532525
12376652262361662218, -14.15792400, 79.18876900, -0.62878000, 2.90595735, 2.99308542, 5.12743577
12376673237992736108, -14.27224900, 65.32686800, -5.14269900, 3.60062818, 2.41562230, 13.67490578
12376673237971109328, -9.96500500, 76.22148500, -5.97985000, 2.03426624, 2.20440897, 3.28353110
12376654409785016878, -8.82412900, 65.78253800, -3.68184700, 2.53475058, 2.68439077, 3.50543361
12376673237967176468, -7.31132700, 64.59747200, -5.09628300, 2.03587587, 1.89304544, 3.58097065
12376673232611574538, -12.84526800, 76.98176200, -6.46128700, 2.41507345, 2.52728423, 3.67252798
12376654431259197998, -10.58334400, 80.27727000, -2.09819800, 1.46989917, 1.14877614, 3.01373129
12376674445841532168, -7.94387800, 79.83202600, -5.48182200, 2.65966098, 2.15963403, 5.42401332
12376672598928262548, -12.40643300, 63.92414400, -1.54666300, 2.71673678, 2.70770528, 4.00142018
12376674478081967488, -11.93525100, 63.65678100, -7.90467600, 3.21716345, 3.11119055, 6.02428761
12376674424368661818, -6.61519800, 62.64342400, -6.17741700, 2.60444123, 2.02239719, 7.37203896
12376654286279803968, -12.56522500, 60.72952700, -2.86023400, 2.09869439, 2.29097980, 2.67490195
12376674429760963098, -13.03243600, 64.33836700, -5.74309900, 1.91401596, 1.89906055, 3.05089844
12376673232610919548, -12.18260700, 73.81036600, -6.20417800, 2.59330401, 2.48959467, 3.66493702
12376679122074337598, -10.04596000, 69.96882000, -8.64646300, 2.73683038, 2.63536485, 4.36021121

12376674419005851158, -7.85238100, 59.58812600, -6.15303100, 3.54673380, 2.23418542, 8.75291261
12376673221863016108, -7.55148700, 61.65165800, -6.30940800, 2.41930714, 2.19253946, 4.83695315
12376672534822256758, -9.83439100, 75.27539800, -3.92537800, 2.17568077, 1.97374205, 3.76902508
12376672550926418248, -8.74310500, 70.91534900, -2.26380600, 2.47187847, 2.41118888, 3.94322293
12376654409783706438, -9.42424900, 72.51573700, -4.17027000, 1.51866672, 1.37520238, 2.58065958
12376679116695143758, -7.13570300, 69.42368500, -9.02418600, 4.95032843, 3.75611793, 10.83389763
12376674435104114448, -8.08474200, 82.64820900, -6.91209400, 4.29773940, 3.83729771, 11.91922097
12376654431275581978, -15.10634900, 76.34556500, -1.92849100, 2.18808121, 2.01212072, 3.41837590
12376674445866434998, -14.78627900, 73.75975400, -5.06601500, 2.35770887, 2.50498849, 4.11990006
12376674445869713008, -12.88386200, 60.09112700, -3.97966200, 3.81057431, 3.03192979, 8.72381385
12376654425893766238, -11.47224500, 78.69446400, -2.75523500, 1.70229601, 1.59436075, 2.77794813
12376654431262475188, -11.14846700, 76.96340500, -2.16165900, 1.28395997, 1.04248798, 2.25214731
12376679127454188848, -14.69367900, 77.20770600, -8.80990000, 3.80080961, 2.97807204, 8.47588181
12376674424383734728, -12.58234500, 74.81154100, -7.11997800, 2.33079048, 2.27886483, 3.59604484
12376674419015025548, -11.02712400, 65.66686300, -6.86392900, 1.91447405, 1.81728817, 3.47039145
12376654280902575668, -13.22115800, 76.83232500, -4.10907100, 1.89210002, 1.82818317, 2.81184423
12376654291638682908, -11.90364900, 71.36654500, -2.77621100, 1.62097303, 1.39109343, 3.01236108
12376673221881365898, -12.69959400, 64.28936000, -6.53178200, 2.18498299, 2.21424233, 3.12667750
12376654409800091328, -15.48842700, 78.67507500, -4.47763600, 3.51253799, 3.34708848, 7.48954694
12376674424387012778, -11.02267000, 60.70377500, -5.95925600, 2.54205799, 2.60095912, 4.08995274
12376674440492484618, -14.10304000, 78.69701500, -5.81318300, 2.44100925, 1.92443870, 4.50084132
12376654431257887418, -10.22650600, 80.96392500, -2.12815800, 2.22392571, 2.15372195, 4.12470010
12376679111351337548, -14.26704000, 69.98286600, -9.60377500, 3.32887640, 3.80772769, 5.89687579
12376674440495761228, -14.32329700, 74.64210400, -5.66601700, 1.96574441, 2.02383551, 2.91555114
12376674472711292098, -13.60486100, 75.81233300, -10.19705200, 4.19101747, 3.50516258, 9.72204782
12376674472708670468, -12.83366300, 76.65392600, -10.10559000, 4.47997919, 3.61990181, 9.26890326
12376654409795503018, -10.76743300, 60.19460500, -3.46024200, 2.09443637, 2.22939619, 3.00834226
12376673227239589578, -10.20434600, 65.80811300, -6.17381400, 2.40037781, 1.97192411, 3.54501843
12376653293198377808, -12.85525400, 73.55326400, -1.07498100, 2.66385655, 2.57197882, 4.37652133
12376674445869057608, -14.86575700, 70.60862200, -4.64043900, 3.14946320, 2.91847752, 6.07802640
12376673243352268928, -13.99531100, 77.85219900, -5.37171100, 1.43314404, 1.30695011, 2.39877584
12376652267737580698, -16.34771400, 77.86792600, -0.10113600, 6.69669875, 4.20884462, 20.05527749
12376672540183103418, -7.93697600, 80.01184300, -3.51554100, 3.90407095, 3.46771486, 7.90806384
12376674440478720428, -7.82516700, 63.70443000, -4.69867800, 1.93831945, 2.05779299, 3.21597077
12376654425895077558, -11.66101500, 77.45495300, -2.53723400, 1.81765274, 1.92674184, 2.63191184
12376653287829013438, -11.67933000, 67.76469700, -1.42521200, 3.28674905, 3.03720783, 5.84864213
12376654280901919408, -12.81152300, 76.41515200, -3.99856900, 2.46996857, 2.53308906, 3.51671508
12376673243334576808, -7.69663200, 70.09978900, -4.91219000, 1.54973846, 1.48798227, 2.54482258
12376674483431016488, -7.44096800, 69.48800900, -8.19164600, 2.09408150, 2.07658443, 3.55583908
12376672529454861498, -11.50908400, 83.59026100, -5.03857100, 3.27002107, 3.11843965, 4.87276940
12376654275540421868, -14.63148700, 73.93599100, -4.36371500, 1.89886746, 1.87388786, 3.34706484
12376654420528333688, -11.47015100, 72.86460100, -3.09719100, 1.73431419, 1.73019256, 2.54599692
12376672545558365438, -9.33027700, 74.63358100, -2.72223000, 1.89198932, 1.98923102, 2.43255205
12376673227241555128, -13.27614400, 81.57089700, -7.47164300, 3.69911703, 3.85530746, 4.77888826
12376673221864981858, -9.62734200, 74.18684000, -7.36147300, 2.48517213, 2.50190152, 3.02995279
12376674418998642288, -7.95293600, 79.05819800, -8.26090900, 4.24507413, 3.48617553, 9.69919081
12376673221872190048, -10.72252600, 67.50272900, -6.71891900, 2.07853078, 2.34778529, 3.20230733
12376654425883937418, -7.93633800, 75.28685000, -2.55034900, 2.64143437, 2.48852194, 4.82256725
12376679127441081118, -10.04225900, 74.17776200, -8.43832300, 3.62738258, 3.34142489, 5.69562091
12376653298554636068, -10.36218700, 82.62843100, -0.40139600, 5.58705506, 4.96677584, 18.54734011
12376654286269318328, -12.83727600, 79.01391600, -3.62142700, 2.18968880, 2.39877584, 3.18824873
12376674478074758118, -12.32341900, 78.29369600, -9.85156200, 4.17257226, 3.88866411, 10.30893028

12376654409795502788, -12.49659600, 70.17409400, -3.94500900, 1.11899192, 1.09268826, 2.61647769
12376654425902940438, -13.97521000, 76.84917700, -2.72592200, 2.34180477, 2.38639033, 3.37134199
12376653303943660528, -15.48860400, 74.30353400, 0.14517400, 5.97614354, 5.05176132, 16.41073515
12376674445844809308, -8.44729600, 74.84689000, -4.97881000, 1.81081381, 1.91659554, 2.60218968
12376672545564265258, -10.10583200, 66.71278600, -2.59517700, 2.62291646, 2.40111657, 4.42432628
12376674424375870798, -11.07416700, 81.35963000, -7.81167800, 2.59494299, 2.74637842, 4.68472853
12376654420532266188, -11.67159100, 66.92418600, -2.75122200, 2.38375454, 2.41251065, 3.35235119
12376674429736059708, -8.23547000, 80.59215900, -7.19325000, 1.25338487, 1.19272994, 2.12516418
12376652267727094838, -11.92566900, 72.02785700, -0.16417000, 3.58496387, 2.68926086, 10.71787858
12376654409790916348, -12.77303000, 80.75896600, -4.68056600, 2.68136838, 2.77861704, 4.19894715
12376674424385700728, -13.30057300, 75.86700500, -7.42906000, 2.06004154, 1.90077181, 3.61588166
12376679122088756598, -14.46907900, 70.72251000, -8.52360200, 2.78113594, 2.96991163, 4.47196467
12376673216495617068, -10.12311600, 79.74719800, -8.49086400, 2.18794972, 1.91105435, 5.42459824
12376654431270995668, -12.47046000, 69.63815200, -1.91005300, 2.31991213, 2.25337880, 3.40245370
12376654280899955978, -13.19176100, 81.61286500, -4.18429700, 3.06027305, 3.00392966, 4.83199786
12376679116698422958, -8.02855100, 69.61405200, -8.95048600, 3.38492725, 2.77901554, 8.60134830
12376654415166834288, -14.89992100, 79.17927200, -3.82922400, 2.51776890, 2.99437177, 5.27088675
12376672529452237998, -8.05628500, 63.55997800, -3.81666100, 2.38794318, 2.35531997, 3.79787850
12376674429762275018, -13.97817100, 67.08625400, -5.96721400, 2.84100815, 2.62514076, 4.47196467
12376654431263785978, -11.54300400, 76.37591000, -1.93130700, 2.00432443, 1.84297871, 3.52579524
12376672556297750208, -443, 1.84297871, 3.52579524
12376672556297750208, -10.17190900, 75.33467700, -1.64785400, 1.93512182, 1.85127942, 3.27138444
12376654420523745928, -10.96358400, 79.04648000, -3.28667700, 2.50226649, 2.49088531, 3.81501880
12376673221871534668, -10.04444100, 64.29562000, -6.44260600, 2.31533884, 2.20257252, 3.36479966
12376673237963900358, -7.99176600, 79.37232500, -6.25119200, 2.38448171, 1.85195758, 5.19632766
12376672529450928328, -8.95885400, 74.04913100, -4.59568100, 1.85979905, 1.95635226, 2.60016736
12376652262349210578, -7.98533700, 61.59735300, -0.63698800, 5.46674257, 4.65921454, 13.29887756
12376654286266697088, -10.77727400, 70.07302800, -3.24690500, 1.57342301, 1.15907658, 3.10445043
12376672540187034468, -8.38732900, 73.00006900, -3.32667400, 2.09086840, 1.91366982, 2.99651250
12376652256979846088, -10.30945200, 81.06755400, -1.41501900, 2.60088148, 2.10594179, 6.43687415
12376673243337851708, -9.05606600, 74.36882300, -5.40122500, 2.27313000, 2.32089276, 3.27595274
12376673243334575128, -6.82416800, 63.04627600, -4.57188600, 2.22707272, 1.72108287, 4.35098995
12376654280908475628, -13.98616600, 71.82937500, -3.68455800, 1.54773561, 1.22891671, 2.50581696
12376654280902575468, -12.54415500, 73.17233800, -3.89842600, 1.91145855, 1.95414540, 3.18296149
12376673221863671068, -10.15638000, 80.75978300, -8.08674300, 1.77144192, 1.36888452, 4.39801463
12376672540191622928, -8.96455300, 66.21864000, -3.08988400, 1.91794243, 1.61508398, 2.97785730
12376679122092032088, -15.74912100, 72.55291600, -8.78397100, 5.14757400, 4.71725286, 12.47885789
12376672529443717408, -6.88451200, 74.60069600, -4.51701600, 3.84209368, 2.50267576, 9.49139864